

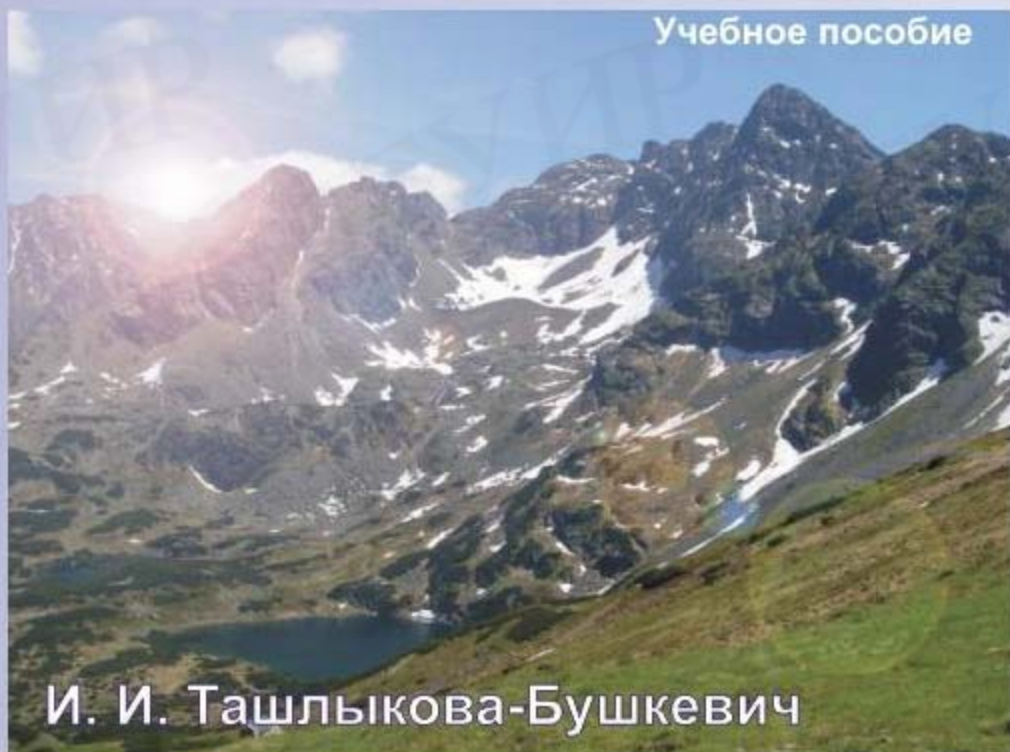
Физика

Механика.

Молекулярная физика
и термодинамика.

Электричество и магнетизм

Учебное пособие



И. И. Ташлыкова-Бушкевич

И. И. ТАШЛЫКОВА-БУШКЕВИЧ

ФИЗИКА

В 2-х частях

Часть 1

**МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов технических специальностей
учреждений, обеспечивающих получение высшего образования*

Минск БГУИР 2006

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3 я 73

Т 25

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра теоретической физики и астрономии Брестского государственного университета им. А. С. Пушкина (декан физического факультета,
д-р физ.-мат. наук, профессор В. А. Плетюхов),
профессор кафедры физики твердого тела БГУ,
д-р физ.-мат. наук, профессор В. Г. Шепелевич

Ташлыкова-Бушкевич, И. И.

Т 25 Физика : учебное пособие. В 2 ч. Ч. 1 : Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм / И. И. Ташлыкова-Бушкевич. – Минск : БГУИР, 2006. – 232 с. : ил.

ISBN 978-985-488-105-8 (ч. 1)

Основу учебного пособия составили лекции по физике, читаемые автором в Белорусском государственном университете информатики и радиоэлектроники. Пособие написано в соответствии с программой курса физики для технических специальностей вузов. Материал содержит результаты научных исследований, выполненных автором.

В ч. 1 рассмотрены нерелятивистская (ньютоновская) и релятивистская механика, включая колебательные и волновые процессы, а также молекулярная физика и термодинамика, электричество и магнетизм.

Предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений. Пособие может быть использовано студентами при самостоятельной работе над курсом, а также лекторами как основа для чтения данных разделов общего курса «Физика».

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3 я 73

ISBN 978-985-488-105-8 (ч. 1)

ISBN 978-985-488-104-1

© Ташлыкова-Бушкевич И. И., 2006

© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2006

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	8
ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	9
Обозначения и названия основных единиц физических величин	10
ВВЕДЕНИЕ	11
Раздел 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ	13
Тема 1. Физика как фундаментальная наука.....	13
1.1. Предмет физики. Важнейшие этапы развития физики.....	13
Тема 2. Элементы кинематики материальной точки и твердого тела	14
2.1. Материальная точка. Абсолютно твердое тело.....	14
2.2. Система отсчета. Векторные величины и операции с векторами. Кинематика точки. Путь. Перемещение.....	14
2.3. Скорость и ускорение. Вычисление пройденного пути	17
2.4. Тангенциальное и нормальное ускорения.....	19
2.5. Кинематика твердого тела.....	20
2.6. Вращение вокруг неподвижной оси	20
2.7. Угловая скорость и ускорение	21
2.8. Связь между угловыми и линейными скоростями и ускорениями.....	23
Тема 3. Элементы динамики	24
3.1. Границы применимости ньютоновской механики. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Масса и импульс. Силы внутренние и внешние	24
3.2. Второй закон Ньютона как уравнение движения	25
3.3. Третий закон Ньютона.....	26
3.4. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея.....	27
3.5. Закон всемирного тяготения. Масса инертная и гравитационная.....	28
3.6. Сила тяжести и вес.....	29
3.7. Упругие силы. Закон Гука. Сухое и жидкое трение	30
Тема 4. Законы сохранения.....	32
4.1. Замкнутая система. Сохраняющиеся величины. Связь законов сохранения со свойствами пространства и времени.....	32
4.2. Импульс силы	32
4.3. Закон сохранения импульса	33
4.4. Центр масс. Уравнение движения центра масс. Система центра масс.....	34
4.5. Работа	35
4.6. Кинетическая энергия частицы. Консервативные силы.....	36
4.7. Потенциальная энергия частицы в поле. Энергия упругой деформации. Связь между потенциальной энергией и силой поля	37
4.8. Полная механическая энергия частицы. Закон ее сохранения. Общефизический закон сохранения энергии	39
4.9. Гравитационное поле и его характеристика.....	42

4.10.	Примеры применения законов сохранения импульса и механической энергии	43
4.11.	Космические скорости.....	45
4.12.	Моменты импульса частицы относительно точки и оси. Момент силы. Пара сил	47
4.13.	Момент импульса системы. Закон сохранения момента импульса.....	50
Тема 5.	Механика твердого тела.....	52
5.1.	Момент импульса тела относительно неподвижной оси. Момент инерции. Теорема Штейнера	52
5.2.	Уравнение динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	54
5.3.	Кинетическая энергия вращающегося твердого тела (ось вращения неподвижна)	55
5.4.	Плоское движение твердого тела. Уравнение динамики плоского движения. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении	56
Тема 6.	Неинерциальные системы отсчета	58
6.1.	Уравнение движения в неинерциальных системах отсчета, движущихся поступательно	58
6.2.	Вращающиеся неинерциальные системы отсчета. Центробежная сила инерции и сила Кориолиса (без вывода).....	60
6.3.	Принцип эквивалентности	62
6.4.	Работа внешних сил при вращении твердого тела.....	62
6.5.	Гироскопы. Гироскопический эффект. Прецессия гироскопа	63
Тема 7.	Колебательные процессы.....	66
7.1.	Гармонические колебания.....	66
7.2.	Уравнение гармонических колебаний без трения. Его решение	68
7.3.	Гармонический осциллятор: пружинный, физический и математический маятник (малые колебания).....	69
7.4.	Энергия гармонических колебаний	72
7.5.	Уравнение затухающих колебаний и его решение. Коэффициент затухания	73
7.6.	Логарифмический декремент затухания	75
7.7.	Уравнение вынужденных колебаний и его решение. Векторная диаграмма	76
7.8.	Резонанс. Резонансная кривая. Параметрический резонанс.....	77
Тема 8.	Волновые процессы.....	80
8.1.	Распространение волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Гармонические плоская и сферическая волны. Длина волны. Скорость волны.....	80
8.2.	Уравнение плоской волны. Одномерное волновое уравнение. Волновое число.....	82

8.3. Энергия упругой волны. Поток и плотность потока энергии. Вектор Умова	85
Тема 9. Специальная теория относительности	87
9.1. Опыт Майкельсона–Морли	87
9.2. Преобразования Лоренца	89
9.3. Относительность понятия одновременности	91
9.4. Относительность длин и промежутков времени	93
9.5. Интервал между событиями. Его инвариантность	95
9.6. Причинность	97
9.7. Релятивистский закон преобразования скоростей	98
9.8. Релятивистский импульс	100
9.9. Взаимосвязь массы и энергии. Энергия покоя	102
ЛИТЕРАТУРА	104
Раздел 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА	105
Тема 10. Основные понятия статистической физики и термодинамики	105
10.1. Макроскопическая система. Статистический и термодинамический методы исследования	105
10.2. Физический смысл температуры	106
10.3. Уравнение состояния идеального газа	107
10.4. Средняя энергия молекулы. Уравнение молекулярно-кинетической теории для давления газа	110
10.5. Внутренняя энергия идеального газа	112
10.6. Закон равнораспределения энергии	113
10.7. Теплоемкость идеального газа	114
Тема 11. Начала термодинамики	115
11.1. Первое начало термодинамики	115
11.2. Вероятность и флуктуации. Смысл статистического описания: малость относительной флуктуации	119
11.3. Распределение Максвелла. Средняя, средняя квадратичная и наиболее вероятная скорости молекул	121
11.4. Распределение молекул во внешнем поле. Распределение Больцмана. Распределение Максвелла-Больцмана	123
11.5. Второе начало термодинамики. Обратимые и необратимые процессы	125
11.6. Энтропия. Закон возрастания энтропии. Макро- и микросостояния. Статистический смысл энтропии. Энтропия и необратимость	126
11.7. Цикл Карно	130
ЛИТЕРАТУРА	134
Раздел 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	135
Тема 12. Электростатическое поле в вакууме	135
12.1. Закон сохранения электрического заряда. Электрическое поле. Напряженность электрического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции. Расчет электрического поля	135

12.2.	Поток вектора $\vec{E}$. Теорема Гаусса и ее применение к расчету поля	139
12.3.	Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$. Потенциал. Потенциал поля точечного заряда	144
12.4.	Связь потенциала и напряженности поля. Потенциал поля системы зарядов.....	146
12.5.	Электрический диполь. Момент сил, действующий на диполь. Энергия диполя в поле	148
12.6.	Проводники в электрическом поле	150
12.7.	Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение заряда в проводнике	152
12.8.	Емкость уединенного проводника	153
12.9.	Взаимная емкость двух проводников. Конденсаторы	154
Тема 13.	Электростатическое поле в диэлектрике	156
13.1.	Связанные и сторонние заряды.....	156
13.2.	Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость. Диэлектрическая проницаемость.....	158
13.3.	Вектор $\vec{D}$ (электрическое смещение). Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$	160
13.4.	Поле в диэлектрике. Условия на границе двух диэлектриков.....	161
13.5.	Энергия электрического поля. Электрическая энергия системы зарядов. Энергия уединенного проводника. Энергия конденсатора. Плотность энергии.....	165
Тема 14.	Постоянный электрический ток	169
14.1.	Сила и плотность тока. Уравнение непрерывности.....	169
14.2.	Закон Ома для однородного проводника. Закон Ома в дифференциальной форме	171
14.3.	Сторонние силы	172
14.4.	Обобщенный закон Ома в дифференциальной форме. Закон Ома для неоднородного участка цепи	175
14.5.	Закон Джоуля–Ленца	177
Тема 15.	Магнитное поле в вакууме.....	179
15.1.	Магнитная индукция $\vec{B}$. Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Принцип суперпозиции полей	179
15.2.	Закон Био–Савара–Лапласа и его применение к расчету магнитного поля прямого и кругового токов	182
15.3.	Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$	184
15.4.	Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$, ее применение к расчету полей. Поле соленоида.....	185
15.5.	Сила Ампера	187
15.6.	Магнитный момент контура с током. Сила, действующая на контур с током. Работа при перемещении контура с током	189

Тема 16. Магнитное поле в веществе	192
16.1. Намагниченность. Токи намагничивания	192
16.2. Циркуляция намагниченности. Вектор $\dot{H}$ (напряженность магнитного поля)	193
16.3. Теорема о циркуляции вектора $\dot{H}$	194
Тема 17. Явление электромагнитной индукции	197
17.1. Опыты Фарадея. Правило Ленца	197
17.2. Закон электромагнитной индукции. Полный магнитный поток (потокосцепление). Токи Фуко	198
17.3. Явление самоиндукции. Индуктивность. ЭДС самоиндукции. Индуктивность соленоида	201
17.4. Ток при замыкании и размыкании цепи	202
17.5. Энергия контура с током. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля	204
Тема 18. Электромагнитные колебания	206
18.1. Квазистационарные токи. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления	206
18.2. Свободные затухающие электрические колебания	208
18.3. Вынужденные электрические колебания	210
Тема 19. Уравнения Максвелла	213
19.1. Вихревое электрическое поле. Электромагнитное поле. Ток смещения	213
19.2. Уравнения Максвелла. Относительность электрического и магнитного полей	215
Тема 20. Электромагнитные волны	218
20.1. Волновое уравнение для электромагнитной волны. Основные свойства электромагнитной волны: скорость, поперечность, связь между $\dot{E}$ и $\dot{H}$	218
20.2. Опыты Герца. Плотность энергии электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга. Опыт Лебедева	220
ЛИТЕРАТУРА	222
ПРИЛОЖЕНИЕ	223
1. Греческий алфавит	223
2. Некоторые физические константы	223
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	224

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе материала общего курса «Физика», читаемого автором студентам Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, изучающим курс физики в течение двух-трех семестров. Содержание пособия соответствует действующей программе курса физики для технических специальностей вузов.

Цель пособия – сформировать у студентов достаточно широкую теоретическую подготовку в области физики, необходимую для ориентации в потоке научной и технической информации и использования знаний по физике в технике; дать такой объем теоретического материала, который необходим для понимания сути рассматриваемых физических явлений, определив границы применимости принципов, законов и теорий, изложив при этом материал в наиболее компактной форме. Поэтому в работу включены оригинальные результаты научных исследований, выполненных автором в рамках проектов Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Учебное пособие издается в двух частях. В первой части рассмотрены нерелятивистская (ньютоновская) и релятивистская механика, включая колебательные и волновые процессы, а также молекулярная физика и термодинамика, электричество и магнетизм.

При подготовке пособия были поставлены следующие задачи:

- дать возможность студентам самостоятельно работать над курсом, в том числе при подготовке к практическим и лабораторным занятиям;

- позволить лектору дополнять материал, читаемый на лекциях, наглядными примерами, приложениями физических законов в разных областях науки и техники, а также решениями классических задач для объяснения и иллюстрации изучаемых теоретических положений;

- достичь максимально высокого качества представления сложно конспектируемых учебных материалов, например графиков, иллюстраций и схем.

Названия тем в настоящем пособии совпадают с названиями лекционных занятий. В оформлении материала используется выделение формулировок законов, принципов, формул и терминов с помощью подчеркивания, рамок и других типографских средств, что облегчает восприятие информации. В пособии большое число иллюстраций, одно из назначений которых – наглядное объяснение физических формул и моделей. Краткая и доступная форма изложения материала, в том числе физической сути изучаемых явлений, позволяет использовать пособие преподавателями технических вузов. Для дополнительного удобства пособие содержит подробный предметный указатель.

Автор благодарит декана физического факультета Брестского государственного университета им. А. С. Пушкина профессора В. А. Плетюхова, профессора кафедры физики твердого тела БГУ В. Г. Шепелевича, профессора кафедры физики и химии БГАТУ В. М. Добрянского, заведующего кафедрой физики факультета радиофизики и электроники БГУ профессора В. А. Саечникова и доцента кафедры физики БГУИР В. И. Мурзова за обсуждение рукописи настоящего пособия и сделанные замечания.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Векторы обозначены одной буквой со стрелкой (например $\vec{r}$, $\vec{u}$); та же буква без стрелки (r , u) означает модуль вектора.

Средние величины отмечены скобками $\langle \rangle$, например $\langle u \rangle$, или с использованием индекса cp , т.е. u_{cp} .

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $\vec{a} \times \vec{b}$, а также $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $\vec{a} \wedge \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Символы перед величинами означают:

Δ – конечное приращение величины, т.е. разность ее конечного и начального значений, например $\Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1}$;

- Δ – убыль величины, т.е. разность ее начального и конечного значений, например $-\Delta E_p = E_{p_1} - E_{p_2}$;

d – дифференциал (бесконечно малое приращение), например $d\vec{r}$;

d – элементарное значение величины, например элементарная работа dA ;

$=$ – равно;

$\equiv$ – тождественно равно;

$\approx$ – почти равно;

$\gg$ – приблизительно равно;

$\sim$ – пропорционально.

Орты – единичные векторы:

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовых координат;

$\vec{n}$ – орт нормали к элементу поверхности;

$\vec{t}$ – орт касательной к контуру или границе раздела.

Производная по времени от произвольной функции f обозначена df/dt или $\nabla f / \nabla t$, когда f – функция нескольких переменных, или точкой, стоящей над функцией, $\dot{f}$.

Производная n -го порядка от произвольной функции $f(x)$ обозначена $d^n f / dx^n$.

Математические символы:

$\lim$ – предел функции;

∞ – бесконечность;

$\mathbb{P}$ – следует;

$\rightarrow$ – стремится к ...;

$\perp$ – перпендикулярно;

$\parallel$ – параллельно;

$\uparrow\uparrow$ – параллельно и одинаково направлено;

$\uparrow\downarrow$ – параллельно и направлено в противоположные стороны;

$const$ – обозначение постоянства величины, например $\vec{E} = const$ – вектор $\vec{E}$ постоянен по модулю и по направлению, $A = const$ – величина A является постоянной;

$\angle(\vec{a}, \vec{b})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

inv – обозначение величины инвариантной, т.е. одинаковой для всех инерциальных систем отсчета;

$\sum_{i=1}^n \vec{a}_i$ или $\sum_i \vec{a}_i$ означает суммирование величины, стоящей справа от $\vec{a}_i$ по всем индексам от $i = 1$ до $i = n$ включительно;

$\int_a^b$ – определенный интеграл;

$\int$ – неопределенный интеграл, в зависимости от элемента интегрирования, например, dV – элемента объема, dS – элемента поверхности и dl – элемента контура, может быть записан соответственно как $\int_V$, $\int_S$ и $\int_L$;

$\oint$ или $\oint_L$, или $\oint_S$ – интегрирование соответственно по замкнутому контуру или по замкнутой поверхности.

Векторный оператор $\vec{\nabla}$ (набла). Операции с ним обозначены так:

$\vec{\nabla} E_p$ – градиент E_p ($grad E_p$),

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ – дивергенция $\vec{E}$ ($div \vec{E}$),

$\vec{\nabla} \times \vec{E}$ – ротор $\vec{E}$ ($rot \vec{E}$).

Оператор Лапласа Δ (лапласиан): $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Обозначения и названия основных единиц физических величин

А – ампер
В – вольт
Вб – вебер
Вт – ватт
г – грамм
Гн – генри
Гц – герц
Дж – джоуль

К – кельвин
кал – калория
Кл – кулон
м – метр
мин – минута
Н – ньютон
Ом – Ом
Па – паскаль

рад – радиан
с – секунда
См – сименс
Тл – тесла
Ф – фарад
ч – час
эВ – электронвольт

ВВЕДЕНИЕ

Физика образует фундамент основных направлений техники, таких как радиотехника, электроника, электротехника и энергетика, строительная техника, гидротехника, светотехника, значительная часть военной техники. Поэтому можно утверждать, что физика – это фундаментальная основа подготовки инженера. Взаимосвязь физики и техники очевидна. Например, без овладения физическими законами тяготения, конечно, ракеты и спутники не улетели бы в космос и человечество не получило бы многих новых данных об основах и принципах строения Вселенной. Без знаний закономерностей взаимодействия ускоренных ионов с полупроводниками нельзя было бы создать большинство полупроводниковых приборов, микросхем и целых компьютеров. Успехи в физике полупроводников совершили переворот в радиотехнике. С заменой радиоламп на полупроводниковые приборы, а затем на микросхемы и наноструктурные схемы повысилась надежность, снизилось потребление энергии.

В свою очередь конструирование полупроводниковых детекторов энергии частиц на базе ионно-имплантированных кристаллов позволило открыть новые физические законы и эффекты движения и рассеяния ускоренных частиц в кристаллах. Например, эффекты каналирования, теней позволили изучить в экспериментах пространственное распределение элементного состава, дефектов в ионно-облученных кристаллах, а также время жизни ядер и механизмы ядерных реакций. Это, в свою очередь, обеспечило создание соответствующих технологий в полупроводниковой промышленности.

Конечно, в современной физике остаются нерешенные проблемы, над которыми работают физики. Перечислим некоторые из них:

- в физике твердого тела – это решение проблемы сверхпроводимости при сравнительно высоких температурах; решаются задачи получения материалов с экстремальными свойствами в отношении механической прочности, теплостойкости, электрических, магнитных, оптических характеристик. Например, в результате сверхбыстрой закалки из расплава создаются микроструктуры, характеризующиеся измельчением зерен, уменьшением размера выделений вторых фаз, расширением границ растворимости в твердом состоянии и образованию метастабильных кристаллических фаз. Получаемые быстрозатвердевшие сплавы широко используются для микроэлектроники, в аэрокосмической и транспортной промышленности;
- в астрофизике – состояние материи при огромных плотностях и давлениях внутри нейтронных звезд и «черных дыр»;
- в физике плазмы работы идут над управляемым термоядерным синтезом; над объяснением ускорения заряженных частиц при вспышках сверхновых звезд, излучения пульсаров и др.;
- в квантовой электронике – над решением проблем нелинейной оптики при создании лазеров с перестраиваемой частотой излучения, с повышенной мощностью;
- в физике элементарных частиц – над созданием обобщенной теории.

Отметим, что подлинная революция в экспериментальных исследованиях различных областей физики (взаимодействия элементарных частиц, физики твердого тела, квантовой электроники, радиоастрономии) связана с применением ЭВМ для обработки информации, для моделирования физических процессов. Основное требование, предъявляемое к компьютерному моделированию, заключается в согласии получаемых результатов с реальным экспериментом и существующими теориями. Например, исследование элементарного и композиционного составов образцов ядерно-физическим методом резерфордского обратного рассеяния выполняют с использованием компьютерных моделирующих программ, таких как RUMP (РАМП), GISA (ГИЗА).

Программа курса физики способствует формированию у студентов научного мировоззрения, на основе которого складываются основные представления о современной физической картине мира. **Цель курса физики:** изучение основных понятий, законов, принципов и теорий классической и квантовой физики. Изучение основных физических явлений и процессов и их трактовка с точки зрения современных научных представлений. Формирование современного физического мышления и научного мировоззрения. Ознакомление с методами физических исследований.

Основные задачи курса физики:

- теоретически подготовить студентов в области физики, включая основы физики на современном уровне ее развития, чтобы они могли ориентироваться в потоке научной и технической информации и использовать знания по физике в технике;
- ознакомить с современной научной аппаратурой, сформировать навыки проведения физического эксперимента и решения конкретных задач из отдельных разделов физики. Сформировать умение оценивания степени достоверности результатов, полученных в экспериментальных или теоретических исследованиях.

РАЗДЕЛ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Тема 1. Физика как фундаментальная наука

1.1. Предмет физики. Важнейшие этапы развития физики

Физика – это наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства и законы движения окружающих нас объектов материального мира. **Материя** – это все, что окружает нас и что мы воспринимаем приборами или органами чувств. Понятия физики и ее законы лежат в основе всего естествознания. Слово «физика» произошло от греческого слова «*physis*» – природа. Ранее в античной культуре эта наука охватывала всю совокупность знаний о природных явлениях. По мере дифференциации знаний и методов исследований из нее выделились отдельные науки, в том числе физика в том виде, в котором мы ее используем и изучаем.

Физика – это точная экспериментальная наука. Процесс познания мира бесконечен. Наши знания на каждой ступени развития науки обусловлены исторически достигнутым уровнем познания и не могут считаться окончательными, полными. Они являются относительными знаниями, т.е. нуждаются в дальнейшем развитии, в дальнейшей проверке и уточнении. Вместе с тем всякая научная теория содержит элементы абсолютного, т.е. полного знания, означает ступень в познании объективного мира. Например, развитие науки установило пределы, в которых справедлива ньютоновская механика. В настоящее время ньютоновская механика является составной частью физической науки в целом.

Несколько слов о **взаимосвязи и взаимоотношениях физики с другими разделами естествознания**. Для всех наук естествознания (астрономии, биологии, химии и т.д.) общим научным языком является наука математика. Взаимопроникновение наук таково, что, например, сегодня самостоятельно развиваются и физическая химия (термин ввел Ломоносов в 1752 г.), и биофизика (1961 г.) – раздел науки, посвященный изучению физических и физико-химических явлений в биологических объектах. Физическая химия включает такие разделы, как квантовая химия, физико-химическая механика, электрохимия и т.д., объясняя химические явления и устанавливая их общие закономерности на основе принципов физики с использованием физических экспериментальных методов.

Физика подразделяется на ряд взаимосвязанных разделов. По изучаемым объектам выделяют физику твердых, жидких и газообразных тел, физику элементарных частиц и физических полей, физику ядра, физику атомов и молекул, физику плазмы. Другой критерий – изучаемые формы или процессы движения материи. Рассматривают механическое движение, тепловые процессы, электромагнитные явления, гравитационные, сильные и слабые взаимодействия. Выделяют механику материальных точек и твердых тел, механику сплошных сред, термодинамику, статистическую физику, электродинамику (включая оптику), теорию тяготения, квантовую механику и квантовую теорию поля.

Отметим, что наука механика зародилась в эпоху греко-римской культу-

ры около 5 в. до н.э. Однако первая фундаментальная физическая теория – классическая механика Ньютона – была создана лишь в 17 в. С появлением механики Ньютона было показано, что задача науки заключается в отыскании наиболее общих количественно формулируемых законов природы.

Тема 2. Элементы кинематики материальной точки и твердого тела

2.1. Материальная точка. Абсолютно твердое тело

Механика – это область физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

В нерелятивистской (ньютоновской) механике рассматривают механические движения макроскопических тел со скоростями, во много раз меньшими скорости света в вакууме. При этом выделяют следующие разделы:

1. **кинматику**, которая изучает движение тел, не рассматривая причины, вызывающие это движение;
2. **динамику**, которая изучает законы движения тел и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует следующие упрощенные физические модели:

а. **Материальная точка (частица)** – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Одно и то же тело в различных условиях или может считаться материальной точкой, или нет.

б. **Абсолютно твердое тело** – это тело, деформацией которого под действием приложенных сил в условиях данной задачи можно пренебречь. При этом расстояние между любыми двумя точками этого тела в процессе движения не меняется.

с. **Абсолютно упругое тело** – это тело, которое после прекращения внешнего силового воздействия полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

д. **Абсолютно неупругое тело** – это тело, полностью сохраняющее деформированное состояние после прекращения действия внешних сил.

2.2. Система отсчета. Векторные величины и операции с векторами.

Кинематика точки. Путь. Перемещение

Определим, что нужно знать для описания движения предметов в кинематике. Прежде всего любое измерение производится относительно какого-то тела отсчета, т.е. с задания положения точки в пространстве. **Телом отсчета** называется произвольно выбранное абсолютно твердое тело, относительно которого определяется положение остальных тел.

Система отсчета – это совокупность тела отсчета и системы пространственных координат, жестко связанной с телом отсчета и снабженной часами.

Геометрический вектор $\vec{a}$ – это направленный отрезок в пространстве. Длина вектора $\vec{a}$ называется его модулем и обозначается $|\vec{a}|$ или a .

