

Примеры решения задач

2.1. Сила тока в медном проводе сечением $S = 1\text{мм}^2$, $I = 10\text{мА}$. Найти среднюю скорость $\langle v \rangle$ упорядоченного движения электронов вдоль проводника, если считать, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости. Атомная масса меди $A = 63,6$, плотность $\rho = 8,9\text{ г/см}^3$.

Решение. Среднюю скорость упорядоченного движения электронов (скорость дрейфа) найдем из соотношения:

$$j = en\langle v_D \rangle; \quad (1)$$

$$\langle v_D \rangle = \frac{j}{en}; \quad (2)$$

Плотность тока $j = \frac{I}{S}.$ (3)

Концентрация электронов $n = \frac{\rho}{A} N_A$ (4)

С учетом (3) и (4) из (2) получаем $\langle v_D \rangle = \frac{AI}{N_A \rho S e}$ (5)

Ответ: $\langle v_D \rangle = 0,7\text{мкм/с}$.

2.2. Какой заряд пройдет по проводнику, если в течение $t=10,0\text{с}$ сила тока уменьшается с $I_0 = 10,0\text{А}$ до $I = 5,0\text{А}$? Рассмотреть два случая:

- 1). Сила тока уменьшалась равномерно;
- 2). Сопротивление проводника равномерно возрастало в течение указанного промежутка времени, а разность потенциалов на концах проводника поддерживалась постоянной.

Решение. 1). $q = \langle I \rangle t;$ (1)

При равномерном уменьшении силы тока:

$$q = \frac{I_0 + I}{2} t; \quad (2)$$

$$q = 75\text{Кл}$$

- 2). По условию задачи сопротивление R линейно зависит от времени t :

$$R = R_0 + kt, \quad (3)$$

где R_0 и R - начальное и конечное сопротивление проводника,

$$k = \text{const}; k = \frac{R - R_0}{t};$$

Согласно закона Ома:

$$I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R_0 + kt} \quad (4)$$

Из (4) следует, что I зависит от t нелинейно.

$$\text{В общем случае: } I = \frac{dq}{dt}; dq = Idt \quad (5)$$

$$q = \int_0^t Idt = \int \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_0 + kt} dt = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{k} \ln \frac{R_0 + kt}{R_0} \quad (6)$$

$$\text{Используя соотношения: } R = R_0 + kt; R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I}; R_0 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I_0},$$

$$\text{Из (6) получим: } q = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)t}{R - R_0} \ln \frac{R}{R_0} = \frac{I_0 It}{I_0 - I} \ln \frac{I_0}{I}. \quad (7)$$

$$q = 69 \text{ Кл.}$$

2.3. Рассчитать общее сопротивление проволочного куба, каждое ребро которого имеет сопротивление R (рис. 2.1).

Решение.

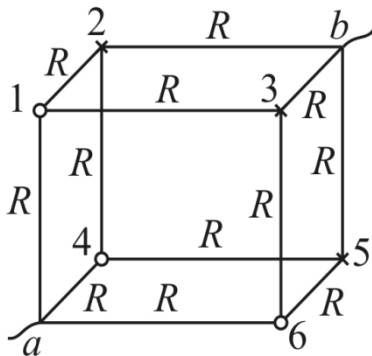


Рис. 2.1

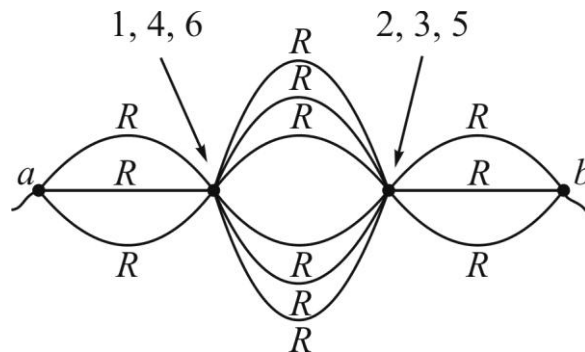


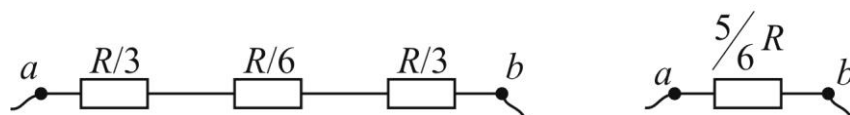
Рис. 2.2

Из соображений симметрии следует равенство потенциалов следующих узлов: $\varphi_1 = \varphi_4 = \varphi_6$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_5$, (рис. 2.1).

