

Лабораторная работа № 15

Система компьютерной алгебры Maple. Вычисление пределов и производных функции

Порядок выполнения.

В Maple для некоторых математических операций существует по две команды: одна прямого, а другая - отложенного исполнения. Имена команд состоят из одинаковых букв за исключением первой: команды прямого исполнения начинаются со строчной буквы, а команды отложенного исполнения - с заглавной. После обращения к команде отложенного действия математические операции выводятся на экран в виде стандартной аналитической записи этой операции. Вычисление в этом случае сразу не производится. Команда прямого исполнения выдает результат сразу.

Для вычисления пределов имеются две команды: **прямого исполнения** - $\text{limit}(\text{функция}, x=a, \text{par})$, где a - значение точки, для которой вычисляется предел, par - необязательный параметр для поиска односторонних пределов (left - слева, right - справа); **отложенного исполнения** - $\text{Limit}(\text{expr}, x=a, \text{par})$, где параметры команды такие же, как и в предыдущем случае.

Задание 1. Найти указанные пределы.

Решение. Запишем команды отложенного и прямого исполнения:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^4 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}.$$

> $\text{Limit}((5*x^4+4*x-1)/(3*x^2+x-2), x=-1) = \text{limit}((5*x^4+4*x-1)/(3*x^2+x-2), x=-1);$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{5x^4 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2} = \frac{16}{5}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1}.$$

> $\text{Limit}(3*x^4+x^2-6/(2*x^2+3*x+1), x=\text{infinity}) = \text{limit}(3*x^4+x^2-6/(2*x^2+3*x+1), x=\text{infinity});$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1} = \infty$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}.$$

> Limit(3*x/(sqrt(x+1)-sqrt(1-x)),x=0)=limit(3*x/(sqrt(x+1)-sqrt(1-x)),x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}} = 3$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x.$$

> Limit(((2-3*x)/(5-3*x))^x,x=infinity)=limit(((2-3*x)/(5-3*x))^x,x=infinity);

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x = e$$

Преобразуем конечный результат:

> evalf(%);

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x = 2.718281828$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x}.$$

> Limit((sin(7*x)+sin(3*x))/x,x=0)=limit((sin(7*x)+sin(3*x))/x,x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x) + \sin(3x)}{x} = 10$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

> Limit((1-x)/(1-sin(Pi*x/2)),x=1)=limit((1-x)/(1-sin(Pi*x/2)),x=1);

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \text{undefined}$$

Предел не определен. Можно найти левосторонний или правосторонний пределы:

> Limit((1-x)/(1-sin(Pi*x/2)),x=1,left)=limit((1-x)/(1-sin(Pi*x/2)),x=1,left);

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \infty$$

Задание 2. Задать функцию $y(x) = \frac{3}{(x+4)^2} - \sqrt[3]{4+3x-x^4}$. Найти значение функции $y(1.25)$.

Задание 3. Найти первую производную функции $y'(x)$.

Задание 4. Вычислить производную $y''(x)$ функции $y(x) = \cos^5(3x) \cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3$ при $x_0 = 2.3$.

Задание 5. Найти первую производную $y'(x)$ функции $y(x) = (\cos(x+2))^{\ln x}$.

Задание 6. Найти первую производную $y'(x)$ функции $x \cdot y(x) - y^3(x) = 4x - 5$.

Задание 7. Найти вторую производную $y''(x)$ функции $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$.

Задание 8. Задать функцию $f(x; y; z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Найти значение функции $f(1; 2; 2)$.

Задание 9. Для заданной функции (п. 7) вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ в точке $M_0(0; -1; 1)$.

Решение. 2) Зададим функцию:

> **restart;**

> **y := x -> 3/(x+4)^2 - (4+3*x-x^4)^(1/3);**

$$y := x \rightarrow \frac{3}{(x+4)^2} - (4+3x-x^4)^{(1/3)}$$

Далее вычислим ее значение в заданной точке:

> **y(1.25);**

-1.635611702

3) Найдем производную, используя команду прямого исполнения `diff(f,x)`, где `f` - функция, `x` - имя переменной, по которой производится дифференцирование.

$$y1 := -\frac{6}{(x+4)^3} - \frac{3-4x^3}{3(4+3x-x^4)^{(2/3)}}$$

После выполнения дифференцирования, полученное выражение желательно упростить. Для этого следует использовать команды `simplify factor` или `expand`.