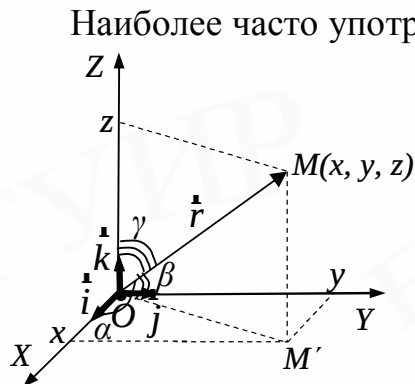


Рис. 2.1. Положение точки в декартовой системе координат

Наиболее часто употребляется декартова система координат, ортонормированный базис которой образован тремя единичными по модулю и взаимно ортогональными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, проведенными из начала координат, рис. 2.1. Положение произвольной точки M характеризуется **радиус-вектором** $\vec{r}$, соединяющим начало координат O с точкой M :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где $x = r \cos \alpha$, $y = r \cos \beta$, $z = r \cos \gamma$. Величины x, y, z называются **прямоугольными декартовыми координатами** вектора $\vec{r}$.

Кроме того в механике используются сферическая и цилиндрическая системы координат, а также другие криволинейные системы координат.

Скалярные величины характеризуются только численным значением (время, температура и т.д.).

Перечислим следующие операции с векторами:

1. **Сложение векторов:** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, при этом $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{c}|$.

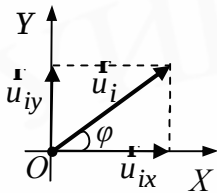


Рис. 2.2. Представление вектора $\vec{u}_i$ в декартовой системе координат

Рассмотрим **аналитический** метод сложения векторов, например скорости $\vec{u}_i$ ($i = 1, 2$), рис. 2.2. Как известно, векторы, лежащие в плоскости, можно разложить на **составляющие** (компоненты). Поэтому в прямоугольной декартовой системе координат в плоскости каждый вектор можно однозначно представить в виде

$$\vec{u}_i = u_{ix}\vec{i} + u_{iy}\vec{j},$$

где $\vec{u}_{ix} = u_{ix}\vec{i}$; $\vec{u}_{iy} = u_{iy}\vec{j}$; проекции на оси X и Y определяются соответственно как $u_{ix} = u_i \cos j$, $u_{iy} = u_i \sin j$; угол φ – угол, который составляет вектор $\vec{u}_i$ с осью X . При этом $|\vec{u}_i| = u_i = \sqrt{u_{ix}^2 + u_{iy}^2}$, $\tan j = \frac{u_{iy}}{u_{ix}}$.

Тогда при сложении векторов скорости получаем

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (\vec{u}_{1x} + \vec{u}_{2x}) + (\vec{u}_{1y} + \vec{u}_{2y}) = (u_{1x} + u_{2x})\vec{i} + (u_{1y} + u_{2y})\vec{j}.$$

Аналогично определяется сложение векторов в случае трехмерного пространства.

2. **Скалярное произведение** двух векторов есть число, равное

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Скалярное произведение обозначается также символами $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, имеющий длину, равную произведению длин этих векторов на синус угла между ними $c = ab \sin \alpha$, и направленный перпендикулярно к $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как показано на рис. 2.3, в соответствии с **правилом правой руки**: правую руку направляют вдоль первоначального вектора $\vec{a}$ таким образом, чтобы, сгибая пальцы, можно было направить их вдоль вектора $\vec{b}$. Большой палец правой руки будет показывать направление вектора $\vec{c}$.

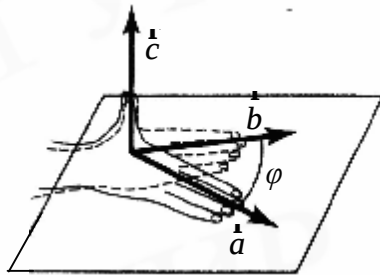


Рис. 2.3. Направление вектора $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

Обозначение: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$. В декартовой системе координат

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

Кинематический закон движения – это функция, выражающая положение точки в любой момент времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) является векторной формой закона. Движение материальной точки полностью определено, если координаты материальной точки заданы в зависимости от времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (2.2)$$

Эти уравнения (2.2) называются **кинематическими уравнениями движения** материальной точки. Они эквивалентны векторному уравнению (2.1).

Траектория – это кривая, которую описывает радиус-вектор $\vec{r}(t)$ координат материальной точки (или тела) с течением времени, рис. 2.4.

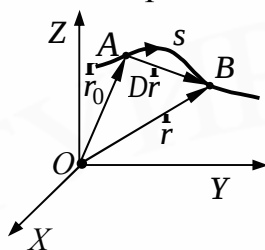


Рис. 2.4. Траектория частицы. В начальный момент времени частица находится в точке A, положение которой определяется радиус-вектором $\vec{r}_0$

Длиной пути s точки называется длина участка траектории, пройденного этой точкой за рассматриваемый промежуток времени, рис 2.4. Длина пути – это скалярная функция времени.

Вектор перемещения $D\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ – это вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиус-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), см. рис. 2.4:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0).$$

В пределе $Dt \rightarrow 0$ модуль элементарного перемещения равен элементарному пути: $|d\vec{r}| = ds$.

Для установления количественных соотношений между физическими величинами их необходимо сравнивать с соответствующими эталонами.

Международная система единиц, обозначаемая символом СИ (SI), – это универсальная система единиц физических величин, охватывающая все отрасли науки и техники. Поэтому в дальнейшем при выполнении расчетов значения величин будем выражать в единицах СИ. Основные единицы СИ: длина пути измеряется в метрах (м), масса – в килограммах (кг), время – в секундах (с) и т.д.

2.3. Скорость и ускорение. Вычисление пройденного пути

В физике важнейшей кинематической характеристикой движения является скорость. **Скорость** – это векторная физическая величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Вектором средней скорости за интервал времени Δt называется отношение приращения $\Delta \vec{r}$ радиус-вектора точки к промежутку времени Δt :

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta \vec{r}$.

Мгновенная скорость материальной точки – это средняя скорость за бесконечно малый интервал времени, определяемая как векторная величина, равная первой производной по времени от радиус-вектора $\vec{r}$ рассматриваемой точки:

$$\vec{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (2.4)$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения. Модуль мгновенной скорости (скалярная величина) равен первой производной пути по времени

$$u = |\vec{u}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| \times \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad (2.5)$$

где s – путь, пройденный вдоль траектории.

Единица скорости в СИ – метр в секунду (м/с).

Проекции скорости v_x , v_y и v_z на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным по времени от соответствующих координат движущейся точки:

$$u_x = \dot{x}, \quad u_y = \dot{y}, \quad u_z = \dot{z},$$

поскольку векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ не изменяются по времени. Модуль вектора скорости определяется как

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

При **неравномерном движении** модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. Поэтому вводят следующую скалярную величину.

Средняя скорость неравномерного движения (средняя путевая скорость) – это пройденное телом расстояние s , деленное на время, затраченное на прохождение этого расстояния:

$$u_{cp} = \langle u \rangle = \frac{s}{t}. \quad (2.5a)$$

Длина пути s , пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 , задается интегралом, как следует из уравнения (2.5):

$$ds = u dt \quad \text{и} \quad \text{поэтому} \quad s = \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt. \quad (2.6)$$

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения точки. Если траектория точки лежит в одной плоскости, т.е. плоская кривая, то движение точки называют плоским.

Движение точки называется **равномерным**, если точка в любые равные промежутки времени проходит равные расстояния. При этом модуль скорости точки не изменяется с течением времени: $u_{cp} = u$. Длина пути, пройденного равномерно движущейся точкой, является линейной функцией времени:

$$s = u \int_{t_1}^{t_2} dt = u(t_2 - t_1). \quad (2.7)$$

Если модуль скорости увеличивается с течением времени, то движение называется ускоренным, если же он убывает с течением времени, то движение называется замедленным.

Ускорение – это векторная физическая величина, характеризующая изменение скорости движущейся точки $\dot{\mathbf{u}}$.

Мгновенное ускорение материальной точки – это векторная величина, определяемая как изменение скорости в единицу времени:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \dot{\mathbf{u}}}{\Delta t} = \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.8)$$

Следовательно, мгновенное ускорение точки – векторная величина, равная второй производной по времени от ее радиус-вектора:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.9)$$

Единица ускорения в СИ – метр на секунду в квадрате (м/с^2).

Используя формулы (2.8) и (2.9), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \mathbf{k} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \mathbf{k} = \\ &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где a_x , a_y и a_z – проекции вектора ускорения на координатные оси X , Y и Z соответственно. Модуль вектора ускорения будет равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.11)$$

Поскольку $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, то можно записать, что $d\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}(t) dt$. Тогда **кинематический закон изменения скорости** будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{r}} = \int \mathbf{a}(t) dt. \quad (2.12)$$

Следовательно, проекции вектора скорости v_x , v_y и v_z определяются как

$$v_x = \int a_x(t) dt, \quad v_y = \int a_y(t) dt, \quad v_z = \int a_z(t) dt.$$

2.4. Тангенциальное и нормальное ускорения

Рассмотрим общий случай плоского криволинейного движения – ситуацию, когда материальная точка движется по произвольной траектории в плоскости. Траекторию можно разбить на такие отрезки, что каждый отрезок траектории будет совпадать с дугой окружности с центром в некоторой точке O . Эту точку называют **центром кривизны** траектории (рис. 2.5), а радиус R соответствующей окружности – **радиусом кривизны траектории** в той же точке ($R = AO$, см. рис. 2.5). Например, для окружности радиус кривизны R постоянен. Для прямой линии $R = \infty$. Для прочих кривых значения радиуса кривизны меняются от точки к точке.

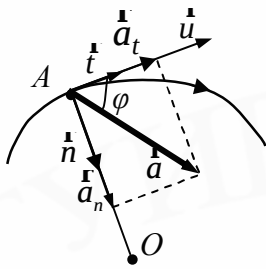


Рис. 2.5. Компоненты вектора ускорения $\dot{\mathbf{a}}$ при движении частицы по произвольной траектории

Вектор ускорения $\dot{\mathbf{a}}$ принято раскладывать на две составляющие – касательную $\dot{\mathbf{a}}_t$ (вдоль вектора скорости $\dot{\mathbf{u}}$ по касательной к траектории) и нормальную $\dot{\mathbf{a}}_n$ (в перпендикулярном направлении), см. рис. 2.5:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_t + \dot{\mathbf{a}}_n, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \quad (2.13)$$

где $\dot{\mathbf{a}}_t = a_t \dot{\mathbf{t}}$; $\dot{\mathbf{a}}_n = a_n \dot{\mathbf{n}}$; a_t – **тангенциальное ускорение**; a_n – **нормальное (центростремительное) ускорение**. При этом $a_t = a \cos j$, $a_n = a \sin j$, $\operatorname{tg} j = a_n / a_t$, см. рис. 2.5. Единичный **вектор касательной** $\dot{\mathbf{t}}$ направлен по касательной к траектории в точке A в сторону движения точки, единичный **вектор главной нормали** $\dot{\mathbf{n}}$ к траектории в точке A направлен к центру кривизны. Орты $\dot{\mathbf{t}}$ и $\dot{\mathbf{n}}$ всегда перпендикулярны друг другу.

Тангенциальное $\dot{\mathbf{a}}_t$ и нормальное $\dot{\mathbf{a}}_n$ ускорения характеризуют соответственно изменение скорости по величине (по модулю) и изменение направления вектора скорости точки:

$$a_t = \frac{du}{dt}, \quad a_n = \frac{u^2}{R}. \quad (2.13a)$$

Движение точки называется **равнопеременным**, если при этом движении тангенциальное ускорение a_t точки постоянно. В случае равноускоренного движения $a_t = \operatorname{const} > 0$. При равнозамедленном движении $a_t = \operatorname{const} < 0$.

Рассмотрим следующие частные виды движения:

- 1) прямолинейное равномерное движение $a = 0$: $a_t = 0$, $a_n = 0$;
- 2) равномерное движение по окружности, когда величина модуля скорости сохраняется в любой момент времени: $a_t = 0$, $a_n = a = \operatorname{const} = u^2 / R$;
- 3) прямолинейное равнопеременное движение, $R = \infty$. В этом случае $\dot{\mathbf{r}}_t = \dot{\mathbf{r}} = \operatorname{const}$, $\dot{\mathbf{r}}_n = \dot{\mathbf{0}}$.

2.5. Кинематика твердого тела

Различают пять видов движения твердого тела: 1) поступательное; 2) вращение вокруг неподвижной оси; 3) плоское движение; 4) движение вокруг неподвижной точки и 5) свободное движение. Первые два вида являются основными движениями твердого тела.

Поступательное движение – это такое движение, при котором любой выделенный в теле отрезок остается параллельным самому себе.

Число степеней свободы твердого тела i – это число независимых координат, однозначно определяющих положение твердого тела в пространстве.

Рассмотрим поступательное движение произвольного тела, рис. 2.6. Очевидно, что число степеней свободы тела в данном случае равно трем, так как достаточно описать движение какой-нибудь одной точки тела, например точки A в декартовой системе координат. Траектории всех остальных точек (например точки B) могут быть получены путем «параллельного» переноса.

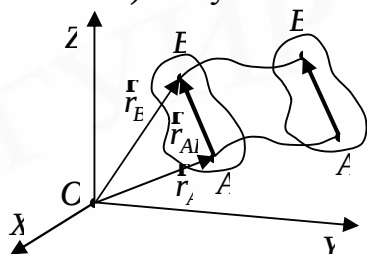


Рис. 2.6. Пример поступательного движения произвольного твердого тела

Допустим, $\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_A(t)$ – закон движения точки A .

Тогда закон движения точки B будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{AB},$$

где $\dot{\mathbf{r}}_{AB}$ – вектор, проведенный от точки A к точке B , постоянный по величине (*абсолютно твердое тело*) и направлению (*поступательное движение*).

При поступательном движении все точки твердого тела совершают за один и тот же промежуток времени равные перемещения. Поэтому скорости и ускорения всех точек тела в данный момент времени одинаковы

$$\mathbf{u}_A = \frac{d\dot{\mathbf{r}}_A}{dt} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}_B}{dt} = \mathbf{u}_B, \quad \mathbf{a}_A = \frac{d\dot{\mathbf{u}}_A}{dt} = \frac{d\dot{\mathbf{u}}_B}{dt} = \mathbf{a}_B.$$

Поступательное движение твердого тела может быть полностью описано, если известны зависимость от времени радиус-вектора $\dot{\mathbf{r}}(t)$ движения любой точки этого тела и его положение в начальный момент времени.

2.6. Вращение вокруг неподвижной оси

Прямая, проведенная через две неподвижные точки вращающегося твердого тела, является неподвижной *осью вращения*.



Рис. 2.7. Схема, иллюстрирующая движение кабинок на колесе обозрения

При **вращении вокруг неподвижной (закрепленной) оси**: 1) все точки тела двигаются по соосным окружностям, которые лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, центры окружностей лежат на оси вращения; 2) линейные скорости точек, находящихся на разном рас-

стоянии от оси вращения, разные. Очевидно, что в этом случае тело обладает лишь одной степенью свободы, поскольку положение тела однозначно определяется углом его поворота вокруг оси. Например, если закрепить кабинки на колесе обозрения, то они будут совершать вращательное движение, рис. 2.7.

При описании вращательного движения удобно пользоваться полярными координатами R и φ , где R – радиус – расстояние от оси до точки, а φ – полярный угол (угол поворота). Элементарные повороты тела обозначаются как $Dj^{\dagger}$ или $dj^{\dagger}$ (их можно рассматривать как псевдовекторы).

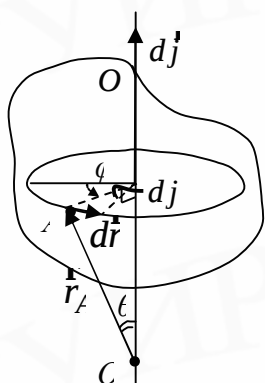


Рис. 2.8. Схема, связывающая характеристики вращательного движения

Вектор $dj^{\dagger}$ элементарного поворота тела – это векторная величина, модуль которой равен углу поворота, а направление согласно **правилу буравчика** совпадает с направлением поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается вместе с телом, рис. 2.8.

Итак, пусть твердое тело, вращаясь вокруг неподвижной в данной системе отсчета оси OO' , совершило за время dt бесконечно малый поворот $dj^{\dagger}$, рис. 2.8. Тогда элементарное перемещение dr^r любой точки A твердого тела при таком повороте будет равно

$$|dr^r| = r_A \sin \varphi dj^{\dagger} \quad (2.14)$$

или в векторном виде

$$dr^r = [dj^{\dagger}, r_A^r], \quad (2.14a)$$

где $r_A^r(t)$ проведен из некоторой точки O на оси вращения.

2.7. Угловые скорость и ускорение

Введем определения векторов угловой скорости и углового ускорения. **Вектор угловой скорости $\dot{w}$** характеризует быстроту изменения угла поворота и определяется как

$$\dot{w} = \frac{dj^{\dagger}}{dt}, \quad (2.15)$$

где dt – промежуток времени, за которое тело совершает поворот $dj^{\dagger}$; $w = |\dot{w}|$.

Аксиальные векторы – это векторы, направление которых связывают с направлением вращения. Начало вектора $\dot{w}$ можно совместить с любой точкой, принадлежащей оси вращения. Вектор $\dot{w}$ совпадает с направлением вектора $dj^{\dagger}$ и является аксиальным вектором.

Изменение вектора $\dot{w}$ со временем характеризуют **вектором углового ускорения $\dot{b}$** :

$$\dot{b} = \frac{d\dot{w}}{dt} = \dot{w} = \frac{d^2j^{\dagger}}{dt^2}. \quad (2.16)$$

Направление вектора $\dot{b}$ совпадает с направлением $d\dot{w}$ – приращения

вектора $\dot{\omega}$. Вектор $\dot{b}$, как и $\dot{\omega}$, является аксиальным. Вектор углового ускорения направлен в ту же сторону, что и $\dot{\omega}$, если вращение ускоренное, и противоположную $\dot{\omega}$, если вращение замедленное.

Единица угловой скорости в СИ – радиан на секунду (рад/с), **единица** углового ускорения в СИ – радиан на секунду в квадрате (рад/с²). Угол поворота φ в СИ задается в радианах.

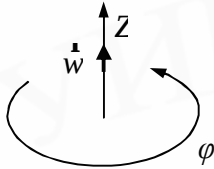


Рис. 2.9. К определению проекции вектора углового ускорения на ось Z

Запишем выражения для угловой скорости и углового ускорения в проекциях на ось вращения Z, положительное направление которой свяжем с положительным направлением отсчета координаты φ – угла поворота – правилом правого винта, рис. 2.9. Тогда проекции векторов ω_z и β_z на ось Z определяются формулами

$$\omega_z = \frac{dj}{dt}, \quad \beta_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (2.17)$$

Здесь ω_z и β_z – величины алгебраические. Их знак характеризует направление соответствующего вектора $\dot{\omega}$ и $\dot{b}$. Например, если $\omega_z > 0$, то направление вектора $\dot{\omega}$ совпадает с положительным направлением оси Z; если же $\omega_z < 0$, то направление вектора $\dot{\omega}$ противоположно.

Таким образом, можно определить зависимость $j(t)$ – **кинематический закон вращения тела** – по формулам (2.17), зная ускорение $\dot{b}(t)$ как функцию времени. Так как $d\omega_z = \beta_z(t)dt$ и $dj = \omega_z(t)dt$, то, интегрируя, получим

$$\omega_z(t) = \int \beta_z(t)dt \quad \text{и} \quad j(t) = \int \omega_z(t)dt. \quad (2.18)$$

Когда известны начальные условия в момент времени $t_0 = 0$ ($\omega_z(t_0 = 0) = \omega_0$ и $j(t_0 = 0) = j_0$), из формул (2.18) следует, что

$$\omega_z(t) = \omega_0 + \int_0^t \beta_z(t)dt, \quad j(t) = j_0 + \int_0^t \omega_z(t)dt. \quad (2.19)$$

Например, при равноускоренном вращательном движении ($b = \text{const}$) из формул (2.18), когда известны начальные условия, получаем

$$\omega = \omega_0 + b t, \quad j = j_0 + \omega_0 t + \frac{b t^2}{2}.$$

Отметим, что равномерное вращение можно характеризовать **периодом вращения** T – временем, за которое точка совершает один полный оборот:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота вращения – число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности в единицу времени:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Единица частоты вращения в СИ – герц (Гц).

2.8. Связь между угловыми и линейными скоростями и ускорениями

Найдем линейную скорость $\dot{\mathbf{u}}$ произвольной точки A твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OO' с угловой скоростью $\dot{\mathbf{w}}$. Пусть положение точки A относительно некоторой точки O оси вращения характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}$, рис. 2.10. Воспользуемся формулой (2.14), поделив ее на соответствующий промежуток времени dt . Так как $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{u}}$ и $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \dot{\mathbf{w}}$, то

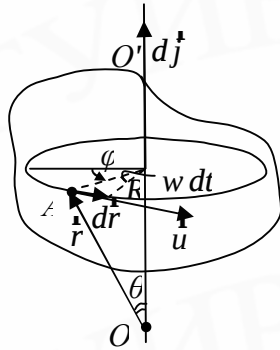


Рис. 2.10. К выводу связи кинематических величин поступательного и вращательного движения

$$\dot{\mathbf{u}} = \left[\frac{d\mathbf{j}}{dt}, \mathbf{r} \right] = [\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{r}], \quad (2.20)$$

т.е. **линейная скорость** $\dot{\mathbf{u}}$ точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению угловой скорости $\dot{\mathbf{w}}$ на радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки, см. рис. 2.10. Модуль вектора (2.20) равен $u = w r \sin q$ или

$$u = w R,$$

где $R = r \sin q$ – радиус окружности, по которой движется точка A , см. рис. 2.10. Направление вектора $\dot{\mathbf{u}}$ совпадает с направлением поступательного движения буравчика (*правило правого винта*) при его вращении от $\dot{\mathbf{w}}$ к $\mathbf{r}$.

Продифференцируем уравнение (2.20) по времени и найдем полное ускорение точки A :

$$\dot{\mathbf{a}} = \left[\frac{d\dot{\mathbf{w}}}{dt}, \mathbf{r} \right] + [\dot{\mathbf{w}}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}] = [\dot{\mathbf{b}}, \mathbf{r}] + [\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{u}] = [\dot{\mathbf{b}}, \mathbf{r}] + [\dot{\mathbf{w}}, [\dot{\mathbf{w}}, \mathbf{r}]]. \quad (2.21)$$

При равноускоренном вращательном движении ($\dot{\mathbf{b}} = \text{const}$) можно показать, что модуль полного ускорения точки A есть величина

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

где все векторы $\dot{\mathbf{a}}$, $\dot{\mathbf{a}}_t$ и $\dot{\mathbf{a}}_n$ лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения. В этом случае справедливы формулы

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{u^2}{R} = \frac{w^2 R^2}{R} = w^2 R, & a_t &= \frac{du}{dt} = \frac{d(wR)}{dt} = R \frac{dw}{dt} = Rb, \\ s &= \int_{t_1}^{t_2} u dt = \int_{t_1}^{t_2} w R dt = R \int_{t_1}^{t_2} \frac{dj}{dt} dt = Rj, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где s – длина пути, пройденного точкой по дуге окружности радиуса R ; j – угол поворота за промежуток времени $(t_2 - t_1)$.

Тема 3. Элементы динамики

3.1. Границы применимости ньютоновской механики. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета. Масса и импульс. Силы внутренние и внешние

В основе ньютоновской механики, господствовавшей в XVII–XIX вв., лежат три закона динамики, сформулированные И. Ньютоном в 1687 г. Они возникли в результате обобщения большого количества опытных фактов. Законы Ньютона являются основными законами механики и позволяют решить любую механическую задачу. Из них могут быть выведены и все остальные законы механики. Механика Ньютона рассматривает пространство и время как объективные формы существования материи, но в отрыве друг от друга и от движения материальных тел, что соответствовало уровню знаний того времени.

Первый закон Ньютона (закон инерции):

существуют такие системы отсчета, называемые **инерциальными**, относительно которых любая материальная точка (тело) или покоится, или движется равномерно и прямолинейно, если равнодействующая внешних сил, приложенных к ней, равна нулю (или на нее не действуют никакие силы).

Свойство тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**.

Любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, является также инерциальной.

Первый закон Ньютона выполняется в инерциальных системах отсчета и постулирует их существование. Пример инерциальной системы отсчета – это **гелиоцентрическая** (звездная) **система отсчета** с центром на Солнце и осями, проведенными в направлении определенных («неподвижных») звезд.

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Для описания инертных свойств тел вводится понятие массы.

В инерциальных системах отсчета **сила** $\vec{F}$ – это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет форму и размеры.

Каждый вид сил задается силовым законом. Если каждой точке пространства задается определенное значение физической величины, то в этой области пространства задано **физическое поле** данной физической величины. Таким образом, если эта величина векторная (например гравитационная сила $\vec{F}$), то поле является векторным, а если скалярная (например температура T) – скалярным.

Сила $\vec{F}$ полностью задана, если указаны ее модуль, направление в пространстве и точка приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется **линией действия силы**.

Механической системой называется совокупность материальных точек

(тел), рассматриваемых как единое целое.

Тела, не входящие в состав исследуемой механической системы, называются **внешними телами**. Силы, действующие на систему со стороны внешних тел, называются **внешними силами**. **Внутренними силами** называются силы взаимодействия между частями рассматриваемой системы. Разделение сил на внутренние и внешние условно и определяется выбором системы частиц.

Неизменяющееся с течением времени поле, действующее на материальную точку с силой $\vec{F}$, называется **стационарным полем**.

Единица силы в СИ – Ньютон (Н): $1\text{Н} = 1\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$.

Масса – это физическая величина, являющаяся мерой инертности материальной точки или мерой инертности тела при поступательном движении.

Взяв некоторое тело за эталон массы, можно сравнить массу любого тела с этим эталоном. Сравнение масс двух тел, на которые действует одна и та же сила, сводится к сравнению ускорений этих тел:

$$m_1/m_2 = a_2/a_1.$$

Единица массы в СИ – килограмм (кг).

В рамках ньютоновской механики масса тела служит мерой содержащегося в теле вещества и выполняются законы сохранения и аддитивности массы: масса изолированной системы тел (см. подтему 4.1) не изменяется со временем и равна сумме масс тел, составляющих систему.

Плотностью вещества ρ в данной точке M тела называется отношение массы dm малого элемента тела, включающего точку M , к величине dV объема этого элемента:

$$\rho = \frac{dm}{dV}.$$

Единица плотности в СИ – килограмм на кубический метр ($\text{кг}/\text{м}^3$).

Векторная величина $\vec{p}$, равная произведению массы m материальной точки на ее скорость $\vec{u}$ и совпадающая по направлению со скоростью, называется **импульсом (количеством движения)** этой материальной точки:

$$\vec{p} = m\vec{u}. \quad (3.1)$$

Единица импульса в СИ – килограмм-метр в секунду ($\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$).

Импульс – величина аддитивная. Импульс системы, состоящей из n материальных точек, равен векторной сумме импульсов $\vec{p}_i$ всех точек системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{u}_i. \quad (3.2)$$

3.2. Второй закон Ньютона как уравнение движения

В инерциальных системах справедлив **второй закон Ньютона**: ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела):

$$\mathbf{\dot{r}} = \frac{\mathbf{\dot{F}}}{m}. \quad (3.3)$$

Более общая формулировка второго закона Ньютона – **основной закон динамики материальной точки**:

скорость изменения импульса материальной точки равна действующей силе (и по модулю, и по направлению)

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}}. \quad (3.4)$$

Действительно, из формул (3.1) и (3.3) следует, что

$$m\mathbf{\dot{a}} = m \frac{d\mathbf{\dot{u}}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{\dot{u}})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Уравнение

$$\boxed{m\mathbf{\dot{a}} = \mathbf{F}} \quad (3.5)$$

называют **уравнением движения** материальной точки. Используя уравнение движения (3.5), можно показать, что 1 Н – это сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с² в направлении действия силы.