Если подвести напряжение к точкам a и b (рис. 2.1), то ток в них разветвится на три равные части, так как сопротивления этих ветвей одинаковы. Падение напряжения на этих ветвях ($a1$, $a4$, $a6$) одинаковое, поэтому $\varphi_1 = \varphi_4 = \varphi_6$.

Токи, идущие по этим проводникам, в свою очередь разветвятся на равные части в вершинах куба и пойдут по проводникам 12 , 13 , 42 , 45 , 63 , 65 . В точках 2 , 3 , 5 они сливаются и идут через сопротивления $2b$, $3b$, $5b$ к узлу b . Падение напряжения на них будет одним и тем же и потенциалы узлов 2 , 3 , 5 будут равными: $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_5$. Соединив точки с одинаковыми потенциалами, получим (рис. 2.2.):

Проведем дальнейшее упрощение приведенной цепи и определим ее общее сопротивление.



$$\text{Ответ: } R_{\text{общ}} = \frac{5}{6} R.$$

2.4. Даны все сопротивления и напряжение между точками 1 – 4 в изображенной ниже цепи (рис. 2.3). Найти в ней токи и $R_{общ}$.

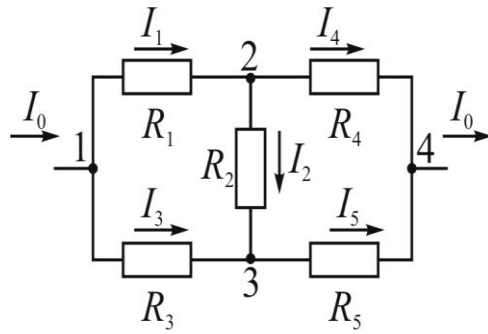


Рис.2.3

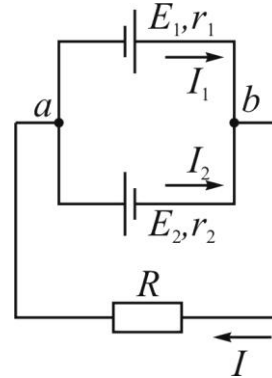


Рис. 2.4

Решение. Метод узловых потенциалов.

Укажем направления токов в ветвях цепи. Потенциал точки 4 примем за 0. Потенциалы узлов 1, 2, 3 обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Тогда по закону Ома для участка цепи имеем:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_1}, I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_2}, I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_3}, I_4 = \frac{\varphi_2}{R_4}, I_5 = \frac{\varphi_3}{R_5}, I_0 = \frac{\varphi_1}{R_{общ}}.$$

Для узлов (1), (2), (3), (4) имеем:

$$I_0 - I_1 - I_3 = 0; I_2 + I_3 - I_5 = 0; I_1 - I_2 - I_4 = 0; I_4 + I_5 - I_0 = 0.$$

Из полученной системы отбираем нужное число уравнений. Решив эту систему, найдем все токи, а затем из соотношения $R_{общ} = \varphi_1/I_0$ найдем $R_{общ}$.

Общий метод расчета:

Уравнения для узлов имеют тот же вид:

$$I_0 - I_1 - I_3 = 0; I_2 + I_3 - I_5 = 0; \\ I_1 - I_2 - I_4 = 0; I_4 + I_5 - I_0 = 0.$$

Для работы по перемещению единичного положительного заряда из точки 1 в точку 4 имеем (рассматриваем перемещение заряда по пути 124, 134, 1234, 1324):

$$I_1 R_1 + I_4 R_4 = I_0 R_{общ}, \quad I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_5 R_5 = I_0 R_{общ}, \\ I_3 R_3 + I_5 R_5 = I_0 R_{общ}, \quad I_3 R_3 - I_2 R_2 + I_4 R_4 = I_0 R_{общ}, \\ U = I_0 R_{общ}.$$

Из полученной системы отбираем необходимое число уравнений и решаем их. С помощью одного из этих двух методов мы можем решать подобные задачи, если не выполняется соотношение:

$$\frac{R_1}{R_3} \neq \frac{R_4}{R_5}; \text{ т. е. если } \varphi_2 \neq \varphi_3.$$

2.5. Дана цепь, в которой $E_1 = 1\text{В}$, $E_2 = 3\text{В}$, $r_1 = 2\text{Ом}$, $r_2 = 3\text{ Ом}$, $R = 5\text{Ом}$. Найти I_1, I_2, I, U_{ab} (рис. 2.4).

