

Лабораторная работа № 16

Система компьютерной алгебры Maple. Вычисление интегралов, построение графиков функции

Порядок выполнения.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ вычисляется с помощью 2-х команд: **прямого исполнения** - `int(f, x)`, где f - подынтегральная функция, x - переменная; **отложенного исполнения** - `Int(f, x)` (параметры команды такие же). Команда `Int` выдает на экран интеграл в аналитическом виде математической формулы.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в командах `int` и `Int` добавляются пределы интегрирования `int(f, x=a..b)`.

КАЖДОЕ ЗАДАНИЕ ОФОРМЛЯЕМ ОТДЕЛЬНОЙ СЕКЦИЕЙ!!!

Задание 1. Найти неопределенные интегралы.

Решение. Запишем команду отложенного и прямого исполнения:

а) $\int \ln(\cos x) \cdot \sin x dx$, (задание б) выполняется аналогично).

> `Int(ln(cos(x))*sin(x), x)=int(ln(cos(x))*sin(x), x);`

$$\int \ln(\cos(x)) \sin(x) dx = -\ln(\cos(x)) \cos(x) + \cos(x)$$

в) $\int \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx.$

> `Int((3*x^2+20*x+9)/((x^2+4*x+3)*(x+5)), x)=int((3*x^2+20*x+9)/((x^2+4*x+3)*(x+5)), x);`

$$\int \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx = -2 \ln(x + 5) + 6 \ln(x + 3) - \ln(x + 1)$$

Задание 2. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой.

Решение. а) $\int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx.$

```
> Int((3*x^4+3*x^2+1)/(x^2+1), x=0..1)=int((3*x^4+3*x^2+1)/(x^2+1),  
x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Для точности укажем округление:

```
> Int((3*x^4+3*x^2+1)/(x^2+1), x=0..1)=  
evalf(int((3*x^4+3*x^2+1)/(x^2+1), x=0..1), 3);
```

$$\int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = 1.78$$

б) $\int_0^5 \frac{1}{2x + \sqrt{3x+1}} dx.$ Для точности сразу укажем округление (задание в)

выполняется аналогично):

```
> Int(1/(2*x+sqrt(3*x+1)), x=0..5)=evalf(int(1/(2*x+sqrt(3*x+1)),  
x=0..5), 2);
```

$$\int_0^5 \frac{1}{2x + \sqrt{3x+1}} dx = 0.93$$

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x}{16x^4 + 1} dx.$

Решение. > `Int(x/(16*x^4+1), x=0..infinity)=int(x/(16*x^4+1), x=0..infinity);`

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{16x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{16}$$

```
> evalf(%, 2);
```

$$0.20 = 0.20$$

Задание 4. Вычислить двойной интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{x^3}^{3x} (y^2 + x) dy$.

Решение. `> int(y^2+x, [y = x^3..3*x, x = 0..sqrt(3)]) ;`

$$\frac{243}{20} + \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

`> evalf(%,4) ;`

$$14.23$$

В задании 5) для построения графиков функций используйте линии разных цветов, толщины и стилей. В заданиях 6), 7) у построенных графиков измените цвет и толщину линий, свойства просмотра и способы отображения функций, добавьте заголовки, отформатируйте оси.

Задание 5. Построить в одной системе координат графики функций:

а) $y = x - \ln(1 + x^2)$; б) $y = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$; в) $y = (x - 1) \cdot e^{4x+2}$.

Задание 6. Построить кривую, заданную неявно $y = e^y + 4x$.

Задание 7. Построить кривую, заданную в полярной системе координат $\rho = 2\sin 4\varphi$.

Задание 8. Построить кривую, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. Для построения графиков $f(x)$ используется команда `plot(f(x), x=a..b, y=c..d, parameters)`, где `parameters` - параметры управления изображением. Настройка изображения также может осуществляться с панели инструментов.

Основные параметры команды `plot`: **title**="text", где `text`-заголовок рисунка; **coords**=polar - в полярных координатах; **axes** - установка типа осей: `axes=NORMAL`; `axes=BOXED`; `axes=FRAME`; `axes=NONE`; **scaling** - установка масштаба рисунка: `scaling=CONSTRAINED` - одинаковый масштаб; `scaling=UNCONSTRAINED` - график масштабируется; **style**=LINE(PPOINT); **numpoints**=n - число точек графика.

5) Зададим функцию а)

`> f1:=x-ln(1+x^2) ;`

$$f1 := x - \ln(x^2 + 1)$$

Зададим функцию б)