О сложении сил. Одновременное действие на материальную точку нескольких сил $\mathbf{\dot{F}}_1, \mathbf{\dot{F}}_2 \dots$ эквивалентно действию одной силы, называемой **равнодействующей (резльтирующей)** силой и равной их геометрической сумме:

$$\mathbf{\dot{F}} = \mathbf{\dot{F}}_1 + \mathbf{\dot{F}}_2 + \dots, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{\dot{F}}_i$ – сила, с которой действовало бы на данную материальную точку i -е тело в отсутствие других тел. Данное утверждение (3.6) является обобщением опытных фактов.

3.3. Третий закон Ньютона

Общее свойство всех сил взаимодействия постулировано в **третьем законе Ньютона**:

силы взаимодействия двух материальных точек в инерциальной системе отсчета всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\boxed{\mathbf{\dot{F}}_{ik} = -\mathbf{\dot{F}}_{ki}}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{\dot{F}}_{ik}$ – сила, действующая на i -ю точку со стороны k -й точки; $\mathbf{\dot{F}}_{ki}$ – сила, действующая на k -ю точку со стороны i -й точки. Эти силы всегда приложены к разным материальным точкам (телам), всегда действуют парами и являются силами одной природы.

Третий закон Ньютона выполняется в любой момент времени согласно **принципу дальнего действия**, постулируемому в ньютоновской механике:

взаимодействие между телами распространяется в пространстве с бесконечно большой скоростью.

В действительности существует конечная максимальная скорость распространения взаимодействий, которая равна скорости света в вакууме. Однако

при скоростях тел, значительно меньших скорости света, и второй и третий законы Ньютона выполняются с большой точностью. Например, расчеты траекторий планет и искусственных спутников проводятся с «астрономической» точностью с помощью законов Ньютона.

Используя закон (3.7), можно получить, что

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0,$$

тем самым подтверждая справедливость закона сохранения импульса в инерциальных системах отсчета.

Парность взаимодействия. Сила, с которой взаимодействуют два тела (материальные точки), зависит только от их относительного положения и относительной скорости движения.

3.4. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея

Важной особенностью инерциальных систем отсчета является то, что по отношению к ним пространство однородно и изотропно (физические свойства пространства одинаковы в различных точках и в каждой точке одинаковы во всех направлениях), а время однородно (протекание физических явлений в одних и тех же условиях в разное время их наблюдения одинаково).

Принцип относительности Галилея:

все механические явления в разных инерциальных системах отсчета будут протекать одинаково.

Таким образом, если в различных инерциальных системах отсчета проводить один и тот же механический эксперимент при одинаковых начальных условиях, то результат будет один и тот же.

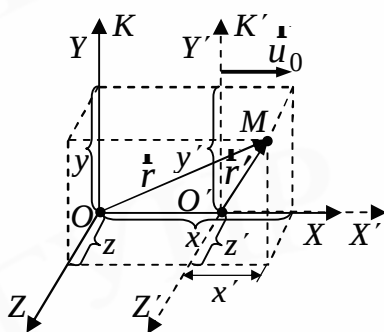


Рис. 3.1. К выводу преобразований Галилея

Найдем формулы преобразования координат при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета. Пусть первая система отсчета K (с координатными осями X, Y, Z) условно неподвижна, а система отсчета K' (с координатными осями X', Y', Z') – движется относительно первой равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{u}_0$ ($\vec{u}_0 = \text{const}$), рис. 3.1. Выберем оси координат системы K' параллельно соответствующим осям системы K так, чтобы оси X и X' совпадали между собой и были направлены вдоль вектора $\vec{u}_0$.

Пусть радиус-вектор произвольной точки M в неподвижной системе будет $\vec{r}$, а в подвижной – $\vec{r}'$. Соответственно измеряемое время в системах K и K' обозначим t и t' .

Согласно ньютоновской механике ход времени инвариантен в обеих системах отсчета, т.е. промежутки времени между двумя событиями, измеренными по часам систем отсчета K и K' , одинаковы: $\Delta t = \Delta t'$.

Возьмем за начало отсчета времени момент, когда начала координат O и O' совпадали ($t_0 = t_0^{\text{л}}$). Тогда в произвольный момент времени отрезок $OO' = u_0 t$ и можно записать:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{u}}_0 t, \quad (3.8)$$

$$t = t^{\text{л}}. \quad (3.8a)$$

Соотношения (3.8) и (3.8a) называются **преобразованиями Галилея**.

В координатах эти преобразования имеют вид

$$\boxed{x = x^{\text{л}} + u_0 t, \quad y = y^{\text{л}}, \quad z = z^{\text{л}}, \quad t = t^{\text{л}}.} \quad (3.9)$$

Продифференцируем преобразования (3.8) по времени и получим **классический закон преобразования скорости** точки при переходе от одной инерциальной системы к другой:

$$\boxed{\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}' + \dot{\mathbf{u}}_0,} \quad (3.10)$$

где $\dot{\mathbf{u}}$ – абсолютная скорость, т.е. скорость тела в условно неподвижной системе отсчета; $\dot{\mathbf{u}}'$ – относительная скорость, т.е. скорость тела в движущейся системе отсчета; $\dot{\mathbf{u}}_0$ – скорость самой подвижной системы.

Поэтому вектор скорости, кинетическая энергия и импульс точки не являются инвариантными величинами в разных инерциальных системах отсчета.

Продифференцируем уравнение (3.10) по времени и получим

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}^{\text{л}}}{dt^2} + \ddot{\mathbf{u}}_0, \quad \boxed{\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{a}}',} \quad (3.11)$$

т.е. ускорение тела одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Если на точку M действие других тел скомпенсировано ($\ddot{\mathbf{a}} = 0$), то и $\ddot{\mathbf{a}}' = 0$, т.е. точка движется относительно системы K' равномерно и прямолинейно или покоится.

Поскольку во всех инерциальных системах отсчета масса m постоянна, то из формулы (3.11) справедливо, что:

$$m \ddot{\mathbf{a}} = m \ddot{\mathbf{a}}^{\text{л}} \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}^{\text{л}},$$

где $\dot{\mathbf{F}}$ – сила, действующая на тело в системе K ; $\dot{\mathbf{F}}'$ – сила, действующая на тело в системе K' . Следовательно, все силы остаются неизменными при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Таким образом, можно сделать **вывод**, что законы Ньютона и механики инвариантны (неизменны) по отношению к преобразованиям Галилея.

3.5. Закон всемирного тяготения. Масса инертная и гравитационная

Масса характеризует способность тел взаимодействовать с другими телами в согласии с законом всемирного тяготения, открытым И. Ньютоном на основании основных законов динамики и законов Кеплера.

В соответствии с **законом всемирного тяготения**

сила гравитационного взаимодействия, действующая между двумя материальными точками, пропорциональна произведению масс точек m_1 и m_2 , обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена по прямой, соединяющей эти точки:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.12)$$

где G – гравитационная постоянная. В СИ: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$.

В законе (3.12) m_1 и m_2 – **гравитационные массы**, т.е. меры тяготения, а не инертная масса, которая входит во второй закон Ньютона. Однако экспериментально в XVIII в. (английским физиком Г. Кавендишем) было установлено, что для любого тела инертная и гравитационная массы строго пропорциональны друг другу. Поэтому если выбран один и тот же эталон для измерения обеих масс, то их не различают и говорят просто о массе тела.

Из второго закона Ньютона (3.3), рассматривая тело массой $m_{ин}$ у поверхности Земли на полюсе, можно вывести, что

$$F = m_{ин} g = G \frac{M_3 m_{сп}}{R^2} \Rightarrow \frac{m_{ин}}{m_{сп}} = \frac{GM_3}{R^2 g},$$

где M_3 – масса Земли; R – расстояние между телом и центром Земли. Опыт показывает, что все тела в поле тяготения Земли падают с одинаковым ускорением g . Поэтому последнее соотношение свидетельствует о прямой пропорциональности масс инертной и гравитационной. Тогда если принять, что

$$\frac{m_{ин}}{m_{сп}} = 1, \quad \text{то} \quad G \frac{M_3}{R^2} = g = 9,81 \text{ м/с}^2.$$

Опыты, выполненные на сегодняшний день, показывают, что эти две массы являются проявлением разных свойств одной и той же физической величины.

3.6. Сила тяжести и вес

В системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует **сила тяжести**, т.е. сила, с которой тело притягивается Землей:

$$\vec{P} = m \vec{g}. \quad (3.13)$$

Под действием силы тяжести все тела падают с одинаковым ускорением $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, называемым **ускорением свободного падения**. Отметим, что в зависимости от географической широты местности (связано с вращением Земли), а также в зависимости от высоты над уровнем моря величина g незначительно меняется. Часто этими отклонениями g от $9,81 \text{ м/с}^2$ пренебрегают.

Весом тела называется сила, с которой любое тело, находящееся в поле сил тяжести, созданном небесным телом, например Землей, действует на опору или подвес, препятствующие свободному падению тела. В частном случае, когда опора (подвес) покоится или равномерно и прямолинейно движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета, вес тела по величине и направлению совпадает с силой тяжести.

В общем случае движения опоры (подвеса) или самого тела с ускорением $\vec{a}$ относительно инерциальной системы отсчета к телу кроме силы тяжести приложена дополнительная сила $\vec{N}$ реакции опоры, удовлетворяющая согласно

второму закону Ньютона уравнению

$$\dot{\vec{N}} + \dot{\vec{P}} = m\dot{\vec{a}}.$$

Тогда по определению вес тела $\dot{\vec{P}}' = -\dot{\vec{N}} = \dot{\vec{P}} - m\dot{\vec{a}} = m(\dot{\vec{g}} - \dot{\vec{a}})$. При свободном падении тела вместе с опорой (подвесом) вес $\dot{\vec{P}}'$ равен нулю, поскольку $\dot{\vec{a}} = \dot{\vec{g}}$. Это состояние называется **невесомостью**.

3.7. Упругие силы. Закон Гука. Сухое и жидкое трение

Изменение расстояния между точками тела под воздействием внешних сил или других факторов (например нагревания) называется **деформацией**.

Деформация тела называется **упругой**, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.

Деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются **пластическими (остаточными)**.

Сила упругости – это сила, пропорциональная смещению материальной точки (тела) из положения равновесия и направленная к положению равновесия:

$$\dot{\vec{F}} = -k\dot{\vec{r}},$$

где $\dot{\vec{r}}$ – радиус-вектор, характеризующий смещение частицы из положения равновесия; k – положительный коэффициент. Силы упругости возникают в результате взаимодействия тел, сопровождающегося деформацией.

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется **нормальным напряжением**

$$s = F_{\perp} / S, \quad (3.14)$$

где $F_{\perp}$ – сила, перпендикулярная к площадке (сечению), на которую она действует; S – площадь поперечного сечения, например стержня. Предполагается, что упругая сила равномерно распределена по сечению стержня.

Относительное изменение длины стержня (**продольная деформация**) и относительное поперечное сжатие (**сжатие**) определяются соответственно так

$$e = Dl / l \text{ и } e' = Dd / d, \quad (3.15)$$

где l и d – длина и диаметр стержня соответственно. Например, при растяжении Dl положительно, а Dd – отрицательно.

Р. Гук экспериментально установил, что для малых деформаций продольная деформация ε и напряжение σ прямо пропорциональны друг другу:

$$s = Ee, \quad (3.16)$$

где E – **модуль Юнга**. Уравнение (3.16) называется **законом Гука**. Пределом прочности s_M материала, из которого изготовлено тело, называется максимальной силой, которую можно приложить к телу, не разрушив его. Например, при растяжении для латуни и бронзы $s_M = 22 - 50$ ГПа, а для углеродистой стали (машиноподелочной) $s_M = 32 - 80$ ГПа.

Используя формулы (3.14) и (3.15), перепишем закон Гука (3.16) в форме

$$e = \frac{Dl}{l} = \frac{s}{E} = \frac{F}{ES},$$

$$\boxed{F = \frac{ES}{l} Dl = kDl} \quad \text{или} \quad \boxed{\vec{F} = -k\vec{Dl}}, \quad (3.17)$$

где k – жесткость, например пружины; $\vec{Dl}$ – вектор удлинения или сжатия пружины; $|\vec{Dl}|$ – величина упругой деформации.

Внешним трением называется взаимодействие между различными соприкасающимися телами, препятствующее их относительному перемещению. Если трение проявляется между частями одного и того же тела, то оно называется **внутренним трением**.

Трение между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой тело движется, называется **жидким** или **вязким трением**.

Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки называется **сухим трением**. Типы сухого трения:

а) **трение покоя** – трение при отсутствии относительного перемещения соприкасающихся тел;

б) **трение скольжения** – трение, которое возникает при скольжении данного тела по поверхности другого тела и выражается как

$$F = kN, \quad (3.18)$$

где k – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей (в том числе от их шероховатости) и не зависящий от площади соприкосновения; N – сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу. В качестве примера можно привести следующие приблизительные значения k : дерево по дереву – $k \gg 0,4$; резина по твердому телу – $k \gg 1 - 4$; смазанные шарикоподшипники – $k < 0,01$.

Сила трения, препятствующая возникновению движения одного тела по поверхности другого, называется **силой трения покоя**.

Во всех видах трения возникает сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная по касательной к поверхностям соприкасающихся тел противоположно направлению движения данного тела относительно другого. При попытке вывести тело из состояния покоя сила трения покоя изменяется от нуля до предельного значения $F_{тр_0}^{\max}$. Относительное движение возникает при условии $F_{внеш} > F_{тр_0}^{\max}$. Силу $F_{тр_0}^{\max}$ называют **предельной силой трения покоя**. Обычно, говоря о силе трения скольжения, имеют в виду предельную силу трения покоя.

Тема 4. Законы сохранения

4.1. Замкнутая система. Сохраняющиеся величины.

Связь законов сохранения со свойствами пространства и времени

Механическая система называется **замкнутой (изолированной)**, если она не взаимодействует с внешними телами (на нее не действуют внешние силы). Понятие замкнутой системы имеет смысл только по отношению к инерциальным системам отсчета.

Рассмотрим следующие величины, которые обладают свойством сохраняться во времени при движении системы: энергию, импульс и момент импульса. Общее свойство этих трех величин – **свойство аддитивности**: для системы, состоящей из частей, взаимодействие которых пренебрежимо мало, их значение равно сумме значений для каждой из частей в отдельности.

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса – это фундаментальные принципы физики. **Закон сохранения энергии** (см. подтему 4.8) связан с *однородностью времени* – инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени. **Закон сохранения импульса** (см. подтему 4.3) связан с *однородностью пространства*: при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства не изменяются (не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета). **Закон сохранения момента импульса** (см. подтему 4.13) связан соответственно с *изотропностью пространства* – инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

Перечисленные законы сохранения можно получить из второго закона Ньютона. Применение законов сохранения упрощает решение задач, избавляя нас от громоздких и утомительных расчетов, если силы в точности известны. Их можно использовать, когда силы вообще неизвестны.

4.2. Импульс силы

Запишем **основное уравнение динамики**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (4.1)$$

где импульс частицы $\vec{p} = m\vec{u}$; m и $\vec{u}$ – ее масса и скорость соответственно.

Согласно уравнению (4.1) производная импульса материальной точки по времени равна действующей на нее силе. В частности, если $\vec{F} = \vec{0}$, то $\vec{p} = \text{const}$.

Из выражения (4.1) приращение импульса частицы за любой промежуток времени, если известна зависимость силы $\vec{F}$ от времени, определяется за конечный промежуток времени t как

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{F} dt. \quad (4.2)$$

Величину в правой части формулы (4.2) называют **импульсом силы**: приращение импульса частицы за любой промежуток времени зависит не только от значения силы, но и от продолжительности ее действия, или, другими словами, равно импульсу силы за это время.

Импульс системы частиц есть векторная сумма импульсов ее отдельных частиц:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i, \quad (4.3)$$

где $\vec{p}_i$ – импульс i -й частицы.

Теорема об изменении импульса системы:

полный импульс системы можно изменить только действием внешних сил

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{внеш}, \quad (4.4)$$

т.е. производная импульса системы по времени равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на частицы системы.

Как и в случае одной частицы, из выражения (4.4) следует, что приращение импульса системы равно импульсу результирующей всех внешних сил за соответствующий промежуток времени:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{F}_{внеш} dt. \quad (4.5)$$

4.3. Закон сохранения импульса

Из уравнения (4.4) следует, что внутренние силы не могут изменить импульс системы. Рассмотрим замкнутую систему. Тогда согласно формуле (4.4)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0.$$

Закон сохранения импульса:

импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени, т.е. остается постоянным:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i(t) = const. \quad (4.6)$$

При этом импульсы отдельных частиц или частей замкнутой системы могут меняться со временем.

Импульс может сохраняться и у незамкнутой системы при условии, что результирующая всех внешних сил равна нулю, как следует из выражения (4.4).

4.4. Центр масс. Уравнение движения центра масс. Система центра масс

Центром масс (центром инерции) системы n материальных точек называется точка с радиус-вектором относительно начала данной системы отсчета:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m}, \quad (4.7)$$

где m_i и $\mathbf{r}_i$ – это масса и радиус-вектор i -й материальной точки соответственно; n – число материальных точек в системе; $m = \sum_{i=1}^n m_i$ – масса всей системы. Положение центра масс характеризует распределение массы этой системы.

В случае трех измерений координаты центра масс запишутся в виде

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad (4.8)$$

где x_i , y_i и z_i – соответственно координаты i -й материальной точки массой m_i .

Протяженные тела во многих случаях удобно рассматривать как тела, в которых вещество является непрерывно распределенным. Иными словами, предполагается, что тело составлено из n частиц, причем n стремится к бесконечности. В формулах (4.8) суммы заменяются интегралами

$$x_C = \frac{1}{m} \int_V x dm, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_V y dm, \quad z_C = \frac{1}{m} \int_V z dm,$$

где интегрирование проводится по всей области, занятой телом.

Тогда в векторном виде для случая непрерывного распределения массы с плотностью ρ выражение (4.7) запишется следующим образом:

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} dm = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho dV. \quad (4.9)$$

Центр масс системы совпадает с ее центром тяжести, если поле сил тяжести в пределах данной системы можно считать однородным.

Скорость центра масс системы найдем, продифференцировав уравнение (4.7) по времени:

$$\mathbf{u}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{u}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{p}}{m}.$$

Если скорость центра масс равна нулю, то система как целое покоится.

Таким образом, в механике Ньютона **импульс системы** массой m может быть выражен через скорость ее центра масс

$$\mathbf{p} = m \mathbf{u}_C. \quad (4.10)$$

Подставив выражение (4.10) в уравнение (4.4), получим **закон движения центра масс**

$$m \frac{d\mathbf{u}_C}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}}, \quad (4.11)$$

т.е. центр масс системы частиц движется как *материальная точка*, в которой

сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе. При этом ускорение центра масс не зависит от точек приложения внешних сил.

В соответствии с формулой (4.11) из закона сохранения импульса следует, что центр масс замкнутой системы в инерциальной системе отсчета или движется прямолинейно и равномерно, или покоится.

Систему отсчета, жестко связанную с центром масс и перемещающуюся поступательно по отношению к инерциальным системам, называют **системой центра масс**, или, кратко, ***Ц-системой***.

Полный импульс системы частиц в *Ц*-системе всегда равен нулю. Другими словами, любая система частиц как целое покоится в своей *Ц*-системе. Для замкнутой системы частиц ее *Ц*-система является инерциальной, для незамкнутой – в общем случае неинерциальной.

4.5. Работа

До сих пор мы изучали движение и взаимодействие частиц в рамках трех законов динамики Ньютона. Для количественного описания движения использовалось понятие силы. Теперь рассмотрим движение частицы с помощью понятий работы и энергии.

Энергия – это универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. **Работа** является мерой превращения одного вида энергии в другой. Поэтому энергия и работа имеют одну размерность.

В повседневной жизни слово *работа* употребляется в различном смысле. В физике же работа имеет строго определенный смысл.

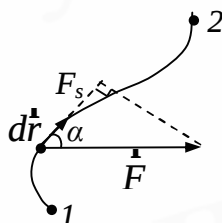


Рис. 4.1. К выводу формулы-определения работы силы

Пусть на частицу, совершающую перемещение по некоторой траектории 1–2, действует сила $\vec{F}$, рис. 4.1. В общем случае сила $\vec{F}$ в процессе движения частицы может изменяться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$, в пределах которого силу $\vec{F}$ можно считать постоянной.

Действие силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ характеризуют величиной, равной скалярному произведению $\vec{F}d\vec{r}$, которую называют элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = (F \cos \alpha)ds = F_s ds, \quad (4.12)$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$; $ds = |d\vec{r}|$ – элементарный путь; F_s – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$, рис. 4.1. Величина dA – алгебраическая: в зависимости от угла между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ она может быть как положительной, так и отрицательной и, в частности, равной нулю (если $\vec{F} \perp d\vec{r}$, т.е. $F_s = 0$).

Суммируя (интегрируя) выражение (4.12) по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, находим **работу силы $\vec{F}$** на данном пути:

$$A = \int_1^2 \mathbf{\dot{F}} d\mathbf{r} = \int_1^2 F_s ds. \quad (4.13)$$

Формула (4.13) справедлива не только для частицы, но и для любого тела (или системы тел). Под $d\mathbf{r}$ (или ds) надо понимать перемещение точки приложения силы $\mathbf{\dot{F}}$. В частном случае при прямолинейном движении тела под действием постоянной силы $\mathbf{\dot{F}}$, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, работа этой силы равна

$$A = F_s s = F s \cos \alpha.$$

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности. **Мощность** – это работа, совершаемая силой за единицу времени. Мощность P равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы:

$$P = \frac{dA}{dt} = (\mathbf{\dot{F}}, \mathbf{\dot{u}}).$$

Как и работа, мощность – величина алгебраическая.

Единица работы в СИ – джоуль (Дж): $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

1 Джоуль – это работа, совершаемая силой величиной 1 Н на пути 1 м.

Единица мощности в СИ – ватт (Вт): $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$.

1 Ватт – это мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж.

Зная мощность силы $\mathbf{\dot{F}}$, можно найти и работу, которую совершает эта сила за промежуток времени t . Действительно, подставив подынтегральное выражение в формуле (4.13) в виде $\mathbf{\dot{F}} d\mathbf{r} = \mathbf{\dot{F}} \mathbf{\dot{u}} dt = P dt$, получим

$$A = \int_0^t P dt.$$

4.6. Кинетическая энергия частицы. Консервативные силы

Кинетическая энергия механической системы – это энергия механического движения этой системы, определяемая скоростью ее частиц.

Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы $\mathbf{\dot{F}}$ (в общем случае сила $\mathbf{\dot{F}}$ – результирующая нескольких сил). Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила $\mathbf{\dot{F}}$ на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$. Учтем, что $\mathbf{\dot{F}} = m \frac{d\mathbf{\dot{u}}}{dt}$ и $d\mathbf{r} = (d\mathbf{r}/dt) dt = \mathbf{\dot{u}} dt$, и запишем из выражения (4.12):

$$dA = \mathbf{\dot{F}} d\mathbf{r} = m \mathbf{\dot{u}} d\mathbf{u}.$$

Можно показать, что $\mathbf{\dot{u}} d\mathbf{u} = u du$, и элементарная работа будет равна

$$dA = m u du = d(mu^2/2).$$

Отсюда видно, что работа силы $\mathbf{\dot{F}}$ идет на приращение некоторой величины в скобках, которую называют **кинетической энергией частицы**:

$$E_k = \frac{mu^2}{2}. \quad (4.14)$$

Кинетическая энергия является функцией состояния системы. Она всегда положительна. В разных инерциальных системах отсчета кинетическая энергия неодинакова.

Таким образом, приращение кинетической энергии частицы при элементарном перемещении равно элементарной работе всех сил, действующих на частицу, на том же перемещении:

$$dE_k = dA. \quad (4.15)$$

Теорема о кинетической энергии:

изменение кинетической энергии частицы при ее переходе из одного положения в другое равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу на том же перемещении:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = A_{12}. \quad (4.16)$$

Единица кинетической энергии в СИ – джоуль (Дж): $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Консервативной называют силу, работа которой определяется только начальным и конечным положениями тела и не зависит от формы и длины пути (от траектории точки приложения силы).

Консервативные силы действуют на тело (материальную точку) в потенциальных стационарных полях. Стационарное поле будет **потенциальным**, если работа по любому замкнутому пути в этом поле будет равна нулю:

$$A = \oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

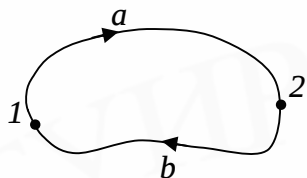


Рис. 4.2. К определению стационарного потенциального поля

Чтобы убедиться в этом, разобьем произвольный замкнутый контур, по которому движется частица, на две части: $1a2$ и $2b1$, рис. 4.2. Тогда работа A на замкнутом пути равна

$$A = A_{1a2} + A_{2b1},$$

где $A_{1a2} = A_{1b2}$, так как работа консервативных сил не зависит от формы пути. Поскольку $A_{2b1} = -A_{1b2}$,

то в результате оказывается, что работа в потенциальном поле на произвольном замкнутом пути действительно равна нулю: $A = 0$.

Неконсервативные силы – это силы, работа которых зависит от формы траектории. При перемещении материальной точки или тела по замкнутой траектории работа неконсервативной силы не равна нулю. К неконсервативным силам относятся силы трения и сопротивления. Они называются **диссипативными силами**. Суммарная работа всех внутренних диссипативных сил системы всегда отрицательна.

4.7. Потенциальная энергия частицы в поле. Энергия упругой деформации.

Связь между потенциальной энергией и силой поля

Рассмотрим стационарное поле консервативных сил. Работу консервативной силы можно представить как изменение (убыль) некоторой скалярной функции $E_p(\vec{r})$, зависящей только от положения частицы (тела), которая назы-

вается **потенциальной энергией** частицы:

$$dA = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{r} = -dE_p.$$

Тогда **работа сил поля** при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 может быть представлена как убыль потенциальной энергии $E_p(\mathbf{r})$ частицы в данном поле:

$$A_{12} = \int_1^2 \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{r} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (4.17)$$

Из формулы (4.17) следует, что потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной. Поскольку в физических явлениях природы рассматривается не сама величина потенциальной энергии, а только ее изменение, то роль константы несущественна. Начало отсчета потенциальной энергии ($E_p = 0$) выбирается из соображений удобства.

Единица потенциальной энергии в СИ – джоуль (Дж): $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Определим энергию упругой деформации стержня. Внешние силы подчиняются закону Гука (3.17). Потенциальная энергия упруго растянутого (сжатого) стержня равна минимальной работе, совершаемой внешними силами при деформации, т.е. при $F_{\text{внеш}} = F$:

$$E_p = A = \int_0^{Dl} F dx.$$

Пусть x – удлинение стержня, которое изменяется в процессе деформации от 0 до Dl . Тогда согласно закону Гука (3.17) получаем для **энергии упругой деформации** E_p , что потенциальная энергия упруго растянутого стержня пропорциональна квадрату деформации:

$$E_p = \int_0^{Dl} \frac{ES}{l} x dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (Dl)^2.$$

В ньютоновской механике широко используются два способа описания *взаимодействия частицы* с окружающими телами: с помощью сил и с помощью потенциальной энергии. Первый способ применим и к таким силам, для которых нельзя ввести потенциальную энергию, например для сил трения. Вторым способом применим только в случае консервативных сил.