Решение. Выбираем произвольно направления токов I_1, I_2, I . Составляем систему уравнений с помощью правил Кирхгофа:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Для контура } aE_1bRa: I_1r_1 + IR = E_1 \\ \text{Для контура } aE_2bRa: I_2r_2 + IR = -E_2 \\ \text{Для узла "b": } I_1 + I_2 - I = 0 \end{array} \right\}.$$

(1)

Подставляем числовые данные в систему уравнений (1).

$$\left. \begin{array}{l} 2I_1 + 5I = 1 \\ 3I_2 + 5I = -3 \\ I_1 + I_2 - I = 0 \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Решив систему, получим:

$$I_1 = \frac{23}{31} \text{ А}; I_2 = -\frac{26}{31} \text{ А}; I = -\frac{3}{31} \text{ А}.$$

Таким образом, токи I_2, I текут в направлении, противоположном указанному на схеме.

$$U_{ab} = IR = \frac{15}{31} \text{ В}.$$

$$\text{Ответ: } I_1 = \frac{23}{31} \text{ А}; I_2 = -\frac{26}{31} \text{ А}; I = -\frac{3}{31} \text{ А}, U_{ab} = \frac{15}{31} \text{ В}.$$

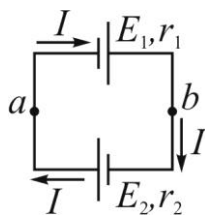


Рис. 2.5

2.6. Два гальванических элемента, имеющие ЭДС $E_1 = 1,5\text{В}$, $E_2 = 1,6\text{В}$ и внутренние сопротивления $r_1 = 0,60\text{Ом}$, $r_2 = 0,40\text{Ом}$, соединены разноименными полюсами (рис. 2.5). Пренебрегая сопротивлениями соединительных проводов, определить разность потенциалов на зажимах элементов (между точками «а» и «б»).

Решение. Оба участка (aE_1b и aE_2b) являются неоднородными участками цепи. Запишем для них закон Ома:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E_1}{r_1} \text{ — для верхней ветви;} \quad (1)$$

$$-I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - E_2}{r_2} \text{ — для нижней ветви.} \quad (2)$$

Вместо уравнения (2) можно воспользоваться законом Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2} \quad (3)$$

Исключив из любых двух уравнений (1), (2), (3) силу тока I , получим:

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{E_2r_1 - E_1r_2}{r_1 + r_2} = 0,4 \text{ В.} \quad (4)$$

2.7. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, зашунтированного сопротивлением R (рис. 2.6), если $E = 10\text{В}$, $r = 20\text{Ом}$, $R = 20\text{Ом}$.

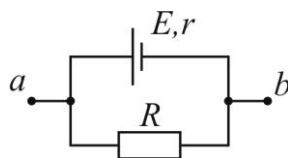


Рис. 2.6

Решение. Шунт можно рассматривать как источник, ЭДС которого равна нулю, а внутреннее сопротивление равно 2 Ом. Тогда имеем:

$$\frac{1}{r_{общ}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R}. \text{ Откуда } r_{общ} = 1 \text{ Ом.}$$

$$\frac{E_{общ}}{r_{общ}} = \frac{E}{r} + \frac{0}{R},$$

откуда $E_{общ} = 5 \text{ В}$.

Таким образом, зашунтированный источник можно рассматривать как источник с $E_{общ} = 5 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r_{общ} = 1 \text{ Ом}$.

Ответ: $E_{общ} = 5 \text{ В}$, $r_{общ} = 1 \text{ Ом}$.

2.8. Ток плотностью $j = 5 \text{ мА/см}^2$ протекает через электролитический раствор сульфата никеля (NiSO_4). За какое время отложится слой толщиной $h = 50 \text{ мкм}$ и какая мощность P нужна для того, чтобы в течении $t = 1 \text{ ч}$ покрыть никелем поверхность площадью $S = 1 \text{ мм}^2$ до указанной толщины, если напряжение $U = 7 \text{ В}$?