4) Зададим новую функцию:

```
> y := x -> (cos(3*x))^5*tan((4*x+1)^3);
```

$$y := x \rightarrow \cos(3x)^5 \tan((4x+1)^3)$$

Найдем ее вторую производную:

```
> y2:=diff(y(x),x$2);
```

$$\begin{aligned} y2 := & 180 \cos(3x)^3 \tan((4x+1)^3) \sin(3x)^2 \\ & - 360 \cos(3x)^4 (1 + \tan((4x+1)^3)^2) (4x+1)^2 \sin(3x) \\ & - 45 \cos(3x)^5 \tan((4x+1)^3) \\ & + 288 \cos(3x)^5 \tan((4x+1)^3) (1 + \tan((4x+1)^3)^2) (4x+1)^4 \\ & + 96 \cos(3x)^5 (1 + \tan((4x+1)^3)^2) (4x+1) \end{aligned}$$

Вычислим ее значение, придав сначала значение аргумента:

```
> x:=2;
```

$$x := 2$$

```
> y2;
```

$$\begin{aligned} & 180 \cos(6)^3 \tan(729) \sin(6)^2 - 29160 \cos(6)^4 (1 + \tan(729)^2) \sin(6) \\ & - 45 \cos(6)^5 \tan(729) + 1889568 \cos(6)^5 \tan(729) (1 + \tan(729)^2) \\ & + 864 \cos(6)^5 (1 + \tan(729)^2) \end{aligned}$$

Просчитаем полученное выражение:

```
> evalf(%);
```

247036.8813

5) Воспользуемся непосредственной командой дифференцирования. Для этого высвободим значение переменной x:

```
> x:='x' ;
```

$x:=x$

```
> diff((cos(x+2))^ln(x),x) ;
```

$$\cos(x+2)^{\ln(x)} \left(\frac{\ln(\cos(x+2))}{x} - \frac{\ln(x) \sin(x+2)}{\cos(x+2)} \right)$$

6) Чтобы продифференцировать неявную функцию, зададим уравнение:

```
> f := x*y^2-y^3=4*x-5;
```

$$f := x y^2 - y^3 = 4 x - 5$$

Далее воспользуемся оператором неявного дифференцирования:

```
> implicitdiff(f,y,x) ;
```

$$\frac{y^2 - 4}{y(3y - 2x)}$$

7) Зададим функцию параметрически:

```
> x:=t -> 6*(cos(t))^3;
```

$$x := t \rightarrow 6 \cos(t)^3$$

```
> y:=t -> 2*(sin(t))^3;
```

$$y := t \rightarrow 2 \sin(t)^3$$

Вычислим вторую производную по формуле: $y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{x'(t)}$, где

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)};$$

```
> y1x:=diff(y(t),t)/diff(x(t),t) ;
```

$$y1x := -\frac{1}{3} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

```
> y2x:=diff(y1x,t)/diff(x(t),t) ;
```

$$y_{2x} := -\frac{1}{18} \frac{-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2}}{\cos(t)^2 \sin(t)}$$

8) Зададим функцию трех переменных:

> $f := (x, y, z) \rightarrow z / \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$f := (x, y, z) \rightarrow \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Найдем значение в заданной точке:

> $f(1, 1, 2)$;

$$\sqrt{2}$$

9) Частные производные зададим оператором:

> $f1x := D[1](f)$; $f1y := D[2](f)$; $f1z := D[3](f)$;

$$f1x := (x, y, z) \rightarrow -\frac{z x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

$$f1y := (x, y, z) \rightarrow -\frac{z y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

$$f1z := (x, y, z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Вычислим значения полученных производных в заданной точке:

> $f1x(0, -1, 1)$;

$$0$$

> $f1y(0, -1, 1)$;

$$1$$

> $f1z(0, -1, 1)$;

$$1$$

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти указанные пределы:

$$1.1 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{x + 8} - 3};$$

$$\text{r)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1}; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}; \quad \text{е)} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$1.2 \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}; \quad \text{е)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

$$1.3 \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6+x-x^2}{x^3-27}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2+2x-8};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}; \quad \text{е)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$$

$$1.4 \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}; \quad \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x}.$$

$$1.5 \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}; \quad \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^3}.$$

$$1.6 \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12+x-x^2}{x^3-27}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}; \quad \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi x}{2} \right)}.$$

$$1.7 \text{ а)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + x + 2}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}; \quad \text{е)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}.$$

$$1.8 \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \operatorname{tg} x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}.$$

$$1.9 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$1.10 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x.$$

2. Задать функцию $y(x)$ и найти значение функции y при $x=x_0$

$$2.1 \quad y(x) = \frac{7}{(x+2)^5} - \sqrt{8-5x+2x^2}, \quad x_0=3.37;$$

$$2.2 \quad y(x) = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \frac{4}{(x-2)^5}, \quad x_0=-3.17;$$

$$2.3 \quad y(x) = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \frac{3}{2x^3 - 3x + 1}, \quad x_0=8.21;$$

$$2.4 \quad y(x) = \sqrt{(x-4)^5} \frac{5}{(2x^2 + 4x - 1)^2}, \quad x_0=4.56;$$

$$2.5 \quad y(x) = \sqrt[5]{7x^2 - 3x + 5} - \frac{5}{(x-1)^3}, \quad x_0=-6.96;$$

$$2.6 \quad y(x) = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5} - \frac{3}{(x-5)^4}, \quad x_0=11.6;$$

$$2.7 \quad y(x) = \sqrt[3]{(x-7)^5} + \frac{5}{4x^2 + 3x - 5}, \quad x_0=4.67;$$

$$2.8 \quad y(x) = \frac{3}{(x-4)^7} - \sqrt{5x^2 - 4x + 3}, \quad x_0=-0.82;$$

$$2.9 \quad y(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 3x - 4} - \frac{2}{(x-3)^5}, \quad x_0=7.26;$$

$$2.10 \quad y(x) = \frac{7}{(x-1)^3} + \sqrt{8x-3+x^2}, \quad x_0=2.75.$$

3. Найти первую производную $y'(x)$ ранее заданной функции.