Рассмотрим перемещение частицы из одной точки потенциального стационарного поля в другую. **Связь между потенциальной энергией и силой поля** выражается в соответствии с уравнением (4.17):

$$F_s = -\frac{\partial E_p}{\partial s}, \quad (4.18)$$

где потенциальная энергия $E_p(\mathbf{r})$ – функция положения частицы в поле. Следовательно, проекция F_s силы поля – вектора $\dot{\mathbf{F}}$ – в данной точке поля на направление перемещения $d\mathbf{r}$ равна с обратным знаком производной потенциальной энергии E_p по данному направлению.

Перемещение $d\vec{r}$ можно взять в любом направлении, в частности вдоль координатных осей X, Y, Z . **Связь между силой поля и потенциальной энергией** как функцией координат можно представить в следующем виде:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right), \quad (4.19)$$

где величину, стоящую в скобках, называют градиентом скалярной функции координат – потенциальной энергии частицы в данной точке поля, обозначая $\text{grad } E_p$ или $\vec{\nabla}E_p$. Дифференциальный оператор набла в декартовых координатах записывается как

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Таким образом, вектор консервативной силы $\vec{F}$ противоположен направлению вектора $\vec{\nabla}E_p$. Формула (4.19) позволяет, зная потенциальную энергию частицы $E_p(\vec{r})$, найти действующую на нее силу $\vec{F}(\vec{r})$. Смысл градиента будет понятнее, если ввести понятие **эквипотенциальной поверхности** – поверхности, во всех точках которой потенциальная энергия имеет одно и тоже значение. Каждому значению E_p соответствует своя эквипотенциальная поверхность. Тогда градиент E_p – это вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии.

4.8. Полная механическая энергия частицы. Закон ее сохранения. Общезначимый закон сохранения энергии

Рассмотрим систему частиц (материальных точек), которая находится в стационарном поле консервативных сил. Частицы системы двигаются поступательно. Отметим, что **внешние силы** не имеют отношения к силовому полю, в котором находятся частицы. Внешние силы могут быть и консервативными, и неконсервативными. Работа последних сил не может быть учтена как изменение потенциальной энергии системы.

Полная механическая энергия частицы – энергия механического движения и взаимодействия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_k + E_p. \quad (4.20)$$

Полная механическая энергия частицы, как и потенциальная энергия, определяется с точностью до произвольной постоянной. Из уравнения (4.20) можно доказать, что приращение полной механической энергии частицы на некотором пути в стационарном поле консервативных сил равно алгебраической сумме работ всех внешних сил, действующих на систему на том же пути:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{внеш}}. \quad (4.21)$$

Если $A_{\text{внеш}} > 0$, то полная механическая энергия системы увеличивается, если $A_{\text{внеш}} < 0$, то уменьшается.

Полная механическая энергия частицы может изменяться только под действием внешних сил (см. формулу (4.21)). Отсюда непосредственно следует **закон сохранения механической энергии частицы**:

полная механическая энергия частицы в стационарном поле консервативных сил остается неизменной во времени, если внешние силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы в течение рассматриваемого времени:

$$E = E_k + E_p = \text{const.} \quad (4.22)$$

Диссипативные системы – это системы, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название **диссипации** (рассеяния) **энергии**. Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.

Центральными называются силы, действующие по прямой, соединяющей частицы, и зависящие только от расстояния r между ними.

Рассмотрим систему частиц N , между которыми действуют только центральные силы. Можно показать, что в этом случае независимо от системы отсчета работа всех **внутренних центральных (консервативных) сил** при переходе системы частиц из одного положения в другое может быть представлена как убыль некоторой функции, определяемой состоянием системы:

$$A_{\text{внутр}}^{\text{конс}} = E_{p1}^{\text{соб}} - E_{p2}^{\text{соб}},$$

где $E_{p1}^{\text{соб}}$ и $E_{p2}^{\text{соб}}$ – собственная потенциальная энергия системы в начальном и конечном состояниях соответственно. **Собственная (взаимная) потенциальная энергия системы** частиц – это механическая энергия системы тел, зависящая от конфигурации системы (взаимного расположения частиц) и характера сил взаимодействия между ними:

$$E_p^{\text{соб}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ (i \neq k)}}^N E_{p\,ik}^{\text{соб}},$$

где $E_{p\,ik}^{\text{соб}}$ – энергия взаимодействия i -й и k -й частиц. Если при движении частиц конфигурация системы остается постоянной, то потенциальная энергия будет постоянной и внутренние силы работы не совершают.

Кинетическая энергия системы частиц равна сумме кинетических энергий отдельных частиц:

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i u_i^2}{2},$$

где m_i и u_i – соответственно масса и скорость частицы i . Суммарная работа A всех сил действующих на систему частиц – внешних и внутренних – затрачивается на приращение кинетической энергии (см. формулу (4.16)).

Таким образом, **механическая энергия системы** определяется как

$$E = E_k + E_p^{\text{соб}}. \quad (4.23)$$

Механическая энергия системы зависит от скоростей частиц системы, характера взаимодействия между ними и конфигурации системы. Изменение механической

ческой энергии замкнутой системы равно алгебраической сумме работ всех внутренних неконсервативных сил

$$E_2 - E_1 = A_{\text{внутр}}^{\text{неконс}}.$$

Следовательно, механическая энергия неконсервативной замкнутой системы убывает (ΔE будет отрицательно), поскольку можно показать, что результирующая работа всех внутренних неконсервативных сил системы – величина отрицательная, независимо от системы отсчета.

Закон сохранения механической энергии системы:

механическая энергия замкнутой системы частиц (см. формулу (4.23)), в которой отсутствуют неконсервативные силы, сохраняется в процессе движения.

Рассмотрим систему частиц N во *внешнем стационарном поле консервативных сил*. Действующие внешние силы можно разделить на силы со стороны внешнего поля и внешние сторонние силы, которые не относятся к данному внешнему полю. Учтем, что каждая i -я частица системы будет характеризоваться своим значением потенциальной энергии E_{pi} в поле, определяемым по формуле (4.17). Можно показать, что **полная механическая энергия системы** во внешнем поле равна сумме кинетической и потенциальной энергий

$$E = E_k + E_p^{\text{соб}} + E_p^{\text{внеш}}, \quad (4.23a)$$

где $E_p^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^N E_{pi}$.

Изменение механической энергии системы определяется суммой работ всех действующих в системе неконсервативных сил (внутренних и внешних):

$$E_2 - E_1 = A_{\text{неконс}}. \quad (4.24)$$

Таким образом, когда *неконсервативные силы* отсутствуют, полная механическая энергия системы сохраняется.

Закон сохранения полной механической энергии системы, находящейся во внешнем стационарном поле консервативных сил:

в *инерциальной системе отсчета* полная механическая энергия замкнутой системы частиц (см. формулу (4.23a)), в которой нет внутренних неконсервативных сил, остается постоянной в процессе движения.

Данный закон выводится с применением теоремы об изменении кинетической энергии частицы (4.16), которая опирается на второй закон Ньютона (3.3). Отсюда следует требование инерциальности системы отсчета.

В заключение сформулируем **закон сохранения энергии в его общем физическом смысле**:

энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

Физическая сущность закона сохранения и превращения энергии (механической, внутренней, электромагнитной, химической, ядерной и др.) – неуничтожимость материи и ее движения.

4.9. Гравитационное поле и его характеристика

Взаимодействие между телами осуществляется через **гравитационное поле** (поле тяготения), которое является одной из форм материи. В гравитационном поле на материальную точку действует сила тяготения, прямо пропорциональная массе этой точки. Векторной характеристикой данного поля является его **напряженность** $\vec{G}$, которая равна отношению силы тяготения $\vec{F}$, действующей на материальную точку, к величине ее массы m :

$$\vec{G} = \vec{F}/m, \quad (4.25)$$

где $\vec{G}$ – это сила, которая действует на тело массы 1 кг.

Силы тяготения имеют потенциальный характер, что позволяет ввести скалярную характеристику гравитационного поля – **потенциал** φ , связанный с $\vec{G}$ соотношением

$$\vec{G} = -\text{grad } j = -\left(\frac{\partial j}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial j}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial j}{\partial z} \vec{k}\right).$$

Можно показать, что для гравитационного поля, создаваемого материальной точкой с массой M , находящейся в начале координат, напряженность равна

$$\vec{G} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}, \quad (4.26)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки поля, в которой определяется $\vec{G}$; G – гравитационная постоянная.

Работа сил гравитационного поля, например Земли, не зависит от формы пути, а определяется начальным и конечным положением тела. При перемещении тела с расстояния r_1 до r_2

$$A = -GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \quad (4.27)$$

где M – масса Земли; m – масса тела. Радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ проводятся из центра Земли к телу m .

Потенциал гравитационного поля определяется только массой тела, создающего гравитационное поле, и расстоянием от центра данного тела до некоторой точки поля:

$$j = \frac{E_p}{m} = -G \frac{M}{r}. \quad (4.28)$$

Можно показать, что потенциальная энергия, которой обладает тело массой m вблизи поверхности Земли, имеет следующий вид:

$$E_p = C + mgh, \quad (4.29)$$

где постоянная C на поверхности Земли принимается равной нулю. Тогда потенциал гравитационного поля вблизи поверхности Земли определяется как

$$j = gh. \quad (4.29a)$$

4.10. Примеры применения законов сохранения импульса и механической энергии

Примером применения *законов сохранения импульса и энергии* при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел, так как два сталкивающихся тела, на которые не действуют силы со стороны каких-либо других тел, представляют собой замкнутую систему.

Например, в основе современного ядерно-физического метода резерфордского обратного рассеяния лежат физические законы взаимодействия налетающей частицы (иона) и атома мишени: передача энергии и закон сохранения импульса при процессах упругих взаимодействий двух тел. Когда энергия налетающей частицы намного больше энергии связи атомов в твердых телах (около 10 эВ), то атом мишени можно считать изолированным. Энергия рассеянных частиц зависит от массы ядра, с которым произошло столкновение, благодаря чему метод позволяет проводить анализ элементного состава вещества. Из-за энергетических потерь, испытываемых обратно рассеянными анализирующими частицами при прохождении слоя изучаемого вещества до и после рассеяния, метод является чувствительным и к глубине, на которой находятся атомы того или иного элемента. Использование для обработки спектров программы RUMP дает возможность определять концентрации элементов начиная с 0,001 ат. %.

Удар (соударение) – это столкновение двух или более тел, в результате которого скорости тел изменяются. Столкновениями называют разнообразные процессы взаимодействия между телами, при условии, что на достаточно большом расстоянии друг от друга тела можно рассматривать как свободные.

Центральный удар – это удар, при котором тела до соударения движутся по прямой, проходящей через их центры масс. При этом векторы скоростей тел до и после удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры масс.

Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию. Выполняются *закон сохранения импульса* и *закон сохранения механической энергии*.

Обозначим скорости шаров массами m_1 и m_2 до удара через $\dot{u}_1$ и $\dot{u}_2$, после удара – через $\dot{u}'_1$ и $\dot{u}'_2$. Пусть шары движутся поступательно. При абсолютно упругом ударе для скоростей и энергий до удара и после удара справедливы следующие уравнения:

$$m_1\dot{u}_1 + m_2\dot{u}_2 = m_1\dot{u}'_1 + m_2\dot{u}'_2, \quad (4.30)$$

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1'^2}{2} + \frac{m_2 u_2'^2}{2}. \quad (4.30a)$$

Рассмотрим случай центрального удара. Уравнение (4.30) тогда можно рассматривать как скалярное (разные направления скоростей различаются только знаком). Предположим, что первоначально оба шара двигались вдоль одного направления. Пусть после столкновения направление их движения не

изменилось. Перепишем законы сохранения, спроецировав их на направление движения (обозначим как ось X), в таком виде:

$$m_1(u_{1x} - u_{1x}) = m_2(u_{2x} - u_{2x}), \quad m_1(u_{1x}^2 - u_{1x}^2) = m_2(u_{2x}^2 - u_{2x}^2).$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$u_{1x} + u_{1x} = u_{2x} + u_{2x}.$$

Умножая это уравнение один раз на m_2 , а другой раз – на m_1 и вычитая его из первого уравнения, получим выражения для обеих скоростей после удара:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)u_{1x} + 2m_2u_{2x}}{m_1 + m_2}; \quad u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)u_{2x} + 2m_1u_{1x}}{m_1 + m_2}. \quad (4.31)$$

В общем виде эти выражения сложны. Мы рассмотрим в качестве примера один частный случай. Пусть один шар до удара покоится: $\vec{u}_2 = \vec{0}$. Тогда

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)u_{1x}}{m_1 + m_2}; \quad u_{2x} = \frac{2m_1u_{1x}}{m_1 + m_2}.$$

Действительно, после удара второй шар движется в ту же сторону, куда двигался первый до удара. Скорость u_{1x} и поведение первого шара зависят от соотношения масс.

А. Если $m_1 > m_2$, то первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью. Скорость второго шара после удара u_2 больше, чем скорость первого до удара u_{1x} , рис. 4.3, а.

Б. Если $m_1 < m_2$, то направление движения первого шара при ударе изменяется – шар отскакивает обратно. Второй шар движется в сторону, в которую двигался первый до удара, но с меньшей скоростью, рис. 4.3, б.

В. Массы шаров одинаковы: $m_1 = m_2$. Тогда

$$u_{1x} = u_{2x}; \quad u_{2x} = u_{1x},$$

т.е. шары равной массы при ударе обмениваются скоростями. Например, если $\vec{u}_1 = \vec{0}$, то $\vec{u}_2 = \vec{0}$.

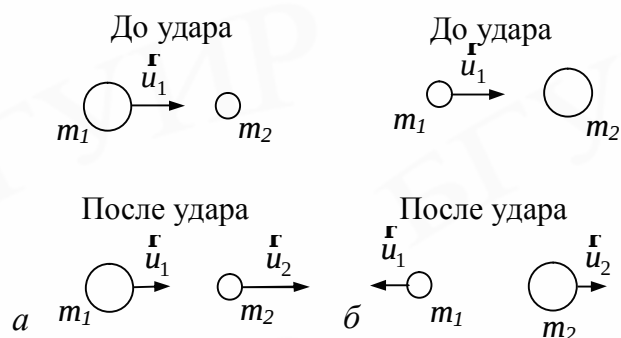


Рис. 4.3. Абсолютно упругое столкновение двух тел:

а – частицы массами $m_1 > m_2$;

б – частицы массами $m_1 < m_2$

Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое тело. После столкновения образуется тело с массой $m_1 + m_2$ (свойство *аддитивности массы*).

Если удар оказывается абсолютно неупругим, то определить требуется только одну общую скорость обоих тел после удара. Удар будем считать центральным. Если массы тел m_1 и m_2 , их скорости до удара $\vec{u}_1$ и

$\vec{u}_2$, а их общая скорость после удара $\vec{u}'$, то по закону сохранения импульса

$$m_1 \dot{u}_1 + m_2 \dot{u}_2 = (m_1 + m_2) \dot{u}'.$$

Скорость после удара будет направлена по той прямой, по которой направлены обе скорости до удара:

$$\dot{u}' = \frac{m_1 \dot{u}_1 + m_2 \dot{u}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.32)$$

Отметим, что полная механическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе не сохраняется. В процессе соударения шаров между ними действуют силы, подобные *силам трения* и зависящие от скорости изменения деформаций, а не от величины деформаций. Например, при соударении глиняных шаров эти силы исчезают, когда деформации шаров перестают изменяться (скорости шаров становятся равными). Кинетическая энергия при ударе уменьшается, так как из-за деформации она частично или полностью превращается в другие формы энергии, например в тепловую или потенциальную. Отметим, что возможна обратная ситуация, когда при столкновении высвобождается потенциальная энергия, например химическая или ядерная. Тогда полная кинетическая энергия после столкновения может быть больше исходной.

Для абсолютно неупругого удара шаров изменение кинетической энергии

$$\Delta E_k = \frac{(m_1 + m_2) u'^2}{2} - \left(\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \right).$$

Используем уравнение (4.32) и получим, что

$$\Delta E_k = - \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)^2. \quad (4.33)$$

4.11. Космические скорости

Рассмотрим характер движения тел, находящихся под действием сил всемирного тяготения. Ограничимся простейшим случаем двух тел, предполагая, что масса одного из них M гораздо меньше массы m второго тела. Тогда первое тело можно считать практически неподвижным или движущимся равномерно и прямолинейно, так как ускорение, сообщаемое ему первым телом, пренебрежимо мало. Задача сводится к определению движения второго тела.

Наиболее простой случай – это движение искусственного спутника по круговой орбите на постоянной высоте над поверхностью Земли. После того как ракета-носитель поднимается на достаточную высоту, на которой плотность земной атмосферы, а следовательно, и ее сопротивление движению ничтожны, двигатели ракеты выключаются, и дальнейшее движение можно рассматривать как происходящее только под действием сил тяготения. Начальными условиями этого движения служат положение и скорость ракеты-носителя (или отделившегося от нее спутника) в точке, в которой выключаются двигатели.

Сопротивлением воздуха при прохождении тела через атмосферу Земли будем пренебрегать. Радиус орбиты спутника должен быть больше радиуса Земли, равного $R_z = 6350$ км. Примем для дальнейших расчетов, что радиус орбиты R составляет 6700 км. Согласно *второму закону Ньютона* (3.3):

$$F = G \frac{M_3 m}{R^2} = m a_1 = \frac{m u_{\kappa 1}^2}{R},$$

где F – сила гравитационного взаимодействия; M_3 – масса Земли; m – масса спутника. Из последнего уравнения получаем выражение для **первой космической скорости** – наименьшей начальной скорости, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли. Она равна скорости кругового движения на данной высоте над Землей:

$$u_{\kappa 1} = \sqrt{G M_3 / R}. \quad (4.34)$$

Если бы атмосфера Земли отсутствовала, то спутник мог бы двигаться по круговой орбите непосредственно у поверхности Земли, т.е. по орбите с радиусом R_3 . Пренебрегая различием между силой тяжести mg и силой гравитационного притяжения тела к Земле, получим равенство

$$G \frac{M_3 m}{R_3^2} = mg \Rightarrow \frac{G M_3}{R_3} = g R_3.$$

Тогда можно получить из выражения (4.34):

$$u_{\kappa 1} = \sqrt{g R_3} \approx 8 \text{ км/с}.$$

Вторая космическая скорость $u_{\kappa 2}$ – это скорость, которую нужно сообщить телу при запуске с Земли для того, чтобы оно вышло из сферы земного притяжения и стало телом Солнечной системы. Ей соответствует параболическая траектория. Под действием силы тяготения Солнца тело движется по замкнутой орбите вокруг Солнца.

Вычислим $u_{\kappa 2}$, применив *закон сохранения энергии*. В момент запуска полная энергия тела массой m равна

$$E = \frac{m u_{\kappa 2}^2}{2} - G \frac{M_3 m}{R},$$

где потенциальная энергия нормирована таким образом, что на бесконечности согласно формуле (4.27) она обращается в нуль. Полная энергия также будет равна нулю, так как считаем, что на бесконечности скорость тела равна нулю. Тогда определим, что $u_{\kappa 2} \approx 11 \text{ км/с}$, так как

$$u_{\kappa 2} = \sqrt{2 G M_3 / R} = \sqrt{2} u_{\kappa 1}. \quad (4.35)$$

Третья космическая скорость $u_{\kappa 3}$ – это такая космическая скорость, при которой тело, начиная движение вблизи поверхности Земли, преодолевает земное притяжение, затем солнечное притяжение и покидает Солнечную систему.

Подставим в уравнение (4.35) вместо M_3 массу Солнца ($1,97 \cdot 10^{30} \text{ кг}$) и вместо радиуса – радиус земной орбиты ($1,50 \cdot 10^{11} \text{ м}$), поскольку в момент старта с Земли тело находится именно на таком расстоянии от Солнца, и получим

$$u_{\kappa 3} = 42 \text{ км/с}.$$

С учетом того что Земля не является неподвижной в момент запуска тела и движется вокруг Солнца со скоростью 30 км/с, а также принимая во внимание силы притяжения тела к Земле, при запуске тела по касательной в направлении

орбитального движения Земли скорость 42 км/с достигается при скорости тела относительно Земли $u_{кз} \approx 17$ км/с.

4.12. Моменты импульса частицы относительно точки и оси.

Момент силы. Пара сил

Задача динамики абсолютно твердого тела – изучить движение тела в зависимости от действующих на него сил. Для изучения *вращательного движения* тела необходимо ввести новые понятия: момент силы и момент импульса.

Рассмотрим сначала одну частицу. Пусть $\vec{r}$ – радиус-вектор, характеризующий ее положение относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета, а $\vec{p}$ – ее импульс в этой системе.

Моментом импульса (моментом количества движения) $\vec{L}$ частицы A относительно точки O , рис. 4.4, называют физическую величину, численно равную векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]. \quad (4.36)$$

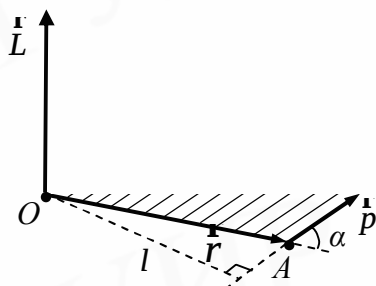


Рис. 4.4. Момент импульса частицы A относительно точки O

Из этого определения следует, что $\vec{L}$ является аксиальным вектором. Его направление выбрано так, что вращение вокруг точки O в направлении вектора $\vec{p}$ и вектор $\vec{L}$ образуют правовинтовую систему. Модуль вектора $\vec{L}$ равен

$$L = rp \sin \alpha = lp, \quad (4.36a)$$

где α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{p}$; $l = r \sin \alpha$ – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O , см. рис. 4.4.

Единица момента импульса в СИ – килограмм-метр в квадрате в секунду ($\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$).

Определим механическую величину, ответственную за изменение вектора $\vec{L}$ в данной системе отсчета, продифференцировав уравнение (4.36) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{p} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Так как точка O неподвижна, то вектор $d\vec{r}/dt$ равен скорости $\vec{u}$ частицы, т.е. совпадает по направлению с вектором $\vec{p}$, поэтому

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{p} = 0.$$

Согласно второму закону Ньютона (3.4), $d\vec{p}/dt = \vec{F}$, где $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к частице. Следовательно,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Моментом силы $\vec{F}$ относительно некоторой точки O называется физическая величина, численно равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы A , на силу $\vec{F}$. Обозначив

его буквой $\dot{M}$, запишем

$$\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{F}}]. \quad (4.37)$$

Вектор $\dot{\mathbf{M}}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{F}}$, рис. 4.5. Модуль момента силы равен

$$M = lF, \quad (4.37a)$$

где $l = r \sin \alpha$ – плечо вектора силы $\dot{\mathbf{F}}$ относительно точки O .

Плечом силы l называют длину перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой действует сила.

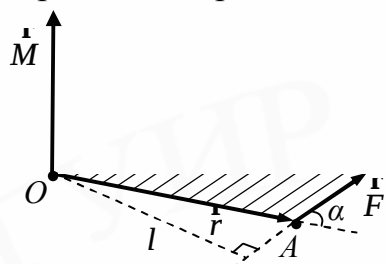


Рис. 4.5. Момент силы $\dot{\mathbf{M}}$, приложенной в точке A , относительно точки O

Единица момента силы в СИ – ньютон-метр (Н·м).

Момент силы характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он определяется. Если тело может вращаться относительно точки O произвольным образом, то под действием силы тело повернется вокруг оси, совпадающей с направлением момента силы.

Итак, производная по времени от момента импульса $\dot{\mathbf{L}}$ частицы относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета равна моменту $\dot{\mathbf{M}}$ равнодействующей силы $\dot{\mathbf{F}}$ относительно той же точки O :

$$\frac{d\dot{\mathbf{L}}}{dt} = \dot{\mathbf{M}}. \quad (4.38)$$

Закон изменения момента импульса (4.38) часто называется **уравнением моментов**. Из данного уравнения, в частности, следует, что если относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета сумма моментов всех сил, действующих на частицу, равна нулю ($\dot{\mathbf{M}} = 0$) в течение некоторого промежутка времени, то относительно этой точки момент импульса частицы остается постоянным в течение этого времени.

Уравнение моментов (4.38) позволяет найти момент силы $\dot{\mathbf{M}}$ относительно интересующей нас точки O в любой момент времени t , если известна зависимость от времени $\dot{\mathbf{L}}(t)$ частицы относительно той же точки.

Также из формулы (4.38) можно определить приращение момента импульса частицы относительно точки O за конечный промежуток времени t , если известна зависимость от времени момента силы $\dot{\mathbf{M}}(t)$, действующего на эту частицу относительно той же точки O :

$$\dot{\mathbf{L}}_2 - \dot{\mathbf{L}}_1 = \int_0^t \dot{\mathbf{M}}(t) dt. \quad (4.39)$$

Величину, стоящую в правой части выражения (4.39), называют **импульсом момента силы**.

В тех случаях, когда твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, вводят понятия момента импульса и момента инерции относительно оси.

Моментом импульса частицы **относительно неподвижной оси** L_z называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента импульса $\dot{\mathbf{L}}$, определенного относительно любой точки, выбранной на рассматриваемой оси.

Соответственно **моментом силы относительно неподвижной оси** M_z называется проекция на эту ось вектора $\dot{\mathbf{M}}$ относительно любой точки, выбранной на данной оси, характеризующая способность силы вращать тело вокруг этой оси.

Можно доказать, что выбор точки на оси никак не влияет на значения L_z и M_z . Поэтому точку выбирают из соображений удобства: уравнение моментов (4.38) будет тем проще, чем больше сил будут иметь равные нулю моменты.

При проецировании моментов сил на ось, например X и Y (случай плоской системы сил, когда оси X и Y расположены в плоскости действия сил), моменты сил, стремящиеся повернуть материальную точку (тело) по часовой стрелке вокруг выбранного начала, берутся с одним знаком, против часовой стрелки – с противоположным.

Уравнение моментов (4.38) в проекции на ось Z имеет вид

$$dL_z/dt = M_z. \quad (4.40)$$

В частности, если момент силы M_z относительно некоторой неподвижной оси Z равен нулю, то момент импульса L_z частицы относительно этой оси остается постоянным. При этом вектор $\dot{\mathbf{L}}$ может изменяться.

Главным моментом системы k сил называется вектор, равный сумме векторов моментов всех сил $\dot{\mathbf{M}}_i$ системы относительно одной и той же точки системы отсчета

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^k \dot{\mathbf{M}}_i = \sum_{i=1}^k [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i]. \quad (4.41)$$

Две равные по модулю и противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой, называются **парой сил**. Их равнодействующая сила равна нулю. Действие пары сил на твердое тело сводится только к вращению тела относительно некоторой точки, лежащей в плоскости этой пары сил.

Плечом пары сил называется расстояние l между прямыми, вдоль которых действуют силы.

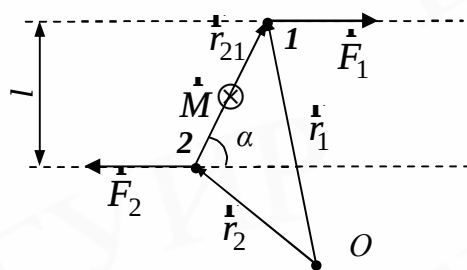


Рис. 4.6. Схема, иллюстрирующая действие пары сил на тело

Пусть к телу в точках 1 и 2 приложена пара сил ($\dot{\mathbf{F}}_1 = -\dot{\mathbf{F}}_2$), рис. 4.6. Обозначим $\dot{\mathbf{r}}_{21} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$ – радиус-вектор, проведенный из точки 2 в точку 1. Результирующий момент сил относительно произвольной точки O будет определяться так:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= [\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{F}}_1] + [\dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{F}}_2] = [\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{F}}_1] - [\dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{F}}_1] = \\ &= [(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2), \dot{\mathbf{F}}_1]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\dot{\vec{M}} = [\vec{r}_{21}, \dot{\vec{F}}_1]. \quad (4.42)$$

Следовательно,

$$M = r_{21} F_1 \sin \alpha = l F_1. \quad (4.42a)$$

В рассмотренном случае суммарный момент внешних сил не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат силы. В частности, в приведенном примере на рис. 4.6 вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка от нас.