Решение.

а) $m = kIt$, $I = jS$.

Тогда: $m = kjSt$, отсюда $t = \frac{m}{kjS}$.

Но $m = \rho hS$, где ρ - плотность никеля.

Тогда: $t = \frac{\rho hS}{kjS} = \frac{\rho h}{kj}$, $t = 8,1 \text{ ч}$.

б) Мощность $P = IU$, $I = \frac{m}{kt} = \frac{\rho hS}{kt}$.

Получим: $P = \frac{\rho hSU}{kt}$ (8), $P = 2,8 \text{ Вт}$.

Ответ: $t = 8,1 \text{ ч}$, $P = 2,8 \text{ Вт}$.

2.9. К электродам разрядной трубки приложена разность потенциалов $U = 5 \text{ В}$, расстояние между ними $d = 10 \text{ см}$. Газ, находящийся в трубке, однократно ионизован и число пар ионов в 1 м^3 трубки равно $n = 10^8$, причём $b_+ = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, $b_- = 3 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$. Найти: 1) плотность тока в трубке. 2) какая часть полного тока переносится положительными ионами.

Решение. 1) Плотность тока найдём из закона Ома для газов:

$$j = nq(b_+ + b_-)E; \text{ где } E = \frac{U}{d}, q = e. \text{ Получим: } j = ne(b_+ + b_-)\frac{U}{d}.$$

2) Положительные ионы переносят часть полного тока:

$$\frac{I_+}{I} = \frac{j_+}{j} = \frac{neb_+ \cdot \frac{U}{d}}{ne(b_+ + b_-) \cdot \frac{U}{d}}; \frac{I_+}{I} = \frac{b_+}{b_+ + b_-};$$

Ответ: 1) $j = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ A/m}^2$; **2)** $\frac{I_+}{I} = 10^{-4}$.

2.10. Определить работу выхода электрона из металла, если плотность тока насыщения двухэлектродной лампы при температуре T_1 равна j_{H1} , а при температуре T_2 равна j_{H2} .

Решение: $j_{H1} = BT_1^2 e^{-\frac{A}{kT_1}}$; $j_{H2} = BT_2^2 e^{-\frac{A}{kT_2}}$;
(формула Ричардсона-Дешмана).

Берём отношение: $\frac{j_{H1}}{j_{H2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 e^{\frac{A}{k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}$;

Отсюда: $A = \frac{kT_1T_2 \cdot \ln\left(\frac{j_{H1}T_2^2}{j_{H2}T_1^2}\right)}{T_1 - T_2}$.

2.11. Термопара железо-константан и соединённый с ней последовательно гальванометр G подключены к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5\text{В}$ (рис. 2.7). Полное сопротивление потенциометра $R = 15\text{кОм}$. Холодный спай термопары находится в сосуде с тающим льдом ($T_1 = -273^\circ\text{К}$). Постоянная термопары $\alpha = 5,3 \cdot 10^{-5}\text{В/К}$. Определить температуру горячего спая термопары, если при сопротивлении $R_{AB} = 150 \text{ Ом}$ сила тока в цепи гальванометра I_G равна нулю. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Решение. Так как $I_G = 0$, то $\mathcal{E}_T = \Delta\varphi_{AB} = IR_{AB}$ $I = \frac{\mathcal{E}}{R_{AC}}$.

Имеем: $\frac{\mathcal{E}_T}{R_{AB}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{AC}}$,

но $\mathcal{E}_T = \alpha(T_2 - T_1)$.

Тогда $T_2 = \frac{\mathcal{E}R_{AB}}{R_{AC}\alpha} + T_1$.

Ответ: $T_2 = 556\text{К}$.

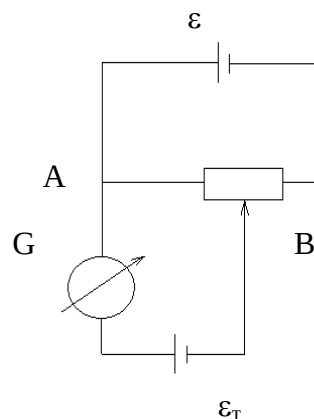


Рис.2.7.