4. Вычислить вторую производную $y''(x_0)$ функции:

$$4.1 \quad y(x) = \arcsin^3(4x) \cdot \operatorname{ctg}(3x) \text{ при } x_0=0.13; \quad 4.2 \quad y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5 \text{ при } x_0=1.5;$$

$$4.3 \quad y(x) = \operatorname{tg}^4 x \cdot \arcsin 4x^5 \text{ при } x_0=0.3; \quad 4.4 \quad y = \arcsin^3 2x \cdot \operatorname{ctg} 7x^4 \text{ при } x_0=-0.34;$$

$$4.5 \quad y(x) = \operatorname{ctg}(3x) \cdot \arccos 3x^2 \text{ при } x_0=0.39; \quad 4.6 \quad y = \operatorname{arctg}^3 4x \cdot 3^{\sin x} \text{ при } x_0=2.67;$$

$$4.7 \quad y(x) = \ln^5 x \cdot \operatorname{arctg} 7x^4 \text{ при } x_0=1.24; \quad 4.8 \quad y = \arccos^2 4x \cdot \ln |x-3| \text{ при } x_0=0.19;$$

$$4.9 \quad y(x) = 2^{\cos x} \cdot \operatorname{arcctg} 5x^3 \text{ при } x_0=3.57; \quad 4.10 \quad y = 4^{-x} \cdot \ln^5 |x+2| \text{ при } x_0=-4.27.$$

5. Найти первую производную $y'(x)$ функции:

$$5.1 \quad y(x) = (\ln(7x+4))^{\operatorname{tg} x}; \quad 5.2 \quad y(x) = (\sin 3x)^{\arccos x}; \quad 5.3 \quad y(x) = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg} 5x};$$

$$5.4 \quad y(x) = (\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arctg} 3x}; \quad 5.5 \quad y(x) = (\ln(x+3))^{\sin \sqrt{x}}; \quad 5.6 \quad y(x) = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}};$$

$$5.7 \quad y(x) = (\arccos 5x)^{\ln x}; \quad 5.8 \quad y(x) = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}; \quad 5.9 \quad y(x) = (\ln(x+7))^{\operatorname{ctg} 2x};$$

$$5.10 \quad y(x) = (\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}.$$

6. Найти первую производную $y'(x)$ функции:

$$6.1 \quad \sin y = xy^2 + 5; \quad 6.2 \quad y = x + \operatorname{arctg} y; \quad 6.3 \quad y^2 = 25x - 4;$$

$$6.4 \quad \operatorname{arcctg} y = 4x + 5y; \quad 6.5 \quad y^2 - x = \cos y; \quad 6.6 \quad 3x + \sin y = 5y;$$

$$6.7 \quad \operatorname{tg} y = 3x + 5y; \quad 6.8 \quad xy = \operatorname{ctg} y; \quad 6.9 \quad y = e^y + 4x; \quad 6.10 \quad 3y = 7 + xy^3.$$

7. Найти вторую производную y''_{xx} функции:

$$7.1 \quad \begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases} \quad 7.2 \quad \begin{cases} x = (2t+3)\cos t, \\ y = 3t^3. \end{cases} \quad 7.3 \quad \begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases} \quad 7.4 \quad \begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$$

$$7.5 \quad \begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases} \quad 7.6 \quad \begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases} \quad 7.7 \quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases} \quad 7.8 \quad \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$7.9 \quad \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases} \quad 7.10 \quad \begin{cases} x = \operatorname{arccos} t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

8. Задать функцию $f(x, y, z)$. Найти значение функции $f(1, 1, 2)$.

8.1 $f(x, y, z) = ze^{-xy}$; 8.2 $f(x, y, z) = \ln\left(x + \frac{y}{2z}\right)$;

8.3 $f(x, y, z) = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$; 8.4 $f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}}$;

8.5 $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xy^2 + z)$; 8.6 $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{xz}{y^2}\right)$;

8.7 $f(x, y, z) = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z)$; 8.8 $f(x, y, z) = \ln(x + y^2) - \sqrt{xz}$;

8.9 $f(x, y, z) = \frac{z}{x^4 + y^2}$; 8.10 $f(x, y, z) = \ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)$.

9. Для ранее заданной функции $f(x, y, z)$ вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ в точке $M_0(0, -1, 1)$.