4.13. Момент импульса системы. Закон сохранения момента импульса

Выберем произвольную систему частиц. Введем понятие **момента импульса механической системы относительно некоторой точки O** как векторную сумму моментов импульса ее отдельных частиц:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i, \quad (4.43)$$

где все векторы определены относительно одной и той же точки O заданной системы отсчета. Момент импульса системы – величина аддитивная: момент импульса системы равен векторной сумме моментов импульсов ее отдельных частей независимо от того, взаимодействуют ли они между собой.

Выясним, какая величина определяет изменение момента импульса системы. Для этого продифференцируем (4.43) по времени. Согласно уравнению моментов (4.38) производная $d\vec{L}/dt$ равна моменту всех сил, действующих на i -ю частицу. Представим этот момент в виде векторной суммы моментов внутренних и внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \overset{\circ}{\vec{M}}_i^{\text{внутр}} + \sum_i \vec{r}_i \overset{\circ}{\vec{M}}_i^{\text{внеш}}. \quad (4.43a)$$

Здесь первая сумма – суммарный момент всех внутренних сил относительно точки O , вторая сумма – суммарный момент всех внешних сил относительно той же точки.

Внутренние силы – это силы взаимодействия между частицами данной системы. По третьему закону Ньютона (3.7) эти силы попарно одинаковы по модулю, противоположны по направлению и лежат на одной прямой, и значит, имеют одинаковое плечо. Следовательно, суммарный момент всех внутренних сил для любой системы частиц относительно точки O равен нулю:

$$\sum_i \vec{M}_i^{\text{внутр}} = 0.$$

Соответственно равен нулю и суммарный момент относительно любой оси Z :

$$\sum_i M_{iz}^{\text{внутр}} = 0.$$

Таким образом, момент импульса системы может изменяться только под действием суммарного момента всех внешних сил. В результате выражение

(4.43а) принимает вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{внеш}, \quad (4.44)$$

где $\vec{M}^{внеш} = \sum_i \vec{M}_i^{внеш}$ – суммарный момент всех внешних сил; моменты $\vec{L}$ и $\vec{M}^{внеш}$ определены относительно одной и той же точки O заданной системы отсчета.

Моментом импульса механической системы относительно оси называется проекция на эту ось вектора момента импульса системы относительно любой точки, выбранной на данной оси.

Моментом силы механической системы относительно оси называется проекция на эту ось вектора момента силы относительно любой точки, выбранной на данной оси.

Из уравнения моментов (4.44) следует, что производная по времени от момента импульса системы *относительно неподвижной оси* равна суммарному моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой же оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{внеш}. \quad (4.44a)$$

Как и в случае одной частицы, согласно уравнению (4.44), приращение момента импульса системы за конечный промежуток времени t равно

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}^{внеш} dt, \quad (4.45)$$

т.е. приращение момента импульса системы равно импульсу суммарного момента всех внешних сил за соответствующий промежуток времени.

Из уравнения (4.44) следует **закон сохранения момента импульса механической системы:**

момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным, т.е. не изменяется со временем:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i(t) = const. \quad (4.46)$$

При этом моменты импульса $\vec{L}_i$ отдельных частей или частиц замкнутой системы относительно одной и той же точки системы отсчета могут изменяться со временем, что отмечено в (4.46). Закон сохранения момента импульса представляет собой самостоятельный общий принцип, являющийся обобщением опытных фактов.

Таким образом, можно на основании уравнений (4.44) и (4.46) для инерциальных систем отсчета заключить, что **причина изменения момента импульса системы** – действие других тел (через момент внешних сил взаимодействия).

Тема 5. Механика твердого тела

5.1. Момент импульса тела относительно неподвижной оси. Момент инерции. Теорема Штейнера

Уравнение моментов (4.44) справедливо для любой произвольно выбранной неподвижной оси. Но оно приобретает особенно простой вид для случая вращения вокруг неподвижной оси, если в качестве оси моментов выбрать ось вращения. Найдем выражение для момента импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения Z .

При вращении абсолютно твердого тела (системы n частиц) вокруг неподвижной оси Z каждая материальная точка тела (частица) массой m_i , чей радиус-вектор равен $\vec{r}_i$, движется по окружности постоянного радиуса R_i со скоростью $\vec{u}_i$, перпендикулярной радиусу R_i , рис. 5.1. Момент импульса отдельной частицы равен $L_i = m_i u_i r_i$ и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правой руки (совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$ на рис. 5.1). Учтем, что вектор $\vec{R}_i$ остается постоянным по величине и направление его всегда перпендикулярно к направлению вектора момента импульса: $\vec{R}_i \wedge \vec{L}_i$.

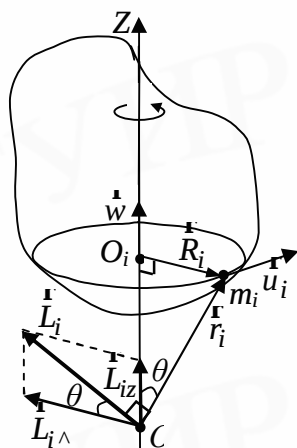


Рис. 5.1. К определению момента импульса тела относительно оси

Можно записать, что момент импульса тела относительно оси Z

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_i \sin \varphi = \sum_{i=1}^n m_i u_i R_i.$$

С другой стороны, при вращении по окружности $u_i = \omega_z R_i$, где ω_z – проекция вектора угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ на ось вращения. Тогда

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i \omega_z R_i^2 = \omega_z \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = \omega_z \sum_{i=1}^n I_{iz}, \quad (5.1)$$

где **момент инерции i -й точки** тела I_{iz} относительно оси вращения есть произведение массы этой точки на квадрат расстояния от нее до оси.

Моментом инерции тела (системы) относительно оси вращения Z называется физическая величина, равная сумме моментов инерции всех материальных точек системы, взятых относительно этой же оси, и определяемая суммой произведений масс n всех материальных точек тела (системы) на квадраты их расстояний до данной оси:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2. \quad (5.2)$$

На основании уравнений (5.1) и (5.2) можно написать для момента импульса вращающегося тела относительно оси вращения Z

$$L_z = I_z \omega_z. \quad (5.3)$$

В случае когда масса m тела непрерывно распределена по его объему, момент инерции тела выражается формулой

$$I = \int_0^m R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV, \quad (5.4)$$

где R – расстояние элементарной массы dm до оси вращения; $dm = \rho dV$ – масса малого элемента тела объемом dV ; ρ – плотность вещества тела.

Единица момента инерции в СИ – килограмм метр квадратный ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

Момент инерции твердого тела **зависит** от того, как распределена масса тела относительно интересующей нас оси, и является величиной аддитивной.

Главный момент инерции тела – это момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс тела.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**:

момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента его инерции I_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$I = I_C + ma^2. \quad (5.5)$$

Рассмотрим абсолютно твердое тело. Определим момент инерции тела относительно произвольной оси 2, рис. 5.2. Тогда пусть через центр масс тела C проходит ось 1, параллельная оси 2, расстояние между осями равно $|\vec{a}|$.

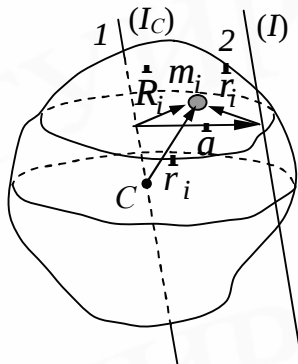


Рис. 5.2. К доказательству теоремы Штейнера

Пусть $\vec{R}_i$ и $\vec{r}_i$ – векторы, перпендикулярные осям 1 и 2 соответственно. Они проведены от осей в i -й элемент твердого тела массой m_i .

Рассчитаем момент инерции тела относительно оси 2, используя выражение (5.2):

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (\vec{R}_i - \vec{a})^2 = \\ &= \sum_i m_i R_i^2 + \sum_i m_i a^2 - 2\vec{a} \sum_i m_i \vec{R}_i, \end{aligned}$$

где $\sum_i m_i \vec{R}_i^2 = I_C$ – момент инерции тела относительно оси 1; $\sum_i m_i a^2 = ma^2$; $\sum_i m_i \vec{R}_i = 0$, так как ось 1 проходит через центр масс.

Докажем это утверждение.

Доказательство:

Пусть $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i -го элемента тела относительно центра масс. Радиус-вектор центра масс системы частиц относительно начала отсчета выбранной системы отсчета равен $\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$ по определению (4.7). В системе центра масс $\vec{r}_C = \vec{0}$ и, следовательно, относительно центра масс суммарный век-

тор $\ddot{\mathbf{a}} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{0}}$. Но $\dot{\mathbf{R}}_i$ – составляющая вектора $\dot{\mathbf{r}}_i$, перпендикулярная осям 1 и 2. Следовательно, если суммарный вектор равен нулю, то сумма его составляющих в плоскости, перпендикулярной осям 1 и 2, также равна нулю. *Что и требовалось доказать.*

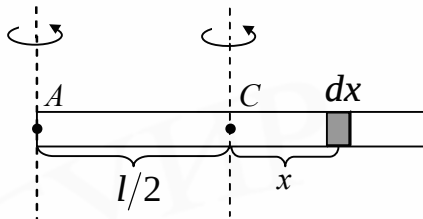


Рис. 5.3. К вычислению момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через точку C

Пример. Найдем момент инерции однородного прямого тонкого стержня массы m и длины l относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину (точка C), рис. 5.3.

Решение. Разобьем мысленно стержень на малые отрезки. Пусть x – расстояние от одного из таких элементов стержня до оси, а dx – его длина. Тогда момент инерции этого элемента

$$dI_C = x^2 dm = x^2 \rho S dx,$$

где S – площадь поперечного сечения стержня; ρ – плотность вещества стержня; $S dx = dV$ – элемент объема стержня.

Момент инерции одной половины стержня находим, интегрируя последнее выражение по x от 0 до $l/2$, а искомый момент инерции будет вдвое больше:

$$I_C = 2\rho S \int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{2}{3} \rho S \left(\frac{l}{2} \right)^3 = \frac{ml^2}{12}.$$

Тогда, например, относительно оси, проходящей через конец стержня (точка A), рис. 5.3, имеем

$$I = I_C + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{1}{3} ml^2.$$

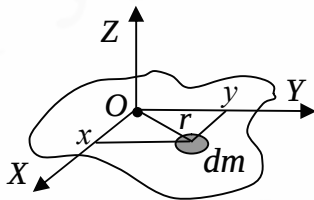


Рис. 5.4. К определению момента инерции плоской фигуры относительно оси Z

Для плоской фигуры моменты инерции *относительно трех взаимно перпендикулярных осей*, две из которых лежат в плоскости фигуры, оказываются связанными между собой простым соотношением. Из рис. 5.4 следует, что

$$dI_z = r^2 dm = (x^2 + y^2) dm = dI_x + dI_y.$$

Откуда

$$I_z = I_x + I_y. \quad (5.6)$$

5.2. Уравнение динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Z движение тела определяется уравнением, согласно уравнению моментов (4.44), как

$$dL_z/dt = M_z^{\text{внеш}},$$

где L_z и $M_z^{\text{внеш}}$ – соответственно момент импульса и момент внешних сил относительно оси вращения. Тогда продифференцируем уравнение (5.3) по вре-

мени и, используя выражение (4.44), получим уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси вращения Z:

$$\frac{d}{dt}(I_z \omega_z) = M_z^{\text{внеш}}. \quad (5.7)$$

Если тело в процессе вращения не деформируется, то его момент инерции не изменяется и его можно вынести в (5.4) из-под знака производной:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z^{\text{внеш}} \quad \text{или} \quad \boxed{I_z b_z = M_z^{\text{внеш}}}, \quad (5.8)$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси Z; $M_z^{\text{внеш}}$ – суммарный момент всех внешних сил относительно оси Z; $b_z = d\omega_z/dt$ – проекция вектора углового ускорения на ось Z. Таким образом, получаем уравнение (5.8) – математическую запись **уравнения динамики вращательного движения твердого тела** вокруг фиксированной оси.

Из выражения (5.8) видно, что β обратно пропорционально моменту инерции. Следовательно, I_z определяет инертные свойства твердого тела при вращении: при одном и том же значении момента сил $M_z^{\text{внеш}}$ тело с бóльшим моментом инерции приобретает меньшее угловое ускорение.

В **векторной форме** уравнение (5.8) имеет вид

$$I_z \dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{M}}_z^{\text{внеш}}, \quad (5.9)$$

где вектор $\dot{\mathbf{b}}$ всегда направлен вдоль оси вращения, а $\dot{\mathbf{M}}_z^{\text{внеш}}$ – это составляющая вектора момента внешних сил вдоль оси вращения.

Интегрирование уравнения (5.8) с учетом начальных условий – значений ω_0 и j_0 в начальный момент времени – позволяет полностью решить задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, т.е. найти зависимость от времени угловой скорости $\omega(t)$ и угла поворота $j(t)$.

5.3. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела (ось вращения неподвижна)

Рассмотрим абсолютно твердое тело, которое вращается около неподвижной оси, проходящей через него. Все точки движутся с одинаковой угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Учтем, что скорость i -й частицы вращающегося твердого тела $u_i = R_i \omega$, где R_i – радиус окружности вращения i -й частицы, и определим **кинетическую энергию вращающегося твердого тела**

$$E_k = \sum_i m_i \frac{u_i^2}{2} = \sum_i m_i R_i^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (5.10)$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения. Обратим внимание, что формула (5.10) подобна уравнению (4.14), определяющему кинетическую энергию тела, только масса тела заменена на момент инерции I , а линейная скорость – на угловую скорость ω .

Определим работу внешних сил при вращении твердого тела вокруг не-

подвижной оси. В соответствии с *законом изменения механической энергии системы* элементарная работа всех внешних сил равна приращению кинетической энергии тела $dA = dE_k$, или согласно выражению (5.10):

$$dA = d \left(\frac{I \omega^2}{2} \right).$$

Пусть ось Z совпадает с осью вращения. Тогда $\omega^2 = \omega_z^2$, где ω_z – проекция угловой скорости на ось Z , и

$$dA = I \omega_z d\omega_z = M_z^{\text{внеш}} \omega_z dt = M_z^{\text{внеш}} dj.$$

Если $M_z^{\text{внеш}}$ и dj имеют одинаковые знаки, то $dA > 0$. Иначе $dA < 0$. При повороте тела на конечный угол $\Delta j = j_2 - j_1$ **работа внешних сил** будет равна

$$A = \int_{j_1}^{j_2} M_z^{\text{внеш}} dj. \quad (5.11)$$

Таким образом, работа внешних сил при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси определяется действием момента $M_z^{\text{внеш}}$ этих сил относительно этой оси. Если силы таковы, что $M_z^{\text{внеш}} = 0$, то работу они не производят. Уместно отметить, что расчетная формула сравнима с формулой расчета работы, совершаемой силами при поступательном движении (4.13).

5.4. Плоское движение твердого тела. Уравнение динамики плоского движения. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении

Рассмотрим простейший случай движения тела, не имеющего закрепленных точек, – случай плоского движения. Движение точки называют **плоским**, если все точки ее траектории лежат в одной плоскости. **Плоское (плоско-параллельное) движение твердого тела** – это такое движение, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях.

Особенностью плоского движения твердого тела является то, что если оно вращается, то тогда ось вращения сохраняет свою *ориентацию* в пространстве и остается *перпендикулярной плоскости*, в которой движется центр масс. При этом достаточно рассмотреть движение одного из его сечений, например, того, в котором лежит центр масс. При разложении плоского движения на *поступательное* и *вращательное* скорость u поступательного движения определена неоднозначно – она зависит от выбора оси вращения, однако угловая скорость вращательного движения оказывается одной и той же.

Плоское движение твердого тела в данный момент времени можно представить как *чисто вращательное движение вокруг мгновенной оси вращения*, проходящей через неподвижную точку, скорость u которой равна нулю в неподвижной *лабораторной системе отсчета*, жестко связанной с Землей. Эта ось может находиться внутри или вне тела. В разные моменты времени поло-

жение мгновенной оси вращения изменяется с течением времени относительно неподвижной системы отсчета и относительно тела.

Если в качестве **оси вращения** выбрать ось, проходящую через центр масс, то уравнениями движения твердого тела будут:

1. **Уравнение движения центра масс**, определяющее скорость поступательного движения тела массой m

$$m \frac{d\dot{\mathbf{u}}_C}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (5.12)$$

где $\dot{\mathbf{u}}_C$ – скорость центра масс тела; $\sum_i \mathbf{F}_i$ – сумма всех внешних сил.

2. **Уравнение динамики плоского движения** относительно оси, проходящей через центр масс тела и неподвижной относительно тела, определяющее угловую скорость $\dot{\mathbf{w}}_C$ вращательного движения

$$I_C \frac{d\dot{\mathbf{w}}_C}{dt} = \mathbf{M}_C^{\text{внеш}}, \quad (5.13)$$

где I_C и $\mathbf{M}_C^{\text{внеш}}$ – момент инерции тела и момент внешних сил относительно этой оси соответственно.

Определим кинетическую энергию тела, совершающего *плоское движение*. Если рассматривать движение тела как вращение вокруг мгновенной оси, то элемент массы Dm_i имеет в данный момент времени линейную скорость $u_i = w r_i$, где r_i – расстояние от этого элемента до мгновенной оси. Кинетическая энергия отдельного элемента тела будет

$$\Delta E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i u_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 w^2,$$

а кинетическая энергия всего тела

$$E_k = \sum \Delta E_{ki} = \frac{w^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2 = \frac{I_1 w^2}{2}, \quad (5.14)$$

где I_1 – момент инерции тела относительно мгновенной оси. Но по теореме Штейнера (5.5) $I_1 = I_C + m r_0^2$, где r_0 – расстояние от мгновенной оси до центра масс и I_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс. Поэтому из выражения (5.14) получим

$$E_k = \frac{I_C w^2}{2} + \frac{1}{2} m r_0^2 w^2.$$

Введем в это выражение линейную скорость центра масс $u_C = w \cdot r_0$:

$$E_k = \frac{I_C w^2}{2} + \frac{m u_C^2}{2}. \quad (5.15)$$

Теорема Кёнига:

полная кинетическая энергия при плоском движении твердого тела равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений (вращение рассматривается вокруг оси, проходящей через центр масс).

Если рассматривать плоское движение как вращение вокруг *мгновенной*

оси, то кинетическая энергия тела есть энергия вращательного движения (см. формулу (5.14)).

Тема 6. Неинерциальные системы отсчета

6.1. Уравнение движения в неинерциальных системах отсчета, движущихся поступательно

Основные положения механики Ньютона и вытекающие из них следствия могут быть справедливы только для инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Всякая система, которая движется с ускорением по отношению к инерциальной системе отсчета, является **неинерциальной**.

Практически удобно пользоваться системами координат, которые имеют ускорение по отношению к Солнцу и звездам, например, системой координат, связанной с Землей. В таких неинерциальных системах координат механика Ньютона уже не справедлива.

В механике неинерциальных систем координат являются основными следующие положения:

1. Ускорения тел вызываются силами, однако силы не обязательно обусловлены действием тел друг на друга;

2. В неинерциальных системах отсчета на тела действуют **силы инерции** – силы, обусловленные тем, что система отсчета обладает ускорением по отношению к инерциальной системе отсчета. Они не вызваны взаимодействием тел. Поэтому на силы инерции третий закон Ньютона не распространяется;

3. Все силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела. Всем телам, независимо от их массы, силы инерции сообщают одинаковое ускорение.

Сила инерции – это векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее ускорение (ускорение неинерциальной системы отсчета) и направленная противоположно ускорению.

Введение сил инерции позволяет ввести для неинерциальных систем отсчета уравнение, по форме аналогичное уравнению *второго закона* Ньютона (3.5). Сохраняют свой прежний вид и уравнения движения, вытекающие из этого положения. Но в них будут учитываться, кроме «обычных» сил, обусловленных действием других тел на данное тело, также и силы инерции $\dot{\vec{F}}_{ин}$:

$$\boxed{m\dot{\vec{a}}' = \sum \dot{\vec{F}}_{взаим} + \sum \dot{\vec{F}}_{ин}}, \quad (6.1)$$

где $\dot{\vec{a}}'$ – ускорение тела в неинерциальной системе отсчета; $\sum \dot{\vec{F}}_{взаим}$ – геометрическая сумма всех сил, действующих на данное тело со стороны других тел; $\sum \dot{\vec{F}}_{ин}$ – сумма сил инерции, действующих на тело. Уравнение (6.1) называется **уравнением движения в неинерциальных системах отсчета**, или **основным уравнением динамики относительного движения материальной точки**: масса тела, умноженная на его ускорение относительно неинерциальной системы отсчета, будет равна по величине и направлению равнодействующей всех сил, приложенных к телу, включая и силы инерции.

В механике неинерциальных систем отсчета будем рассматривать движение тел и систем отсчета только со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. При этом ограничении можно считать, что движение неинерциальной системы отсчета не влияет на свойства таких основных измерительных приборов, как линейки и часы.

Определим, как связаны между собой скорости и ускорения в инерциальной и неинерциальной системах отсчета. Рассмотрим случай, когда неинерциальная система отсчета K' (с координатными осями X', Y', Z') движется поступательно (при таком движении любой выделенный в теле отрезок остается параллельным самому себе) с ускорением $\dot{\mathbf{r}}_0$ по отношению к условно неподвижной инерциальной системе отсчета K (с координатными осями X, Y, Z).

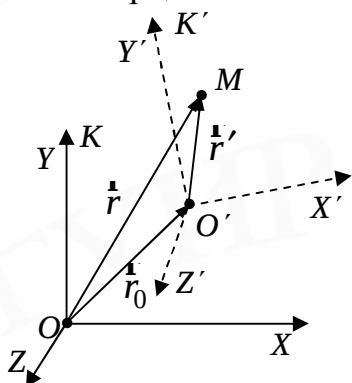


Рис. 6.1. К выводу закона преобразования скорости точки при переходе от инерциальной к неинерциальной системе отсчета

Обозначим радиус-вектор произвольной точки M в неподвижной системе K как $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, а в движущейся системе K' как $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'M}$. При этом $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OO'}$ – это радиус-вектор точки O' (точка O' – начало координат неинерциальной системы отсчета), измеренный в системе K , рис. 6.1.

Поскольку движение системы K' поступательное, то ее орты $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ имеют постоянное направление. Изменение их направления в пространстве может быть обусловлено только вращением подвижной системы отсчета.

Абсолютным движением точки называется ее движение по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета, условно принимаемой за неподвижную и называемую абсолютной системой отсчета.

Относительным движением точки называется ее движение по отношению к движущейся (подвижной) системе отсчета, которую называют относительной системой отсчета. **Переносное движение** точки – это движение точки, покоящейся в движущейся системе отсчета, относительно неподвижной инерциальной системы отсчета.

В каждый момент времени значения радиус-векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ произвольной точки M связаны соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}',$$

где $\mathbf{r}' = x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'$.

Тогда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'$. Продифференцируем последнее выражение по времени:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt}.$$

Учитывая, что $\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{u}_0$ есть скорость переносного движения, т.е. скорость поступательного движения системы отсчета K' относительно системы K , полу-

чим **закон преобразования скорости точки** при переходе от инерциальной системы отсчета к неинерциальной:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\mathbf{u}}', \quad (6.2)$$

где $\dot{\mathbf{u}}'$ – относительная скорость точки, т.е. скорость точки относительно движущейся системы K' ; $\dot{\mathbf{u}}$ – абсолютная скорость точки, т.е. скорость точки в неподвижной системе координат K . Уравнение (6.2) имеет тот же вид, что и классический закон преобразования скорости точки при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (3.10).

Возьмем вторую производную по времени от $\dot{\mathbf{r}}$:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2 x'}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y'}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z'}{dt^2} \mathbf{k}.$$

Полученное уравнение эквивалентно следующему выражению:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_0 + \dot{\mathbf{a}}', \quad (6.3)$$

где $\frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = \dot{\mathbf{a}}_0$ – это переносное ускорение, т.е. ускорение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета; $\dot{\mathbf{a}}$ – ускорение точки в инерциальной системе отсчета; $\dot{\mathbf{a}}'$ – ускорение точки в неинерциальной системе отсчета.

Полученные формулы (6.2) и (6.3) справедливы для поступательного переносного движения.

Когда неинерциальная система координат движется поступательно с ускорением $\dot{\mathbf{a}}_0$ по отношению к инерциальной, в ней действует **поступательная сила инерции** (F_{ncu}):

$$\dot{\mathbf{F}}_{ин} = \dot{\mathbf{F}}_{ncu} = -m\dot{\mathbf{a}}_0, \quad (6.4)$$

где m – масса тела, на которое эта сила инерции действует.

6.2. Вращающиеся неинерциальные системы отсчета.

Центробежная сила инерции и сила Кориолиса (без вывода)

Рассмотрим теперь случай, когда тело покоится во вращающейся с постоянной угловой скоростью неинерциальной системе координат.

Пусть на горизонтальной подставке, вращающейся вокруг оси OO' с угловой скоростью ω относительно неподвижной системы координат, установлен маятник, рис. 6.2. Для наблюдателя в неподвижной системе отсчета, например, связанной с помещением, где установлена подставка, нить, на которой подвешен шарик массы m , отклоняется от вертикали наружу (от оси вращения) на угол α , описывая окружность радиуса r . При этом должен выполняться второй закон Ньютона (3.3):

$$\dot{\mathbf{T}} + m\dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{F}}_{yc},$$

где $\dot{\mathbf{T}}$ – сила натяжения нити; центробежная сила $\dot{\mathbf{F}}_{yc} = -m\omega^2 \mathbf{r}$ – равнодействующая сил тяжести и силы натяжения нити. Знак минус свидетельству-

ет о том, что сила $\vec{F}_{\text{цс}}$ направлена в сторону, противоположную радиус-вектору $\vec{r}$, т.е. к центру вращения, рис. 6.2.

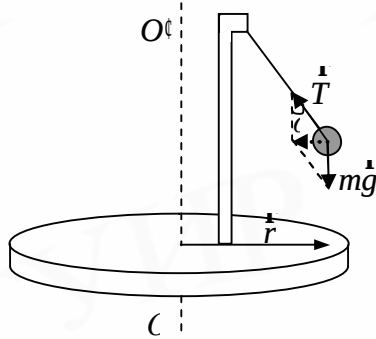


Рис. 6.2. Пример вращающейся неинерциальной системы отсчета

Для наблюдателя на подставке маятник и шарик покоятся ($\dot{\vec{a}}' = 0$):

$$m\dot{\vec{a}}' \neq \vec{T} + m\vec{g}.$$

Отклонение шарика от вертикали объясняется появлением сил инерции. Поскольку шарик покоится, то, следовательно, центростремительная сила уравнивается направленной от оси вращения центробежной силой инерции. Действительно, согласно уравнению движения (6.1):

$$\begin{aligned} m\dot{\vec{a}}' &= \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}}, \\ \vec{F}_{\text{ин}} &= -\vec{F}_{\text{цс}}. \end{aligned}$$

В системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью, на покоящееся в ней тело действует **центробежная сила инерции** $\vec{F}_{\text{цб}}$, которая зависит от угловой скорости вращения системы отсчета $\dot{\vec{\omega}}$ и радиус-вектора $\vec{r}$ положения рассматриваемой точки в движущейся системе отсчета:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2 \vec{r}}. \quad (6.5)$$

Переносное ускорение при этом будет $\dot{\vec{a}}_c = -\omega^2 \vec{r}$.