```
> f2:=x^3/(x^2+x+1);
```

$$f2 := \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$$

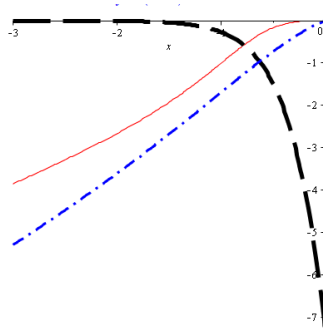
Зададим функцию в)

```
> f3:=(x-1)*exp(4*x+2);
```

$$f3 := (x - 1) e^{(4x+2)}$$

Построим графики:

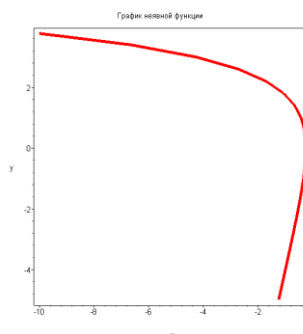
```
> plot({f1,f2,f3},x=-3..0,color=[red,black,blue],linestyle=[0,3,4],thickness=[1,5,3]);
```



2) Построим неявную кривую с помощью оператора implicitplot:

```
> with(plots,implicitplot);
```

```
> implicitplot(y=exp(y)+4*x,x=-10..10,y=-5..5, color=red,
axes=box,thickness=5,caption="График неявной функции");
```



6), 7) Аналогично, строим графики в полярной системе и параметрической функции (приведем только команды):

```
> plot(2*sin(4*phi), coords=polar, color=blue,
axes=frame,thickness=3,caption="График в полярной системе");