Если тело движется во вращающейся с постоянной угловой скоростью $\dot{\vec{\omega}}$ неинерциальной системе координат, которая перемещается поступательно с ускорением $\dot{\vec{a}}_0$ относительно неподвижной инерциальной системы отсчета, то переносное ускорение $\dot{\vec{a}}_c = \dot{\vec{a}}_0 - \omega^2 \vec{r}$. Можно показать, что на тело будут действовать сразу три силы инерции:

1) *поступательная сила инерции* $\dot{\vec{F}}_{\text{нси}} = -m\dot{\vec{a}}_0$ (см. формулу (6.4)). Она возникает при поступательном движении неинерциальной системы отсчета;

2) *центробежная сила инерции* $\dot{\vec{F}}_{\text{цб}} = m\omega^2 \vec{r}$ (см. уравнение (6.5)). Она действует во вращающихся системах отсчета и на движущиеся, и на неподвижные тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние r ;

3) *кориолисова сила инерции*

$$\boxed{\dot{\vec{F}}_K = 2m[\dot{\vec{u}}', \vec{\omega}]} \quad (6.6)$$

действует во вращающейся системе координат только на движущиеся с относительной скоростью $\dot{\vec{u}}'$ тела. Когда скорость этого движения $\dot{\vec{u}}'$ обращается в нуль, эта сила исчезает. Она зависит от угловой скорости вращения и относительной скорости тела.

Таким образом, согласно уравнению движения (6.1) **основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\vec{\omega}}$ вокруг оси, перемещающейся поступательно с ускорением $\dot{\vec{a}}_0$** , имеет следующий вид:

$$\boxed{m\dot{\mathbf{a}}' = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}_{ncu} + \dot{\mathbf{F}}_{уб} + \dot{\mathbf{F}}_K,} \quad (6.7)$$

где $\dot{\mathbf{F}}$ – сумма «обычных» сил, действующих на тело со стороны других тел. В инерциальной системе отсчета тело бы двигалось из-за них с ускорением. Даже при $\dot{\mathbf{F}} = 0$ тело в неинерциальной системе отсчета будет двигаться в общем случае с ускорением отличным от нуля.

6.3. Принцип эквивалентности

Когда в неинерциальной системе отсчета возникают какие-либо новые силы, то, только убедившись, что нигде не появились новые тела, со стороны которых действуют силы тяготения, можно утверждать, что вновь появившиеся силы – это силы инерции. Факт, что силы инерции, как и силы тяготения, пропорциональны массам тел, приводит к следующему важному заключению.

Представим себе, что мы находимся в некоторой закрытой лаборатории и не имеем возможности наблюдать внешний мир. Допустим, что мы также не знаем, где находится лаборатория: в космическом пространстве или, например, на Земле. Замечая, что все тела независимо от массы падают в лаборатории с одинаковым ускорением, мы не можем однозначно установить, чем вызвано это ускорение – полем тяготения, ускоренным поступательным движением самой лаборатории или, наконец, обеими этими причинами вместе. Никакие опыты по свободному падению тел в такой лаборатории не могут отличить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

Эйнштейн сформулировал **принцип эквивалентности сил тяготения и сил инерции**: все физические явления в однородном поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем однородном поле сил инерции.

Поэтому вообще никакими физическими опытами невозможно отличить однородное поле сил тяготения от однородного поля сил инерции.

6.4. Работа внешних сил при вращении твердого тела

В неинерциальных системах координат не существует замкнутых систем тел. Силы инерции для всякой ограниченной системы тел являются *внешними*.

Согласно *второму закону Ньютона* (3.3) в неинерциальных системах отсчета производная полного импульса системы тел равна сумме внешних сил, действующих на систему со стороны внешних тел, а также сил инерции, действующих на все тела системы:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{ин}. \quad (6.8)$$

Изменение полной энергии системы тел (в отсутствие сил трения) равно сумме работ $A_{внеш}$ внешних сил (4.21) и работ $A_{ин}$ всех внешних сил инерции, действующих на систему:

$$\boxed{A_{внеш} + A_{ин} = E_2 - E_1,} \quad (6.9)$$

где $E_2 - E_1$ – приращение полной механической энергии системы.

Закон сохранения полной механической энергии не выполняется в неинерциальных системах координат.

Согласно полученному в подтеме 5.3 выражению для работы A внешних сил при повороте твердого тела на конечный угол j_0 (5.11) можно записать в случае неинерциальных систем отсчета, что

$$A = \int_0^{j_0} M_z^{\text{внеш}} dj ,$$

где момент всех внешних сил $M_z^{\text{внеш}}$ относительно оси вращения Z включает момент всех сил инерции $M_z^{\text{ин}}$ относительно этой оси.

6.5. Гироскопы. Гироскопический эффект. Прецессия гироскопа

Свободные оси (оси свободного вращения) – это такие оси вращения тел, которые сохраняют свою ориентацию в пространстве без действия на них внешних сил. В общей теории доказывается, что для любого твердого тела существуют главные оси инерции – три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела, – которые могут служить свободными осями.

Можно показать, что вращение вокруг главных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции оказывается устойчивым, а вращение вокруг других осей и оси со средним моментом – неустойчивым.

Гироскоп – это массивное твердое симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью $\dot{w}$ вокруг своей оси симметрии, являющейся свободной осью.

Если ось симметрии гироскопа закреплена или она поворачивается с угловой скоростью $w_0 \ll w$, то момент импульса гироскопа направлен по оси вращения (оси симметрии) параллельно угловой скорости $\dot{w}$:

$$\vec{L} = I \vec{w} . \quad (6.10)$$

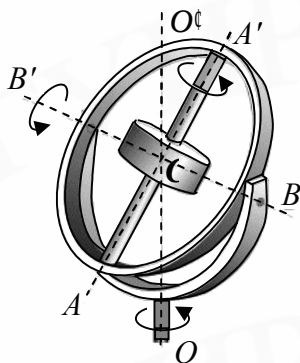


Рис. 6.3. Гироскоп на кардановом подвесе

Широкое распространение получил **гироскоп на кардановом подвесе**, когда однородное тело вращения закреплено в центре масс, рис. 6.3. Положение тела в подвесе должно быть таким, чтобы *оси свободного вращения* AA' , BB' и ось OO' пересекались в центре масс. В этом случае при любых возможных движениях тела его центр масс остается неподвижным. При этом ось AA' (в данном случае – ось симметрии тела) может занимать произвольную ориентацию в пространстве.

Если гироскоп раскручен вокруг оси симметрии, то ориентация оси вращения гироскопа остается неизменной, когда момент внешних сил относительно закрепленного центра масс гироскопа равен нулю. Как следует из уравнения моментов (4.44),

$\dot{\vec{L}} = J\dot{\vec{\omega}} = \text{const}$, т.е. выполняется равенство (6.10). Действительно, момент силы тяжести относительно закрепленного центра масс свободно вращающегося гироскопа будет равен нулю, так как эта сила приложена к центру масс (центр вращения C совпадает с центром масс). Момент сил трения пренебрежимо мал.

Таким образом, поворачивая подставку, на которой расположен карданов подвес, можно убедиться, что при произвольных поворотах подставки ось гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве.

Чтобы ось гироскопа изменила свое направление в пространстве, необходимо, согласно уравнению (4.44), отличие от нуля момента внешних сил. Тогда наблюдается явление – **гироскопический эффект** – гироскоп поворачивается так, чтобы его оси свободного и вынужденного вращения совпадали. Используя уравнение моментов (уравнение динамики вращательного движения), можно показать, что если ось быстро вращающегося свободного гироскопа с моментом импульса $\vec{L}$ стараться повернуть моментом сил $\vec{M}$, то она начнет вращаться с угловой скоростью $\dot{\vec{\omega}}_0$ в таком направлении, чтобы векторы $\dot{\vec{\omega}}_0$, $\vec{L}$ и $\vec{M}$ составляли правую тройку векторов:

$$\vec{M} = \dot{\vec{\omega}}_0 \times \vec{L}.$$

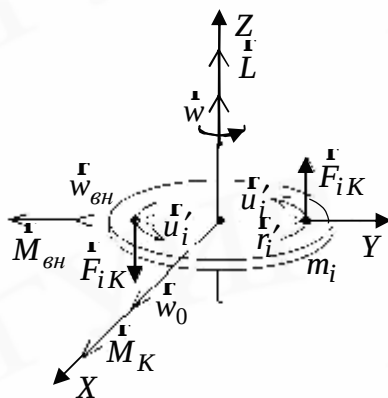


Рис. 6.4. К объяснению гироскопического эффекта ($\dot{\vec{\omega}}_0$ – угловая скорость, с которой поворачивается ось гироскопа)

$\vec{F}_{iK} = 2m_i[\dot{\vec{u}}_i, \dot{\vec{\omega}}_{\text{вн}}]$ (см. формулу (6.6)). Момент этих сил $\vec{M}_K$ направлен вдоль оси X , и именно он вызывает вращение оси со скоростью $\dot{\vec{\omega}}_0$.

Если ось гироскопа закреплена подшипниками, то из-за данного эффекта возникают **гироскопические силы**, действующие на опоры, в которых вращается ось гироскопа.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда к оси гироскопа приложена сила, линия действия которой не проходит через точку закрепления O .

Прецессия гироскопа – это такой тип движения, когда в результате постоянного действия момента внешней силы ось свободного гироскопа вращает-

ся вокруг направления данной внешней силы.

Пример прецессии – движение оси детской игрушки – юлы с заостренным концом (рис. 6.5), т.е. гироскопа, имеющего одну точку опоры. Юла, раскрученная вокруг своей оси и поставленная на горизонтальную плоскость слегка наклонно, начинает прецессировать вокруг вертикальной оси под действием момента пары сил тяжести и нормальной реакции опоры: $\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{l}} \times m\mathbf{g}$, где $\mathbf{l} = \mathbf{OC}$.

Скорость, с которой ось вращения движется относительно вертикальной оси, называется *угловой скоростью прецессии* Ω .

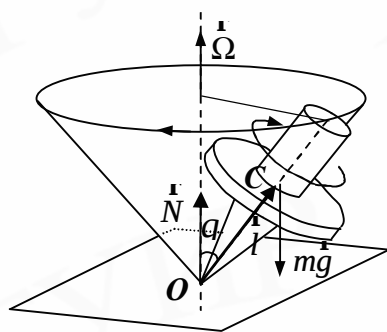


Рис. 6.5. Пример гироскопа с одной точкой опоры – детская юла

Можно доказать, что для вращающегося волчка угловая скорость прецессии не зависит от угла наклона волчка θ , она обратно пропорциональна моменту импульса волчка:

$$\Omega \sim \frac{1}{L}.$$

Чем быстрее вращается волчок, тем больше момент импульса и тем медленнее он прецессирует. Причем мгновенное исчезновение момента силы, например тяжести, приводит к мгновенному же исчезновению прецессии, т.е. прецессионное движение является *безынерционным*.

Если рассматривать качение наклонного диска, то на него будет действовать опрокидывающий момент сил тяжести и реакции опоры. Легкий диск упадет значительно быстрее, чем массивный, из-за малого значения момента импульса (скорость прецессии больше).

Известно, что прецессия обеспечивает устойчивость движения. Впервые гироскоп использовал французский физик Ж. Фуко (XIX в.) для доказательства вращения Земли. Первый в Беларуси маятник Фуко установлен в Белорусском государственном педагогическом университете им. Максима Танка (сентябрь 2004 г., Минск).

Свойствами гироскопов обладают вращающиеся небесные тела, винты самолетов и т.д. Например, гироскопические устройства и приборы широко применяются в ракетной и космической технике, для целей навигации (указатели стран света, горизонта и др.), при проведении топографических и геодезических работ, строительстве метрополитенов, при бурении скважин.

Тема 7. Колебательные процессы

7.1. Гармонические колебания

Колебаниями называются движения или процессы, которые обладают определенной повторяемостью во времени. Система, совершающая колебания, называется **колебательной системой** или **осциллятором**.

Физическая природа колебаний может быть разной – различают механические, электромагнитные и другие колебания.

Колебания называются **свободными (собственными)**, если они происходят в системе, которая предоставлена себе после того, как она выведена из положения равновесия.

Вынужденные колебания – это колебания, которые происходят под действием периодически изменяющейся внешней силы, например в случае механических колебаний $F = F_0 \cos \omega t$.

Гармонические колебания – это колебания, при которых колеблющаяся физическая величина изменяется по закону синуса или косинуса.

Различные периодические процессы (процессы, которые повторяются через равные промежутки времени) могут быть представлены как сумма (суперпозиция) гармонических колебаний.

Гармоническое колебание величины x описывается уравнением типа

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + j_0), \quad (7.1)$$

где $x(t)$ – отклонение колеблющейся физической величины от равновесного значения; A – **амплитуда гармонических колебаний** – максимальное значение колеблющейся величины; ω_0 – **циклическая (круговая) частота колебаний**; φ_0 – начальная фаза колебаний в момент времени $t = 0$ (определяется выбором начала отсчета времени); $j(t) = (\omega_0 t + j_0)$ – **фаза колебаний** в момент времени t , выраженная в радианах, – определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени. Для материальной точки с массой m величина x называется **смещением тела** из положения равновесия. Отметим, что амплитуда и частота гармонических колебаний постоянны. Так как $\cos$ изменяется в пределах от $+1$ до -1 , то величина x меняется от $+A$ до $-A$. Поскольку $\cos(a + 2\pi) = \cos a$, то x не изменяется, когда фаза колебаний получает приращение 2π .

Периодом колебаний T называется наименьший промежуток времени, за который система, совершающая колебания, снова возвращается в то же состояние, в котором она находилась в начальный момент, выбранный произвольно. При этом фаза получает приращение 2π :

$$\omega_0(t + T) + j_0 = (\omega_0 t + j_0) + 2\pi.$$

Отсюда получается, что

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (7.2)$$

Частотой колебаний ν называется величина, обратная *периоду колебаний*, – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (7.3)$$

Единица частоты в СИ – герц (Гц): $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

1 Гц – это частота периодического процесса, при котором за 1 с совершается одно полное колебание.

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия, принятого за начало координат, рис. 7.1. Определим для колеблющейся точки следующие величины.

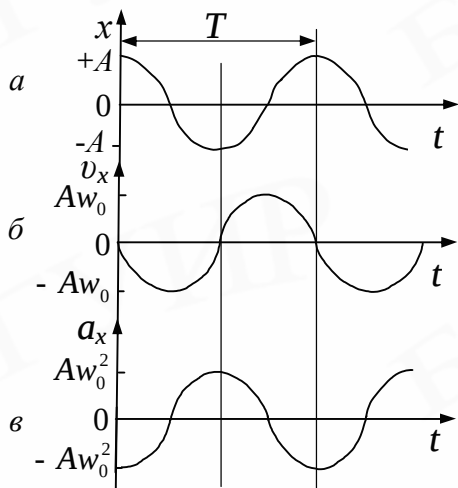


Рис. 7.1. Гармонические колебания ($\varphi_0 = 0$):

a – зависимость смещения x от времени t ; b – зависимость скорости v_x от времени t ; c – зависимость ускорения a_x от времени t

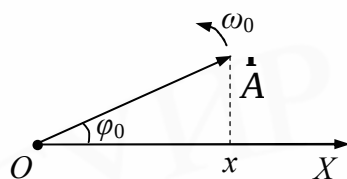


Рис. 7.2. Изображение гармонических колебаний методом векторных диаграмм

Смещение: $x = A \cos(\omega_0 t + j_0)$, рис. 7.1, а. (7.4)

Поскольку частица движется, совершая колебания, то она обладает скоростью и ускорением.

Скорость: $v_x = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + j_0) = A\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + j_0 + \frac{\pi}{2})$, рис. 7.1, б. (7.5)

Ускорение: $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + j_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + j_0 + \pi)$, рис. 7.1, в. (7.6)

Как следует из формулы (7.5), скорость опережает смещение на $\pi/2$, а ускорение, согласно выражению (7.6), – на π . Ускорение и смещение находятся в противофазе.

Амплитуды скорости и ускорения равны соответственно $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$. Скорость и ускорение, как следует из уравнений (7.5) и (7.6), совершают гармонические колебания с той же циклической частотой, что и смещение x .

Гармонические колебания можно изобразить графически **методом векторных диаграмм (методом вращающегося вектора амплитуды)**, рис. 7.2.

Из произвольной точки O , выбранной на оси X , под углом φ_0 , равном начальной фазе колебания, откладывается вектор $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде A рассматриваемого колебания.

Если этот вектор будет вращаться вокруг точки O с угловой скоростью, равной ω_0 , то проекция вектора на ось X будет совершать колебания по закону $x = A \cos(\omega_0 t + j_0)$.

Экспоненциальная форма записи гармонических колебаний. Согласно формуле Эйлера для комплексных чисел

$$e^{ij} = \cos j + i \sin j,$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $x = \cos j$ – действительная или вещественная

часть комплексного числа и обозначается $\operatorname{Re}(e^{ij})$; $h = \sin j$ – мнимая часть комплексного числа, обозначается $\operatorname{Im}(e^{ij})$. Поэтому уравнение (7.1) можно записать в комплексной экспоненциальной форме

$$x = \operatorname{Re} \tilde{x},$$

где $\tilde{x} = A^* e^{i(w_0 t + j_0)}$.

Физический смысл имеют отдельно вещественная и мнимая части. Вещественная часть комплексной функции $\tilde{x}$ представляет собой гармоническое колебание:

$$\operatorname{Re} \tilde{x} = A^* \cos(w_0 t + j_0) = x.$$

7.2. Уравнение гармонических колебаний без трения. Его решение

Сопоставляя уравнения (7.1) и (7.6) для смещения и ускорения материальной точки, можно записать **дифференциальное уравнение гармонических колебаний**:

$$\ddot{x} + w_0^2 \cdot x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + w_0^2 \cdot x = 0. \quad (7.7)$$

Его решение

$$x = A^* \cos(w_0 t + j_0). \quad (7.8)$$

Во всех случаях, когда имеется уравнение вида (7.7) $\ddot{x} + b x = 0$, его решение является величиной, изменяющейся по гармоническому закону (7.8), причем $\sqrt{b} = w_0$ – круговая частота.

Если положение системы может быть описано одним единственным параметром $x(t)$, зависящим от времени, то такая система имеет одну степень свободы.

В механике система с одной степенью свободы в состоянии *устойчивого равновесия* будет совершать гармонические колебания (малые собственные колебания) при выполнении следующего **условия**:

на частицу (или систему частиц) должна действовать сила или момент сил, пропорциональные смещению частицы из положения равновесия и стремящиеся вернуть ее в положение равновесия.

Движение таких и подобных им систем можно описать в соответствии со вторым законом Ньютона (3.3). Тогда сила, действующая вдоль оси X на колеблющуюся материальную точку массой m , учитывая уравнение (7.6), равна

$$\begin{aligned} F_x &= m \cdot a_x = m \cdot A^* w_0^2 \cdot \cos(w_0 t + j_0 + p) = -m \cdot w_0^2 \cdot A^* \cos(w_0 t + j_0) = \\ &= -m \cdot w_0^2 \cdot x = -k \cdot x, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где x – координата, характеризующая положение колеблющегося тела, например, смещение груза, угол отклонения маятника и т.д.; k – квазижесткость (коэффициент упругости):

$$k = m \cdot w_0^2. \quad (7.10)$$

В общем случае k – это коэффициент пропорциональности между восстанавливающей силой и смещением или моментом восстанавливающей силы и угловым смещением.

Силы типа (7.9) называются **квазиупругими** независимо от их природы. Именно квазиупругий характер силы служит критерием малых колебаний.

7.3. Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятник (малые колебания)

Ознакомившись с закономерностями и характеристиками гармонических колебаний, применим полученные знания для изучения гармонического осциллятора. Силами трения будем пренебрегать.

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая гармонические колебания, описываемые дифференциальным уравнением, имеющим вид (7.7):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0.$$

Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, математический и физический маятники.

Маятник – твердое тело, совершающее под действием приложенных сил колебания около неподвижной точки или оси.

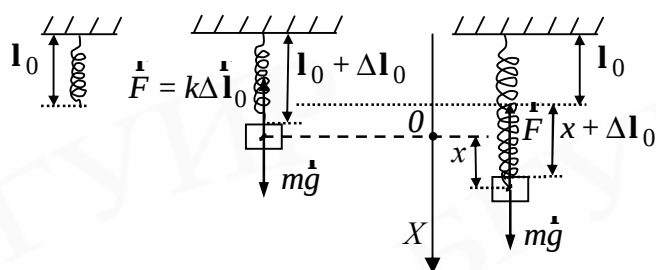


Рис. 7.3. Пружинный маятник

Пружинный маятник – это груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине, массой которой можно пренебречь, и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F_x = -k \cdot x$, где k – жесткость пружины.

Пусть l_0 – длина нерастянутой пружины, рис. 7.3. Под действием веса тела пружина растянется на Δl_0 и тело займет положение равновесия $x = 0$. В этом положении сила тяжести mg уравновешивается упругой силой $k\Delta l_0$:

$$mg = k\Delta l_0. \quad (7.11)$$

Выберем ось X , положительное направление которой направлено вниз. Если сместить тело вниз на расстояние x , то удлинение пружины составит $\Delta l_0 + x$. Поэтому результирующая сила, действующая на тело, так как со стороны растянутой пружины действует сила, направленная вверх, будет иметь вид

$$F_x = mg - k(\Delta l_0 + x) = -kx.$$

С учетом уравнения (7.11) имеем, что результирующая сила $F_x = -kx$ имеет характер квазиупругой силы. Поэтому груз будет совершать гармонические колебания. По второму закону Ньютона (3.3) получаем уравнение движения пружинного маятника вида (7.7):

$$m\ddot{x} = -kx \text{ или } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (7.12)$$

Следовательно, решение дифференциального уравнения

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + j_0),$$

где циклическая частота и период будут равны соответственно

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7.13)$$

Кинетическая энергия пружинного маятника будет выражаться как $E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$, а потенциальная энергия – $E_p = \frac{kx^2}{2}$.

Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой нити длиной ℓ и колеблющейся под действием силы тяжести без трения.

Небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити, когда размерами тела по сравнению с длиной нити можно пренебречь, является хорошим приближением математического маятника.

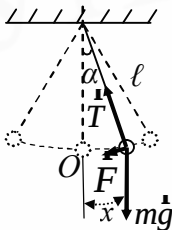


Рис. 7.4. Математический маятник

При малых углах отклонения α можно считать $x \approx \ell \alpha$, где x – линейное смещение вдоль траектории точечной массы (шарика) от положения равновесия в точке O , рис. 7.4. Если возвращающая сила пропорциональна x или α , то колебания будут гармоническими. Возвращающая сила – составляющая силы тяжести груза, касательная к траектории шарика – определяется так

$$F_x = -mg \cdot \sin \alpha \approx -mg \cdot \alpha = -mg \cdot \frac{x}{\ell}.$$

Уравнение движения записывается как

$$m\ddot{x} = F_x = -mg \frac{x}{\ell} \text{ или } \ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0, \quad (7.14)$$

т.е. имеет вид закона (7.1). Тогда частота и период колебаний определяются как

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (7.15)$$

Следовательно, частота малых колебаний зависит от длины маятника $\ell^{-1/2}$, но не от массы тела. Формула (7.15) для периода колебаний математического маятника называется **формулой Томсона**. Согласно (7.15) период колебаний математического маятника пропорционален его длине в степени $1/2$.

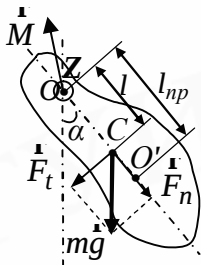


Рис. 7.5. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной неподвижной оси, не проходящей через центр масс тела и называемой **осью подвеса маятника**.

В данном случае тело нельзя рассматривать как материальную точку. Ось вращения жестко связана с телом.

Выберем положительное направление отсчета угла α

против часовой стрелки, ось вращения Z , проходящая через точку подвеса O , направлена на нас, рис. 7.5.

Пусть физический маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол α . Тогда уравнение вращательного движения маятника в проекции на ось Z (см. уравнение динамики вращательного движения твердого тела (5.8)) примет вид

$$M_z = I \frac{dw_z}{dt} = I \cdot \ddot{\alpha},$$

где M_z – момент возвращающей силы; I – момент инерции маятника относительно оси вращения Z ; $\frac{dw_z}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ – угловое ускорение.

С другой стороны, колебания физического маятника будут гармоническими только тогда, когда $\sin \alpha \approx \alpha$ (малые углы отклонения). Проекция момента силы тяжести на ось Z будет

$$M_z = F_t l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha,$$

где $F_t = -mg \cdot \sin \alpha$ – возвращающая сила; l – расстояние между точкой подвеса и центром масс C маятника; $l \sin \alpha$ – плечо силы.

Тогда для малых амплитуд можно записать уравнение колебаний физического маятника

$$I\ddot{\alpha} + mgl \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I} \alpha = 0. \quad (7.16)$$

Решением дифференциального уравнения является функция $\alpha = \alpha_m \cdot \cos(\omega_0 t + j)$ с циклической частотой и периодом

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{g}{l_{np}}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{np}}{g}}, \quad (7.17)$$

где длина $l_{np} = \frac{I}{ml}$ – приведенная длина физического маятника. Заметим, что квазиупругим в рассмотренном случае является момент силы тяжести, пропорциональный углу отклонения α .

Приведенная длина l_{np} физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Точка O' на продолжении прямой OC , отстоящая от оси подвеса на расстоянии l_{np} , называется **центром качания** физического маятника.

Точка подвеса и центр качания обладают **свойством взаимности**. Можно показать, используя теорему Штейнера, что при переносе точки подвеса в центр качания O' период колебаний при этом не изменится, поскольку прежняя точка подвеса становится новым центром качания O' .

Математический маятник можно представить как частный (предельный) случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в его центре масс. Действительно, при этом $I = ml^2$ и, следовательно, согласно выражению

(7.17), будет $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, что совпадает с формулой (7.15).

7.4. Энергия гармонических колебаний

Начальное смещение и начальная скорость определяют тот начальный запас потенциальной и кинетической энергии, который сообщен колеблющемуся телу. Если силы трения отсутствуют, то этот начальный запас энергии остается неизменным при колебаниях.

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания, равна

$$E_k = \frac{mu^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 t + j_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} \cdot [1 - \cos 2(\omega_0 t + j_0)]. \quad (7.18)$$

Потенциальная энергия материальной точки при этом будет равна

$$\begin{aligned} E_p &= -\int_0^x F dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 \cdot x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 t + j_0) = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} \cdot [1 + \cos 2(\omega_0 t + j_0)]. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Графики изменения $E_p(t)$ и $E_k(t)$ со временем изображены на рис. 7.6, а, б. Частота изменения E_p и E_k равна частоте $2\omega_0$. Значения E_p и E_k сдвинуты друг относительно друга по фазе на $\pi/2$.

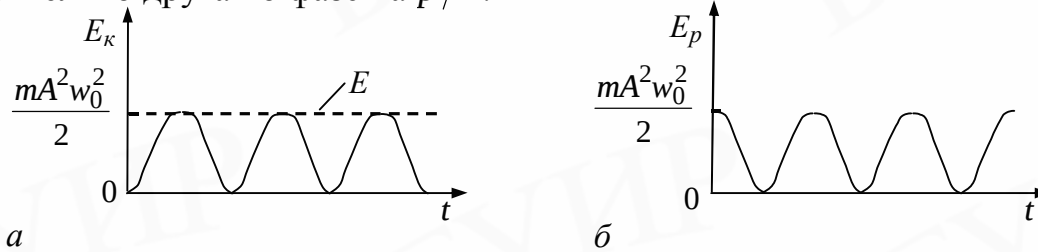


Рис. 7.6. Графики зависимости от времени энергии гармонических колебаний:

а – полная E и кинетическая E_k энергия при $\varphi_0 = 0$ ($E_k \sim \sin^2(\omega_0 t + j_0)$);

б – потенциальная E_p энергия при $\varphi_0 = 0$ ($E_p \sim \cos^2(\omega_0 t + j_0)$)

Квазиупругая сила является *консервативной*. Поэтому **полная механическая энергия E гармонического колебаний** с течением времени должна оставаться постоянной и определяется по формуле

$$E = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mu_{\max}^2}{2}, \quad (7.20)$$

где $u_{\max} = A\omega_0$ – амплитуда скорости (см. формулу (7.5)). Таким образом, E пропорциональна квадрату амплитуды смещения или амплитуды скорости.