> plot([4*(cos(t))^3,4*(sin(t))^3,t=0..2*Pi], color=blue,
axes=normal,thickness=3,caption="График параметрической функции");
```

Задания для самостоятельного решения (по вариантам)

1. Найти неопределенные интегралы:

1.1 а) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; б) $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$; в) $\int \frac{12 dx}{(x^2 - 2x + 3)(x - 2)}$;

1.2 а) $\int \ln(x + 2) dx$; б) $\int \frac{x \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; в) $\int \frac{43x - 67}{(x^2 - x - 12)(x - 1)} dx$;

1.3 а) $\int \ln^2 x dx$; б) $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$; в) $\int \frac{8x dx}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)}$;

1.4 а) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int (x + 1) \cdot e^{-4x} dx$; в) $\int \frac{6x^2 + 6x - 6}{(x^2 + x - 2)(x + 1)} dx$;

1.5 а) $\int \ln(x + 4) dx$; б) $\int \arcsin 5x dx$; в) $\int \frac{37x - 85}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} dx$;

1.6 а) $\int x^2 \cdot \ln x dx$; б) $\int \operatorname{arctg} 4x dx$; в) $\int \frac{3x^2 + 3x - 24}{(x^2 - x - 2)(x - 3)} dx$;

1.7 а) $\int \arccos 2x dx$; б) $\int (x + 4) \cdot e^{2x} dx$; в) $\int \frac{3x^2 - 15}{(x^2 + 5x + 6)(x - 1)} dx$;

1.8 а) $\int \operatorname{arctg} x dx$; б) $\int (x^2 + 1) \cdot e^x dx$; в) $\int \frac{4x^2 + 32x + 52}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)} dx$;

1.9 а) $\int \arcsin 9x dx$; б) $\int (x + 7) \cdot \sin 2x dx$; в) $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} dx$;

1.10 а) $\int (x + 1) \cdot e^{2x} dx$; б) $\int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} dx$; в) $\int \frac{2x^2 - 26}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$.

2. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой:

2.1 а) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$; б) $\int_0^{0.2} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx$; 2.2 а) $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}$; б) $\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$;

2.3 а) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$; б) $\int_0^{0.2} \sqrt{x} \cdot \cos x dx$; 2.4 а) $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}$; б) $\int_0^{0.5} \ln(1 + x^3) dx$;

$$2.5 \text{ а) } \int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{2+3x}}; \text{ б) } \int_0^1 x^2 \cdot \sin x dx; \quad 2.6 \text{ а) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}; \text{ б) } \int_0^{0.5} \sqrt{1+x^2} dx;$$

$$2.7 \text{ а) } \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}}; \text{ б) } \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^5}; \quad 2.8 \text{ а) } \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}; \text{ б) } \int_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x} dx;$$

$$2.9 \text{ а) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}; \text{ б) } \int_0^{0.5} \ln(1+x^2) dx; \quad 2.10 \text{ а) } \int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}; \text{ б) } \int_{0.3}^{0.5} \frac{1+\cos x}{x^2} dx.$$

3. Вычислить несобственный интеграл:

$$3.1 \int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1}; \quad 3.2 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}; \quad 3.3 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}; \quad 3.4 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}};$$

$$3.5 \int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}; \quad 3.6 \int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5}; \quad 3.7 \int_1^{\infty} \frac{\arctg 2x dx}{\pi \cdot (1 + 4x^2)}; \quad 3.8 \int_{1/2}^{\infty} \frac{16 dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)};$$

$$3.9 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 5}; \quad 3.10 \int_0^{\infty} \frac{(3 - x^2) dx}{x^2 + 4}.$$

В задании 4. для построения графиков функций используйте линии разных цветов, толщины и стилей. В заданиях 5., 6. у построенных графиков измените цвет и толщину линий, свойства просмотра и способы отображения функций, добавьте заголовки, отформатируйте оси.

4. Построить в одной системе координат графики функций:

$$4.1 \text{ а) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; \text{ б) } y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}; \text{ в) } y = x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad 4.2 \text{ а) } y = x + \frac{\ln x}{x};$$

$$\text{б) } y = \frac{x+1}{(x-1)^2}; \text{ в) } y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}; \quad 4.3 \text{ а) } y = x^2 - 2 \ln x; \text{ б) } y = \frac{4x - x^2 - 4}{x};$$

$$\text{в) } y = e^{2x-x^2}; \quad 4.4 \text{ а) } y = -\ln \frac{1+x}{1-x}; \text{ б) } y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}; \text{ в) } y = x \cdot e^{\frac{1}{x}};$$

$$4.5 \text{ а) } y = x \cdot \ln x; \text{ б) } y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}; \text{ в) } y = x \cdot e^x; \quad 4.6 \text{ а) } y = \frac{\ln x}{x};$$

$$\text{б) } y = \frac{(x-2)^2}{x+1}; \text{ в) } y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}; \quad 4.7 \text{ а) } y = \ln \left(1 - \frac{1}{x^2} \right); \text{ б) } y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1};$$

в) $y = (x+2)e^{1-x}$; 4.8 а) $y = 1 - \ln^3 x$; б) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$; в) $y = (x+1)e^{2x}$;

4.9 а) $y = -x \cdot \ln^2 x$; б) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$; в) $y = x^3 e^{x+1}$; 4.10 а) $y = \ln(4 - x^2)$;

б) $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$; в) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$.

5. Построить кривую, заданную неявно:

5.1 $y = x + \operatorname{arctg} y$; 5.2 $y^2 = 25x - 4$; 5.3 $y^2 - x = \cos y$; 5.4 $3x + \sin y = 5y$;

5.5 $xy = \operatorname{ctg} y$; 5.6 $y^2 + x^2 = \sin y$; 5.7 $4x - 7y = e^y$; 5.8 $xy - 6 = \cos y$;

5.9 $3y = 7 + xy^3$; 5.10 $x^3 + y^3 = 5x$.

6. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат:

6.1 $\rho = 2(1 - \sin 2\varphi)$; 6.2 $\rho = 3\sin 6\varphi$; 6.3 $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$; 6.4 $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$;

6.5 $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$; 6.6 $\rho = 4\sin 3\varphi$; 6.7 $\rho = 3(\cos \varphi + 1)$; 6.8 $\rho = 5(1 - \sin 2\varphi)$;

6.9 $\rho = 3(2 - \cos 2\varphi)$; 6.10 $\rho = 2\cos 4\varphi$.

7. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями ($0 \leq t \leq 2\pi$):

7.1 $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = 3\sin 2t, \end{cases}$ 7.2 $\begin{cases} x = 2\sin t, \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ 7.3 $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases}$ 7.4 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$

7.5 $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \end{cases}$ 7.6 $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases}$ 7.7 $\begin{cases} x = 4\cos 3t, \\ y = 2\sin 3t, \end{cases}$ 7.8 $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4(1 - \sin t), \end{cases}$

7.9 $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ 7.10 $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$