Важно отметить, что колебательная система будет гармоническим осциллятором лишь при условии $E_p \sim x^2$, т.е. когда потенциальная энергия пропорциональна квадрату смещения из положения равновесия. Это условие является энергетическим критерием малых колебаний.

Сложение гармонических колебаний. Если система одновременно участвует в нескольких колебательных процессах, то под сложением колебаний

понимают нахождение закона, описывающего результирующий колебательный процесс.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний, а именно простейший случай, когда они имеют одно направление и одну частоту ω_0 :

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + j_{10}), \quad x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_0 t + j_{20}).$$

Используем метод векторных диаграмм, рис. 7.7. На данном рисунке x_1 и x_2 – проекции векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ на ось OX . Поскольку векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 , то разность фаз $(j_{20} - j_{10})$ между ними остается постоянной.

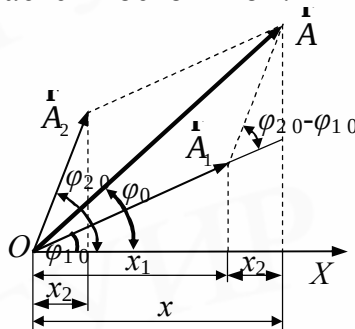


Рис. 7.7. Сложение гармонических колебаний методом векторных диаграмм

По правилу векторного сложения (правило параллелограмма) результирующее колебание описывается проекцией вектора $\vec{A}$ на ось OX . Уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + j_0),$$

где амплитуда A и начальная фаза φ_0 задаются соотношениями:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(j_{20} - j_{10}),$$

$$\operatorname{tg} j_0 = \frac{A_1 \sin j_{10} + A_2 \sin j_{20}}{A_1 \cos j_{10} + A_2 \cos j_{20}}.$$

Сумма двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты есть гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний:

- 1) если $j_{20} - j_{10} = \pm 2m\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, тогда $A = A_1 + A_2$;
- 2) если $j_{20} - j_{10} = \pm (2m + 1)\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, тогда $A = |A_1 - A_2|$.

7.5. Уравнение затухающих колебаний и его решение.

Коэффициент затухания

Если в колебательной системе на осциллятор действуют диссипативные силы (сопротивления среды, вязкого трения), то с течением времени происходят потери энергии и такие колебания называются **затухающими**. Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем.

Система называется **линейной**, если в ходе процесса не изменяются параметры, которые характеризуют существенные для рассматриваемого процесса физические свойства системы.

Пусть в системе действует сила трения, модуль которой прямо пропорционален скорости. Тогда в проекции на ось X можно записать

$$F_{\text{тр}x} = -r\dot{x},$$

где r – постоянная величина, называемая коэффициентом трения. Знак минус указывает на то, что сила трения и скорость направлены противоположно. Запишем уравнение движения в соответствии со вторым законом Ньютона (3.3):

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}.$$

Обозначим $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{r}{m} = 2b$. Тогда последнее уравнение можно переписать

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7.21)$$

где x – колеблющаяся величина; β – коэффициент затухания, определяющий скорость затухания; ω_0 – циклическая частота (собственная частота) свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы (при $\beta = 0$).

Уравнение (7.21) называется **дифференциальным уравнением свободных затухающих колебаний** линейной системы.

В случае малых затуханий ($b \ll \omega_0$), например малом трении, решение этого уравнения

$$x = A_0 e^{-b t} \cos(\omega t + j_0), \quad (7.22)$$

где A_0 – начальная амплитуда; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний; $A = A_0 e^{-\beta t}$ – **амплитуда затухающих колебаний**, изменяющаяся со временем по экспоненциальному закону. Такое уменьшение амплитуды называют **релаксацией** (ослаблением) колебаний.

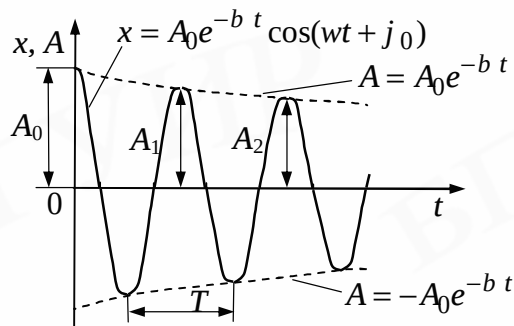


Рис. 7.8. Затухающие гармонические колебания при $\varphi_0 = 0$

График затухающих колебаний при условии, что начальная фаза равна нулю, приведен на рис. 7.8. Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания, строго говоря, не являются периодическими.

Временем релаксации называется промежуток времени $t = \frac{1}{b}$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз.

В случае малых затуханий можно условно использовать понятие **периода затухающих колебаний** как промежутка времени между двумя последующими максимумами колеблющейся физической величины:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}. \quad (7.23)$$

Поэтому период затухающих колебаний всегда больше периода незатухающих гармонических колебаний (см. формулу (7.2)).

Если $b \ll \omega_0$, то $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. С ростом коэффициента затухания β период колебаний увеличивается.

7.6. Логарифмический декремент затухания

Если $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных затухающих колебаний, соответствующих моментам времени, отличающихся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-bt}}{A_0 e^{-b(t+T)}} = e^{bT} \quad (7.24)$$

называется **декрементом затухания**, а его логарифм

$$l = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = bT = \frac{T}{t} = \frac{1}{N_e} \quad (7.25)$$

называется **логарифмическим декрементом затухания**, который равен натуральному логарифму отношения амплитуд колебаний через один период. Здесь N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз:

$$N_e = \frac{t}{T} = \frac{1}{l} = \frac{1}{bT}. \quad (7.26)$$

Убывание амплитуды можно определить с помощью логарифмического декремента затухания

$$A = A_0 \cdot e^{-\frac{l}{T}t}. \quad (7.27)$$

Если $b = w_0$, тогда говорят о **критическом затухании**, и из выражения (7.23) следует, что $T \rightarrow \infty$, т.е. движение перестает быть периодическим.

Если $b > w_0$ (сопротивление среды, например трение, велико), то решение уравнения (7.21) имеет вид

$$x = C_1 \cdot e^{-b+b} + C_2 \cdot e^{-b-b},$$

где $b = \sqrt{b^2 - w_0^2}$, C_1 и C_2 – постоянные, значение которых зависит от начальных условий. Движение имеет **апериодический** характер: при возвращении системы в положение равновесия никаких колебаний не возникает.

Добротностью колебательной системы называется безразмерная величина Q , равная произведению 2π на отношение энергии $E(t)$ колебаний системы в произвольный момент времени t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t+T$ (за один условный период затухающих колебаний):

$$Q = 2\pi \cdot \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}.$$

Энергия $E(t)$ пропорциональна квадрату амплитуды $A(t)$, поэтому

$$Q = 2\pi \cdot \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2bT}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2l}}.$$

При малых значениях логарифмического декремента затухания ($l \ll 1$) $1 - e^{-2l} \approx 2l$, поэтому (принимая $T = 2\pi/w_0$)

$$Q = \frac{p}{l} = p N_e = \frac{p}{bT} = \frac{w_0}{2b}. \quad (7.28)$$

Добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за

время релаксации τ .

7.7. Уравнение вынужденных колебаний и его решение. Векторная диаграмма

В реальной колебательной системе можно получить незатухающие колебания, если колебания совершаются системой под действием **вынуждающей силы**, изменяющейся по гармоническому закону с частотой ω :

$$F_x = F_0 \cdot \cos \omega t. \quad (7.29)$$

Тогда уравнение второго закона Ньютона (3.3), учитывая силу трения или сопротивления среды $F_{mp} = -r\dot{x}$ и возмущающую силу (7.29), имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t. \quad (7.30)$$

Введем обозначения $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{r}{2m} = b$ и получим **дифференциальное уравнение вынужденных колебаний**

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (7.31)$$

где β – коэффициент затухания; ω_0 – собственная частота колебаний системы.

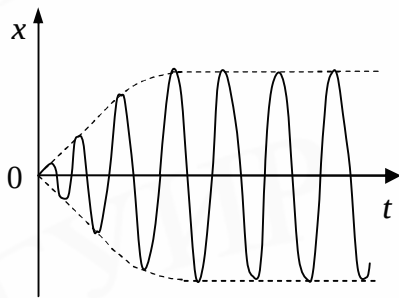


Рис. 7.9. Процесс установления вынужденных колебаний

На рис. 7.9 изображен простейший случай установления вынужденных колебаний.

Дифференциальное уравнение (7.31) является линейным неоднородным уравнением. Из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами известно, что его решение равно сумме общего решения соответствующего однородного (с нулевой правой частью) уравнения (типа (7.21)) и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения (7.21) нам известно:

$$x_1 = A_0 \times e^{-b \cdot t} \times \cos(\omega' t + j_0), \quad (7.32)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ – собственная частота затухающих колебаний.

Можно показать, что частное решение имеет вид

$$x_2 = A \times \cos(\omega t - j), \quad (7.33)$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний; φ – отставание по фазе вынужденных колебаний от колебаний вынуждающей силы.

Таким образом, осциллятор одновременно совершает два типа колебаний (7.32) и (7.33) и общее решение уравнения (7.31) есть сумма решений:

$$x = x_1 + x_2.$$

Слагаемое (7.32) играет заметную роль только в начальной стадии процесса при установлении колебаний (см. рис. 7.9). Со временем затухающие колебания быстро затухают вследствие сопротивления среды: из-за экспоненциального множителя $e^{-\beta t}$ роль решения x_1 уменьшается и им можно пренебречь

по истечении некоторого времени. В решении уравнения вынужденных колебаний (7.31) при установившихся колебаниях остается только слагаемое (7.33), т.е. колебания происходят с постоянной амплитудой и, следовательно, не затухают.

Определим постоянные A и φ . Для этого продифференцируем уравнение (7.33) дважды по времени:

$$\dot{x} = -Aw \sin(\omega t - j) = Aw \cos(\omega t - j + p/2),$$

$$\ddot{x} = -Aw^2 \cos(\omega t - j) = Aw^2 \cos(\omega t - j + p)$$

и подставим выражения для x , $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в исходное уравнение (7.31). Сумма трех гармонических функций в левой части (7.31) должна быть равна функции $\frac{F_0}{m} \cos \omega t$. Учитывая фазовые сдвиги между x , $\dot{x}$ и $\ddot{x}$, представим это равенство с помощью векторной диаграммы на рис. 7.10 (случай $\omega < \omega_0$).

В скобках на этой диаграмме указаны «происхождения» (или соответствия) векторов, модули которых имеют размерность ускорения. Из этой диаграммы по теореме Пифагора следует, что

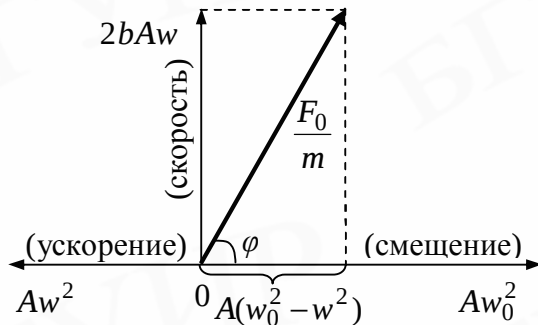


Рис. 7.10. Векторная диаграмма вынужденных колебаний при $\omega < \omega_0$

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2 A^2 = \left(\frac{F_0}{m} \right)^2.$$

Поэтому амплитуда A и отставание смещения по фазе на φ от вынуждающей силы задаются формулами

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2}},$$

$$j = \arctg \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7.34)$$

Формулы (7.34) показывают, что A и φ определяются свойствами самого осциллятора (ω_0, b) и вынуждающей силы ($F_0/m, \omega$), но не начальными условиями. Отметим, что при $\omega > \omega_0$ получается $j < 0$ и вынужденные колебания будут опережать по фазе колебания внешней силы.

7.8. Резонанс. Резонансная кривая. Параметрический резонанс

Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой к собственной частоте колебательной системы, рис. 7.11, что необходимо учитывать при конструировании машин и строительных конструкций. На рис. 7.12 представлена зависимость фазового сдвига j от частоты ω .

При **резонансной частоте**

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \quad (7.35)$$

амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум

$$A_{рез} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}. \quad (7.36)$$

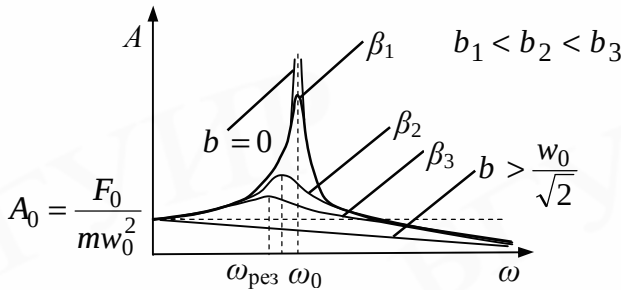


Рис. 7.11. Резонансные кривые для смещения частицы из положения равновесия

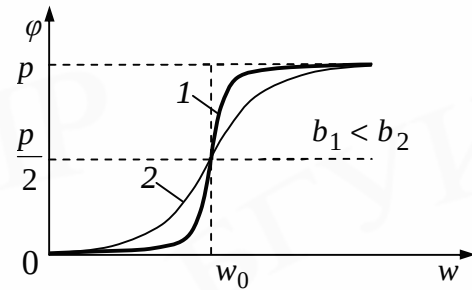


Рис. 7.12. Зависимость сдвига фаз φ от частоты ω вынуждающей силы при разных значениях коэффициента затухания β

Чем меньше β , тем больше $A_{рез}$. В случае $\beta = 0$: $\omega_{рез} = \omega_0$ и $A_{рез} \rightarrow \infty$, что физически бессмысленно. В реальных условиях на осциллятор всегда действуют силы сопротивления среды. При слабом затухании $b \ll \omega_0$: $\omega_{рез} \approx \omega_0$ и значение φ при резонансе практически равно $\pi/2$. Если β становится настолько большим, что $b \geq \omega_0/\sqrt{2}$, то выражение для резонансной частоты (7.35) становится мнимым. Следовательно, резонанс отсутствует, амплитуда монотонно уменьшается с увеличением частоты вынуждающей силы.

При $\omega \rightarrow 0$ амплитуда достигает **статистического отклонения** $A_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ – предельного значения смещения под действием постоянной силы F_0 (случай статистической деформации системы под действием постоянной силы F_0 , когда $\omega \ll \omega_0$).

При $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда стремится к нулю. При большой частоте система не успевает колебаться и смещения относительно положения равновесия нет.

В случае малого затухания ($b \ll \omega_0$) внешняя сила компенсирует в точке резонанса силу сопротивления среды, резонансная амплитуда равна

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2b\omega_0} = \frac{\omega_0}{2b} \cdot \frac{F_0}{\omega_0^2} = Q \cdot A_0, \quad (7.37)$$

где Q – добротность колебательной системы; A_0 – статистическое отклонение. Следовательно, чем больше Q , тем больше $A_{рез}$. Добротность показывает, во сколько раз амплитуда при резонансе превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы.

На рис. 7.13 показан график зависимости средней (за период) мощности вынуждающей силы от ее частоты $\langle P(\omega) \rangle$. Независимо от коэффициента за-

тухания β при $w = w_0$ величина $\langle P \rangle$ максимальна. Важным параметром резонансной кривой $\langle P(w) \rangle$, характеризующим «остроту» резонанса, является отношение w_0/Dw , равное добротности осциллятора:

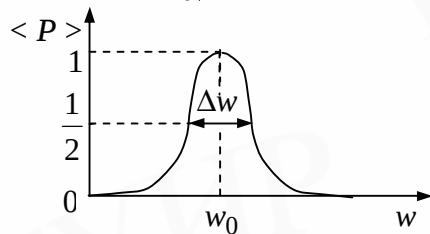


Рис. 7.13. Резонансная кривая для средней (за период) мощности $\langle P(w) \rangle$ вынуждающей силы;

Δw — разность частот, соответствующих половине максимальной средней мощности

$$\frac{w_0}{\Delta w} = Q.$$

Отметим, что существуют *незамкнутые системы*, в которых внешнее воздействие сводится к изменению со временем их параметров и называется **параметрическим** (например, математический маятник с перекинутой через блок нитью, длину которого можно менять, отпуская и подтягивая нить).

Для параметрического возбуждения колебаний принципиально необходимо, чтобы система уже совершала малые колебания. Вследствие неизбежных случайных толчков во всякой системе существуют малые собственные колебания. При параметрическом воздействии эти малые колебания начинают нарастать (необходимое для этого соотношение фаз устанавливается само собой). Так как явление параметрического возбуждения наблюдается только при известных соотношениях между частотой внешнего воздействия и частотой собственных колебаний системы, то в этом отношении оно сходно с явлением резонанса. Поэтому его часто называют **параметрическим резонансом**.

Тема 8. Волновые процессы

8.1. Распространение волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Гармонические плоская и сферическая волны.

Длина волны. Скорость волны

Когда в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной) возбуждают колебания, то вследствие взаимодействия между частицами среды эти колебания будут передаваться от одной точки среды к другой со скоростью, зависящей от свойств среды. При рассмотрении колебаний мы не будем учитывать детальное строение среды. Среда рассматривается как **сплошная**, непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Среда называется **линейной**, если ее свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых колебаниями. **Изотропная среда** — это среда, у которой физические свойства, существенные в рассматриваемой задаче, одинаковы во всех направлениях. Если физические свойства среды, существенные в рассматриваемой задаче, не изменяются от точки к точке, то среда является **однородной**.

Волновым процессом или **волной** называется процесс распространения

колебаний в сплошной среде. Источником волны являются *колебания*, которые распространяются от источника в виде волны.

При распространении волны частицы колеблются около своих положений равновесия, а не перемещаются вслед за волной. Вместе с волной от частицы к частице передается только состояние колебательного движения и его энергия.

Основным *свойством* всех волн является перенос энергии без переноса вещества.

Упругими волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Упругая волна называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Продольная волна – это волна, в которой частицы среды колеблются в направлении распространения волны. Продольные волны можно наблюдать в металлическом однородном стержне или в растянутой пружине, когда попеременно сжимают и растягивают один ее конец. Продольные волны могут распространяться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации сжатия и растяжения (в твердых, жидких и газообразных телах).

Поперечная волна – это волна, в которой частицы среды колеблются в плоскостях, перпендикулярных распространению волны. Например, поперечная волна будет распространяться вдоль натянутой струны, когда участки струны колеблются вверх и вниз. Поперечные волны могут распространяться только в среде, в которой возникают упругие силы при деформации сдвига (в твердых телах).

Высшие точки волнового движения называются **пучностями**, а низшие – **впадинами**. **Амплитуда** – это максимальная высота пучности или глубина впадины, измеренная относительно нулевого уровня (или положения равновесия).

Длиной волны λ называется расстояние между ближайшими частицами, которые колеблются с разностью фаз 2π . Также λ равна расстоянию между двумя соседними впадинами или пучностями.

Длина волны – это расстояние, на которое распространяется гармоническая волна за время, равное периоду колебаний T :

$$l = u \cdot T \quad \text{или} \quad u = l \cdot n, \quad (8.1)$$

где u – скорость распространения волны; n – частота волны.

Частота волны ν – это число пучностей, проходящих через данную точку за единицу времени (или число полных колебаний).

Скорость волны v – это скорость, с которой перемещается пучность волны. Скорость волны надо отличать от скорости частиц самой среды. Например, скорость волны, бегущей по шнуру, направлена вдоль шнура, в то время как скорости частиц шнура направлены перпендикулярно ему.

Пусть гармоническая волна распространяется со скоростью v вдоль оси Ox без затухания. Обозначим смещение ξ частицы среды с координатой x из положения равновесия в момент времени t через $\xi = \xi(x, t)$. На рис. 8.1 представлена зависимость смещения ξ от координаты x в данный момент времени, где координата x – это расстояние частицы среды до источника колебаний. Рассмотрим отличие графика волны от графика гармонического колебания:

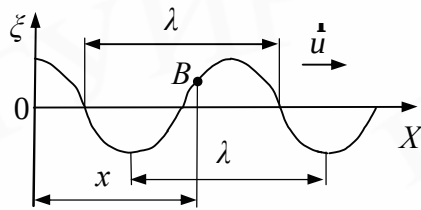


Рис. 8.1. График зависимости смещения X частиц среды от координаты x в данный момент времени t

1) график гармонического колебания представляет собой зависимость смещения данной частицы B от времени:

$$x = x(x, t) \Big|_{x=\text{const}};$$

2) график волны – это зависимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени:

$$x = x(x, t) \Big|_{t=\text{const}}.$$

Волновым фронтом называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к определенному моменту времени t . **Волновой поверхностью** называется геометрическое место точек, в которых частицы среды колеблются в одной фазе или испытывают одинаковые смещения.

Волновой фронт в каждый момент времени один, а волновых поверхностей можно провести бесконечное множество.

Бегущими волнами называются упругие волны, которые переносят в пространстве энергию. Примеры бегущих волн – плоская и сферическая волны.

Волна называется **плоской**, если ее волновые поверхности представляют совокупность плоскостей, параллельных друг другу. Примером плоских волн являются волны, которые расходятся от плывущего катера.

Волна называется **сферической**, если ее волновые поверхности имеют вид концентрических сфер. Центры этих сфер называются центром волны. В качестве примера сферических волн можно рассматривать звуковые волны в воздухе (звук из громкоговорителя), волны при землетрясениях.

8.2. Уравнение плоской волны. Одномерное волновое уравнение. Волновое число

Пусть точки, расположенные в плоскости $x = 0$, колеблются по закону $x(0, t) = A \cdot \cos \omega t$. Обозначим скорость распространения колебаний в данной среде через u . Колебания частицы B среды (см. рис. 8.1) в плоскости x будут происходить по тому же закону. Однако ее колебания будут отставать по времени от колебания источника на τ , так как для прохождения волной расстояния x требуется время $t = x/u$. Поэтому в плоской волне, распространяющейся вдоль положительного направления оси X , смещение ξ – функция разности $(t - \frac{x}{u})$. Уравнение такой плоской волны имеет вид

$$x = f(t - \frac{x}{u}). \quad (8.2)$$

Уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости OX , имеет вид

$$x(x, t) = A \cdot \cos \omega \cdot (t - \frac{x}{u}), \quad (8.3)$$

где функция $\xi(x, t)$ – периодическая функция координаты и времени.

В общем случае **уравнение плоской волны**, распространяющейся вдоль положительного направления оси X в среде, не поглощающей энергию, имеет вид

$$x(x, t) = A \cdot \cos \left[\omega \cdot (t - \frac{x}{u}) + j_0 \right], \quad (8.4)$$

где A – постоянная величина – амплитуда волны; $\omega = 2\pi/T$ – циклическая (круговая) частота волны; $u = \frac{dx}{dt}$ – фазовая скорость; $\omega \cdot (t - \frac{x}{u}) + j_0$ – фаза плоской волны; j_0 – начальная фаза волны.

Фазовая скорость волны – это скорость, с которой распространяется определенное значение фазы волны. Фаза волны характеризует состояние движения частиц среды при прохождении волны в среде.

Определим **волновое число** как

$$k = \frac{2\pi}{l} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u}. \quad (8.5)$$

Например, в случае плоской волны фаза будет постоянна:

$$\omega t - kx + j_0 = \text{const},$$

откуда, если взять производную по времени, следует, что $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = u$.

Уравнение плоской бегущей волны можно записать в виде

$$x(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + j_0) \quad (8.6)$$

или в экспоненциальной форме

$$x(x, t) = A \cdot e^{i(\omega t - kx + j_0)},$$

где физический смысл имеют отдельно вещественная и мнимая части.

В стержне, по которому распространяется продольная упругая гармоническая волна, фазовая скорость v определяется выражением

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E – модуль Юнга материала стержня; ρ – плотность материала недеформированного стержня, т.е. невозмущенного волновым процессом.

Для поперечных упругих волн фазовая скорость равна

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G – модуль сдвига; ρ – плотность неограниченной изотропной твердой среды. Скорость поперечных волн в струне, например в натянутой нити, зависит от натяжения струны:

$$u = \sqrt{\frac{F}{S\rho}},$$

где F – сила натяжения струны; ρ и S – соответственно плотность материала струны и площадь ее поперечного сечения.

Уравнение сферической волны

$$x(r, t) = \frac{A}{r} \cdot \cos(\omega t - kr + j_0), \quad (8.7)$$

где r – расстояние от источника волны до рассматриваемой точки среды. Амплитуда колебаний в сферической волне убывает с расстоянием по закону $1/r$.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается **волновым уравнением**

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta x = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad (8.8)$$

где u – фазовая скорость; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Решением волнового уравнения (8.8) является уравнение любой волны.

Волновое уравнение для плоской волны, распространяющейся вдоль оси X , имеет вид

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (8.9)$$

В волновом уравнении (8.9) производная по времени $\partial x / \partial t = u_x$ – это проекция на ось X скорости частицы среды, движущейся около своего положения равновесия, а $\partial x / \partial x = e$ – относительная деформация среды. При этом e может быть больше нуля (растяжение), равна нулю или меньше нуля (сжатие).

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, линейна, то скорость волн не зависит от их интенсивности и к этим волнам применим **принцип суперпозиции (наложения)** волн:

при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее

возмущение в любой момент времени в любой точке пространства равно сумме возмущений, соответствующих каждой из этих волн порознь.

Согласно данному принципу суперпозиции, таким образом определяют результирующее смещение, скорость и ускорение частиц среды в произвольный момент времени в случае одновременного распространения нескольких волн в линейной среде.

Когерентностью называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов. Две волны называются **когерентными**, если разность их фаз не зависит от времени.

Интерференцией волн называется явление наложения волн, при котором колебания в одних точках пространства усиливают, а в других ослабляют друг друга в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Необходимым условием интерференции является когерентность складывающихся волн.

Особым случаем интерференции являются **стоячие волны** – волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Если рассмотреть две плоские бегущие волны (см. формулу (8.6)) с одинаковыми амплитудами и частотами, которые распространяются вдоль оси X навстречу друг другу, то можно получить **уравнение стоячей волны**:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos \frac{2\pi x}{l} \cos \omega t.$$

Таким образом, в каждой точке стоячей волны совершаются гармонические колебания той же частоты ω , что и у встречных волн. Амплитуда стоячей волны в отличие от бегущей плоской волны зависит от x и равна $|2A \cos(2\pi x/l)|$.

Пучностями стоячей волны называются точки среды, где амплитуда стоячей волны достигает максимального значения $2A$. Их координаты x_m определяются из уравнения

$$\frac{2\pi x_m}{l} = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Узлами стоячей волны называются те точки среды, в которых амплитуда стоячей волны обращается в нуль (в них отсутствуют колебания). Координаты узлов x_m находят из уравнения

$$\frac{2\pi x_m}{l} = \pm (m + \frac{1}{2})\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Расстояние между соседними пучностями (узлами) называется **длиной стоячей волны** и равно $l/2$ бегущих волн. Для стоячих волн справедливы следующие утверждения:

1. Все точки между двумя соседними узлами колеблются с разными амплитудами, но с одинаковыми фазами.
2. При переходе через узел фаза колебаний изменяется на π . Точки, лежащие по разные стороны от узла (в пределах $l/2$), колеблются в противофазе.
3. Перенос энергии через узлы отсутствует. Нет никакого распространения возмущения вдоль оси X .

Отметим, что если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то на границе сред образуется пучность стоячей волны. Иначе, если среда более плотная, то на границе сред образуется узел стоячей волны.

8.3. Энергия упругой волны. Поток и плотность потока энергии. Вектор Умова

Упругая среда, в которой распространяются механические волны, обладает как кинетической энергией колебательного движения частиц, так и потенциальной энергией, обусловленной деформацией.

Рассмотрим продольную плоскую волну (8.2), которая распространяется в единице объема среды массой, равной ρ , с колебательной скоростью $u = \partial x / \partial t$, где x – смещение частиц среды. Выделенный объем обладает кинетической энергией. **Объемная плотность кинетической энергии среды** выражается как

$$v_k = \frac{dW_k}{dV} = \frac{1}{2} \rho u^2, \quad (8.10)$$

где u – скорость колебания частиц среды; ρ – плотность среды; dW_k – кинетическая энергия всех частиц в малом объеме dV среды, выбранном таким образом, что в его пределах скорость u всюду одинакова.

Можно доказать, что **объемная плотность потенциальной энергии упругодеформированной среды**

$$v_p = \frac{dW_p}{dV} = \frac{1}{2} \rho u^2 e^2, \quad (8.11)$$

где dW_p – потенциальная энергия однородно деформированного малого участка среды объемом dV ; u – фазовая скорость волны в среде; e – относительная деформация среды.

Поскольку волна движется, то она осуществляет перенос механической энергии. Под **объемной плотностью энергии** упругих волн понимают объемную плотность механической энергии среды, обусловленную распространением этих волн и равную

$$v = v_k + v_p = \frac{1}{2} \rho (u^2 + u^2 e^2). \quad (8.12)$$

Продифференцировав уравнение плоской волны (8.4) один раз по t , другой раз по x и определив таким образом u и e , учитывая, что $k^2 u^2 = \omega^2$, получим плотность энергии, возникающей в упругой среде при распространении в ней плоской продольной волны:

$$v = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + j_0). \quad (8.13)$$

В физике используют понятие потока энергии. Если площадка среды имеет площадь dS , а ее нормаль $\vec{n}$ составляет с направлением распространения волны (осью X) угол α (рис. 8.2), то **поток энергии** $d\Phi$ определяется как отношение количества энергии dW , переносимой волной через эту площадку за малый промежуток времени, к его длительности:

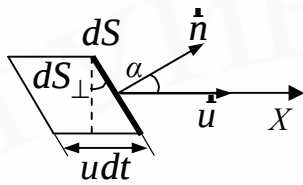


Рис. 8.2. Через площадку среды dS за время dt волной переносится энергия dW

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = \frac{v(u dt dS \cos \alpha)}{dt} = \frac{v(\dot{\mathbf{u}}, d\dot{\mathbf{S}})dt}{dt} = v(\dot{\mathbf{u}}, d\dot{\mathbf{S}}) = (\dot{\mathbf{j}}, d\dot{\mathbf{S}}), \quad (8.14)$$

где dW – энергия, заключенная внутри площадки с основанием площадью dS и образующей длиной $u dt$; $\dot{\mathbf{u}}$ – вектор скорости переноса энергии волной, нормальный к волновой поверхности в данном месте; v – объемная плотность энергии волны; $d\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{n}} dS$; $\dot{\mathbf{j}} = v \dot{\mathbf{u}}$ – **вектор плотности потока энергии (вектор Умова)**. Для гармонической волны $\dot{\mathbf{u}} = (w/k)\dot{\mathbf{n}}$.

Вектор Умова (Н. А. Умов, 1874) в разных точках пространства различен, а в данной точке среды изменяется со временем по закону квадрата синуса. Направление $\dot{\mathbf{j}}$ совпадает с направлением распространения энергии, т.е. $\dot{\mathbf{j}} \uparrow \uparrow \dot{\mathbf{u}}$, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно распространению волны:

$$j = \frac{d\Phi}{dS \cos \alpha} = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}}. \quad (8.15)$$

Единица плотности потока энергии в системе СИ – Джоуль на метр в квадрате-секунда (Дж/(м²·с)).

Когда волна распространяется в трехмерном пространстве, тогда поток энергии через произвольную поверхность S выражается в виде интеграла:

$$\Phi = \int_S (\dot{\mathbf{j}}, d\dot{\mathbf{S}}). \quad (8.16)$$

Эффект Доплера для звуковых волн. При движении источника колебаний и приемника (устройства, которое воспринимает звуковые колебания среды) друг относительно друга происходит изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником. Это явление называется **эффектом Доплера**.

В акустике эффект Доплера проявляется как повышение тона при приближении источника звука к приемнику и понижение тона звука при удалении источника от приемника.

Пусть источник и приемник (наблюдатель) движутся вдоль соединяющей их прямой: u_u и u_n – соответственно скорости источника и приемника (положительны при сближении и отрицательны при удалении источника и приемника); n_0 – частота колебаний источника; u – скорость распространения звука в данной среде. Если направления $\dot{\mathbf{u}}_u$ и $\dot{\mathbf{u}}_n$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то берут их проекцию на направление этой прямой.

В общем случае частота n колебаний, воспринимаемых приемником, равна

$$n = \frac{u \pm u_n}{u \mp u_u} n_0. \quad (8.17)$$

Верхние знаки в выражении (8.17) берутся, если при движении источник и приемник сближаются, и, следовательно, $n > n_0$. Нижние знаки в формуле (8.17) берутся, когда они взаимно удаляются. При этом $n < n_0$.

Тема 9. Специальная теория относительности

9.1. Опыт Майкельсона–Морли

Специальная теория относительности, начала которой были заложены Альбертом Эйнштейном в 1905 г., существенно изменила представления физики о природе. До ее появления положения ньютоновской механики о свойствах пространства и времени являлись фундаментальными.

При использовании разных инерциальных систем отсчета, движущихся одна относительно другой прямолинейно и равномерно, измерения расстояний в каждой системе координат производят при помощи линеек, а промежутков времени – при помощи часов и световых сигналов. Тогда при переходе от результатов измерений, произведенных в одной системе отсчета, к результатам измерений в другой системе необходимо знать, как связаны между собой результаты измерений длины и промежутков времени (когда одни линейки и часы покоятся в одной, а другие – в другой системе отсчета). Следовательно, возникает вопрос о влиянии движения систем отсчета на показания основных измерительных инструментов при переходе от одной системы координат к другой.

Изначально в конце XIX – начале XX вв. предполагалось, что распространение света протекает в разных системах отсчета по-разному. Согласно волновой теории, световые волны должны распространяться с определенной скоростью относительно неподвижной гипотетической среды, называемой *эфиром*. При этом скорость распространения света относительно неподвижного эфира совпадает со скоростью света в вакууме c и одинакова во всех направлениях. Тогда согласно классическому закону преобразования скорости Галилея (3.10) в движущейся по отношению к эфиру со скоростью $\vec{u}$ инерциальной системе отсчета скорость света $\vec{c}'$ будет определяться как $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{u}$.

В 1881 г. американский физик Альберт Майкельсон провел эксперимент (а затем повторил его совместно с Эдвардом Морли в 1887 г.), цель которого заключалась в определении скорости света в разных направлениях по отношению к движению Земли. При этом было использовано движение Земли по орбите со скоростью около 30 м/с. Поворачивая установку, можно было изменять расположение приборов относительно этой скорости. Необходимо было проверить, *влияет ли поворот установки* на время распространения двух световых сигналов, из которых один распространяется в направлении движения установки (Земли), а другой – в перпендикулярном направлении.

Опыт был проведен следующим образом, рис. 9.1. Источник S , установленный на жесткой плите, посылает очень короткие световые сигналы во всех направлениях. На двух взаимно перпендикулярных направлениях установлены зеркала A и B , отражающие световые сигналы обратно в точку S . В этой точке также находится устройство, позволяющее точно констатировать, одновременно ли возвращаются в данную точку световые сигналы от зеркал A и B . Плита может со всеми приборами поворачиваться вокруг вертикальной оси. Относительно неподвижной инерциальной системы отсчета, связанной с Солнцем и

звездами, плита движется вместе с Землей по ее орбите.

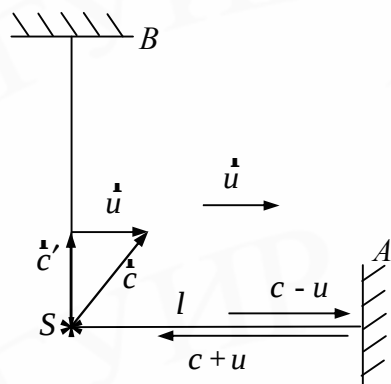


Рис. 9.1. Схема опыта А. Майкельсона

Пусть сначала установка ориентирована так, что ее скорость относительно неподвижной системы отсчета, т.е. скорость движения Земли по орбите, направлена по SA . Согласно формуле (3.10) на пути SA скорость света относительно установки (Земли) равна по модулю $c - u$, так как скорость движения источника световых сигналов направлена вдоль направления движения сигнала, а на обратном пути AS — $(c + u)$. Тогда для прохождения пути SAS необходимо время

$$t_{\parallel} = \frac{l}{c - u} + \frac{l}{c + u} = \frac{2l}{c} \times \frac{1}{1 - (u/c)^2}.$$

На пути же SBS модуль скорости света относительно установки равен $c' = \sqrt{c^2 - u^2}$, как следует из рис. 9.1, поскольку скорость движения источника световых сигналов направлена поперек направления движения сигнала. Время прохождения этого пути будет

$$t_{\perp} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2l}{c} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.$$

Согласно выше полученным формулам, свет должен проходить путь SBS быстрее, чем SAS : $t_{\perp} > t_{\parallel}$. Измерив разность $t_{\parallel} - t_{\perp}$, можно определить скорость Земли (установки) относительно эфира. Высокая чувствительность метода должна была позволить определить величину данной разности.

Тем не менее в результате опыта было установлено, что разность времен отсутствует. Таким образом, продольный и поперечный сигнал распространяются с одинаковой скоростью, скорость света не зависит от скорости движения источника света. Следовательно, классический закон преобразования скорости Галилея (3.10) неверен для скорости света.

Отметим, что результат Майкельсона–Морли не мог быть следствием случайного совпадения скоростей Земли и эфира, например, в момент выполнения эксперимента Земля покоилась относительно эфира. Однако установлено, что результат сохраняется ($t_{\parallel} = t_{\perp}$) и через полгода, когда Земля движется по орбите в обратном направлении.

Поэтому Эйнштейн предложил отказаться от представлений об эфире, о существовании абсолютно покоящейся системы отсчета. Эти предложения Эйнштейн сформулировал в виде двух постулатов, которые лежат в основе **специальной теории относительности**:

1. **Принцип относительности Эйнштейна.** Законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Иначе: Уравнения, выражающие законы природы, инвариантны, т.е. не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

2. **Принцип постоянства скорости света.** Скорость света в вакууме c

не зависит от движения источника света или наблюдателя, одинакова во всех направлениях и равна $3,0 \cdot 10^8$ м/с.

Из постулатов Эйнштейна следует, что скорость света в вакууме является предельной скоростью и одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Факт, что скорость любого сигнала не может превышать предельное значение $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с, является законом природы. Если бы значение скорости света в вакууме в разных инерциальных системах отсчета было различным, то эти системы можно было бы отличить друг от друга.

Следовательно, поскольку значение всех возможных в природе скоростей движения тел и распространения взаимодействий ограничено величиной c , то этим опровергается принцип дальнего действия ньютоновской механики о мгновенной передаче взаимодействия. В настоящее время оба постулата Эйнштейна подтверждаются всей совокупностью полученных экспериментальных фактов.

На специальной теории относительности основана релятивистская механика. В *релятивистской механике* рассматривают классические законы движения тел (частиц) при *релятивистских скоростях*, т.е. скоростях, сравнимых со скоростью света в вакууме.

9.2. Преобразования Лоренца

Преобразования Галилея (3.9), описывающие переход от движущейся со скоростью u_0 инерциальной системы отсчета K' к другой условно неподвижной инерциальной системе отсчета K (случай, когда оси координат X и X' систем K и K' соответственно выбраны направленными вдоль скорости $\dot{u}_0$):

$$\begin{aligned} x &= x' + u_0 t, & y &= y', & z &= z', & t &= t', \\ x' &= x - u_0 t, & y' &= y, & z' &= z, & t' &= t. \end{aligned}$$

Для релятивистских скоростей нужны новые преобразования, удовлетворяющие постулатам Эйнштейна.

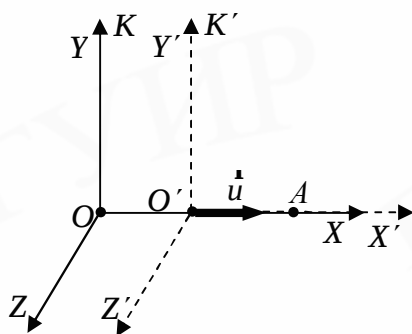


Рис. 9.2. Инерциальная система отсчета K' движется вправо со скоростью $\dot{u}$ относительно системы отсчета K

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' с координатными осями соответственно X, Y, Z и X', Y', Z' , рис. 9.2. Выберем оси координат системы K' параллельно соответствующим осям системы K так, чтобы оси X и X' совпадали между собой. Система K' движется относительно K системы вдоль оси X со скоростью $\dot{u} = \text{const}$. Пусть в начальный момент времени $t = t' = 0$, когда начала координат O и O' совпадают, из начала координат излучается световой сигнал. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах одна и

та же и равна c . Поэтому если за время t в системе K сигнал дойдет до некоторой точки A (см. рис. 9.2), пройдя расстояние

$$x = ct, \quad (9.1)$$

то в системе K' координата светового импульса в момент достижения точки A

$$x' = ct', \quad (9.1a)$$

где t' – время прохождения светового импульса от начала координат до точки A в системе K' . Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$x' - x = c(t' - t).$$

Поскольку система K' движется относительно K , то $x' \neq x$ и, следовательно, $t' \neq t$, т.е. отсчет времени в системах K' и K различен и имеет относительный характер.

Допустим, что новые преобразования для релятивистских скоростей линейны и имеют вид

$$x = g(x' + ut'), \quad y = y', \quad z = z', \quad (9.2)$$

где g – некоторая константа. Тогда, подставив x и x' из формул (9.1) и (9.1a), запишем

$$ct = g(ct' + ut') = g(c + u)t'. \quad (9.2a)$$

Обратные выражениям (9.2) и (9.2a) преобразования будут иметь подобный вид, так как движущиеся системы эквивалентны. Это очевидно, так как если скорость движения системы K' относительно системы K равна u , то при этом скорость движения K относительно K' равна $-u$. Следовательно, следующие выражения являются справедливыми

$$x' = g(x - ut), \quad (9.3)$$

$$ct' = g(ct - ut) = g(c - u)t. \quad (9.3a)$$

Выразим t' из формулы (9.3a) и подставим в уравнение (9.2a):

$$ct = g(c + u) \frac{g(c - u)t}{c},$$

$$c^2 = g^2(c^2 - u^2) = [b = u/c] = g^2 c^2 (1 - b^2).$$

Из последнего уравнения следует, что

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}. \quad (9.4)$$

Теперь найдем соотношение между t и t' . Перепишем формулу (9.3), используя выражения (9.2):

$$x' = g(x - ut) = g(g(x' + ut') - ut).$$

Решим последнее уравнение относительно t :

$$x' = g^2 x' + g^2 ut' - gut,$$

$$gut = (g^2 - 1)x' + g^2 ut' = g^2 ut' - (1 - g^2)x',$$

$$t = gt' - \frac{1 - g^2}{gu} x' = g \left(t' + \frac{x'}{u} \left(1 - \frac{1}{g^2} \right) \right).$$

Подставим из уравнения (9.4) значение g :

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \left(t' + \frac{u}{c^2} x' \right).$$

Таким образом, мы получили **преобразования Лоренца**, предложенные Х. Лоренцем в 1904 г. еще до появления теории относительности:

$$\boxed{\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}(x' + ut'), & y &= y', & z &= z', \\t &= \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right).\end{aligned}} \quad (9.5)$$

Преобразования Лоренца, заменяющие преобразования Галилея, позволили объяснить результаты опытов Майкельсона–Морли. Отметим, однако, что при этом гипотеза, сформулированная Дж. Фицджеральдом и Х. Лоренцем и использующая преобразования (9.5), предполагала существование абсолютной системы отсчета, в которой эфир покоится, нарушая, следовательно, принцип относительности всех инерциальных систем.

Спустя год, в 1905 г., Эйнштейн кардинально решил проблему, пересмотрев исходные положения классической физики о свойствах пространства и времени. На основе специальной теории относительности им были выведены преобразования координат

$$\boxed{\begin{aligned}x^{\ell} &= \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}(x - ut), & y^{\ell} &= y, & z^{\ell} &= z, \\t^{\ell} &= \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\frac{x}{c} - \frac{u}{c^2}x^{\frac{\circ}{\circ}}.\end{aligned}} \quad (9.6)$$

Из сравнения преобразований (9.5) и (9.6) вытекает, что они симметричны и отличаются лишь знаком при скорости u .

Принцип соответствия:

при малых скоростях $u \ll c$, т.е. $b \ll 1$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Преобразования Галилея являются предельным случаем преобразований Лоренца.

При $u > c$ выражения (9.5) и (9.6) для x, t, x', t' теряют физический смысл, так как становятся мнимыми. Это означает, что движение со скоростью, большей скорости света в вакууме, невозможно.

9.3. Относительность понятия одновременности

Теория Эйнштейна рассматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время, в котором протекают все физические явления. Одно из следствий специальной теории относительности состоит в том, что время перестает быть абсолютной величиной. Одновременность является понятием относительным, приобретающим смысл, когда указано, к какой системе отсчета это понятие относится.

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события A_1 и A_2 . В системе K' им соответствуют коор-

динаты x'_1 и x'_2 в моменты времени t'_1 и t'_2 . Если события в системе K происходят в одной точке ($x_1 = x_2$) и являются одновременными ($t_1 = t_2$), то, согласно преобразованиям Лоренца (9.6):

$$x'_1 = x'_2, \quad t'_1 = t'_2,$$

т.е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.

Если события в системе K пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), но одновременны ($t_1 = t_2 = t$), то в системе K' , согласно преобразованиям Лоренца (9.6):

$$x'_1 = \frac{(x_1 - u t)}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad x'_2 = \frac{(x_2 - u t)}{\sqrt{1 - b^2}},$$

$$t'_1 = \frac{t - u x_1 / c^2}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad t'_2 = \frac{t - u x_2 / c^2}{\sqrt{1 - b^2}}.$$

Поэтому $x'_1 \neq x'_2$ и, следовательно, $t'_1 \neq t'_2$:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{-(x_2 - x_1)u / c^2}{\sqrt{1 - b^2}},$$

т.е. в системе K' эти события пространственно разнесены, как и в системе K , а также не одновременны. Следовательно, одновременность двух событий зависит от выбора системы отсчета. Необходимо указывать систему отсчета, относительно которой эта одновременность имеет место.

Согласно Эйнштейну физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, а только само событие. Поэтому, чтобы в конкретной системе отсчета описать событие, указывают место, в котором оно происходит, и момент времени, когда оно происходит. В свою очередь это означает, что при сопоставлении двух событий, произошедших в различных местах, требуется сравнить время (показания часов) в различных точках системы отсчета. Это возможно, только если ход всех часов данной системы отсчета *синхронизирован*, например с помощью световых или радиосигналов. При этом по синхронизированным часам можно определять время только для системы отсчета, относительно которой синхронизированные часы покоятся.

Из относительности понятия одновременности следует, что нельзя говорить об абсолютном времени, т.е. синхронизированные часы системы отсчета K' , расставленные, например, вдоль оси X' , будут показывать разное время в системе отсчета K , зависящее от координаты x (местное время).

Таким образом, поскольку знак разности $t'_2 - t'_1$ определяется знаком выражения $-u(x_2 - x_1)$, то порядок одновременных в системе отсчета K событий A_1 и A_2 может быть любым в других системах отсчета (при различных значениях скорости u), т.е. быть как прямым, так и обратным. События одновременные для неподвижного наблюдателя будут не одновременны для движущегося наблюдателя. Однако подчеркнем, что все сказанное не относится к причинно-связанным событиям (см. подтему 9.6).

9.4. Относительность длин и промежутков времени

Из преобразований Лоренца (9.5) и (9.6) следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения. Это изменение продольного размера тела (по направлению относительного движения) называется **лоренцевым сокращением** и фиксируется в условно неподвижной инерциальной системе отсчета.

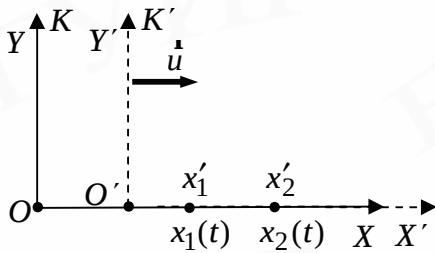


Рис. 9.3. Стержень покоится в системе K' , которая движется относительно системы K со скоростью $\dot{u}$

Пусть l_0 – длина стержня, покоящегося в системе K' . Размеры тела в той инерциальной системе отсчета, относительно которой оно покоится, называются **собственными размерами**. Если стержень расположен вдоль оси X' , рис. 9.3, то $l_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1 и x'_2 – координаты концов стержня. По определению длина L того же стержня в системе отсчета K , относительно которой он вместе с системой K' движется со скоростью $\dot{u}$ вдоль оси X , равна разности значений координат концов стержня, измеренных в один и тот же момент времени по часам системы K ($t_1 = t_2$):

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) / \sqrt{1 - b^2} = L / \sqrt{1 - b^2}.$$

Следовательно, при определении длины (продольного размера) тела в системе, относительно которой тело движется, измеренная длина тела будет меньше его собственной длины, вычисленной в системе отсчета, где тело покоится:

$$L = l_0 \sqrt{1 - b^2}. \quad (9.7)$$

Линейные размеры тела относительны. Его собственные размеры являются максимальными. Поэтому, указывая численно длину некоторого тела, необходимо сообщать, в какой конкретной системе отсчета определена данная величина.

Можно показать, что поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета:

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1, \quad z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1. \quad (9.8)$$

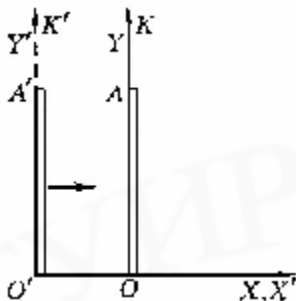


Рис. 9.4. К определению поперечных размеров тел

Иначе, например, пусть имеет место несовпадение вдоль осей Y и Y' размеров двух одинаковых эталонных тел, помещенных в системы K и K' , как показано на рис. 9.4. Тогда с точки зрения обеих систем отсчета один из эталонов будет короче другого и, следовательно, можно отличить движущуюся систему отсчета K' от неподвижной системы K по более коротким поперечным размерам. Однако это противоречит *принципу относительности*.

Лоренцево сокращение является **кинематиче-**

ским релятивистским эффектом. Оно не связано с действием на движущееся тело каких-либо продольных сил, сжимающих его вдоль направления движения, и обусловлено определенной процедурой измерения размеров движущегося тела. Это сокращение существенно только при скоростях движения, близких к скорости света в вакууме. Из выражения (9.7) следует, что тела не могут двигаться со скоростями $u \geq c$, так как при $u = c$ продольный размер тела становится равным нулю, а при $u > c$ он должен был бы быть мнимым. Отметим, что при малых скоростях $u \ll c$ длина тела приобретает практически абсолютный смысл ($L \gg l_0$).

Относительность промежутка времени между какими-либо двумя событиями, например, между началом и концом какого-либо процесса, – это еще одно важное следствие преобразований Лоренца.

Пусть в движущейся инерциальной системе отсчета K' два рассматриваемых события 1 и 2 происходят в одной и той же неподвижной относительно K' точке A ($x'_1 = x'_2$) в моменты времени t'_1 и t'_2 , так что промежуток времени между этими событиями $t' = t_0 = t'_2 - t'_1$. Относительно неподвижной инерциальной системы отсчета K точка A движется с той же скоростью $\vec{u}$, что и система K' . Поэтому в K события 1 и 2 совершаются в разных точках с координатами x_1 и x_2 . При этом $x_2 - x_1 = ut$, где $t = t_2 - t_1$ – промежуток времени между событиями 1 и 2 по часам в системе отсчета K , т.е. для описания событий 1 и 2 необходимы показания и часов, и измерения координат. Из преобразований Лоренца (9.5) следует, что

$$t = \frac{t'_2 + u x'_2 / c^2}{\sqrt{1 - b^2}} - \frac{t'_1 + u x'_1 / c^2}{\sqrt{1 - b^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - b^2}},$$

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - b^2}}.$$

(9.9)

Таким образом, одни и те же часы в разных инерциальных системах отсчета идут по-разному. Длительность процесса, происходящего в некоторой точке, минимальна в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна: $t > t_0$.

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с телом, в котором происходит некоторый процесс, называется собственным временем этого тела. Согласно формуле (9.9) собственное время самое короткое. В любой системе отсчета, относительно которой часы движутся, часы идут медленнее. Например, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета со скоростью u , идут медленнее покоящихся часов в $1/\sqrt{1 - b^2}$ раз. Этот эффект называется **«замедлением времени»** (релятивистский эффект замедления хода времени).

Соответственно физические процессы в движущейся системе отсчета для наблюдателя, относительно которого эти часы движутся, протекают медленнее, чем в неподвижной. Однако из принципа относительности следует, что на-

блюдатель в системе отсчета K' , движущейся относительно системы отсчета K , не заметит, что его часы идут медленнее, чем часы системы K . Иначе оба наблюдателя в системах K и K' зафиксировали бы, что в инерциальной системе отсчета K' время течет медленнее. А это бы позволило им заключить, что одна из инерциальных систем отсчета отличается от другой.

В 1971 г. был выполнен следующий эксперимент. Сверхточные часы облетели на реактивном самолете вокруг Земли. В начальный момент времени $t = 0$ их показания совпадали с часами системы K . Скорость самолета составляла $u = 10^3$ км/ч, т.е. была значительно меньше скорости света в вакууме. Было установлено, что погрешность хода часов составила около 10^{-9} с. Решим подобную задачу теоретически, используя выражение (9.9). Итак, часы двигались относительно системы K со скоростью u . Пусть в момент времени t по часам системы K движущиеся часы показывали время t_0 . Согласно (9.9) $t_0 = t\sqrt{1 - \beta^2}$. Следовательно, искомое время

$$t - t_0 = t(1 - \sqrt{1 - \beta^2}).$$

Поскольку $u \ll c$, то по формуле бинома Ньютона

$$\sqrt{1 - (u/c)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}(u/c)^2.$$

Тогда $t - t_0 = \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} t$, т.е. действительно, например, за время $t = 60$ мин (по часам системы K) движущиеся часы отстанут на $1,5 \times 10^{-9}$ с.

Таким образом, течение времени зависит от состояния движения. Численное значение промежутка времени между двумя событиями имеет смысл только тогда, когда указано, в какой системе отсчета этот промежуток измерен. Явление замедления времени – это **кинематический релятивистский эффект**, который возникает в процессе измерения. Данный эффект является взаимным и так же, как и для длин, симметричен относительно обеих инерциальных систем отсчета K и K' .

9.5. Интервал между событиями. Его инвариантность

Координаты классического трехмерного пространства преобразуются сами через себя, например, при повороте декартовых осей в плоскости преобразуются только пространственные координаты. Время при этом в формулы преобразования не входит, поскольку считается, что оно не преобразуется. Преобразования Лоренца (9.5) и (9.6) связывают координаты пространства и моменты времени.

А. Пуанкаре и чуть позже в 1908 г. Г. Минковский показали, что: *преобразования Лоренца* можно рассматривать, как повороты осей координат в четырехмерном пространстве, в котором к трем пространственным координатам x, y, z добавляется «временная» координата ct (размерность всех координат одинакова), т.е. положение каждой точки этого пространства одно-

значно определяется совокупностью четырех координат (ct, x, y, z) .

В специальной теории относительности время и 3-мерное пространство независимо друг от друга не существуют, а образуют единое **4-мерное пространство-время Минковского**.

Свойства 4-мерного пространства Минковского отличны от свойств обычного евклидова 3-мерного пространства. При повороте осей декартовых координат меняются проекции любого вектора $\vec{r}$, но не изменяется скалярная величина – длина этого вектора (см. формулу (1.1)). Однако преобразования Лоренца меняют эту величину (в другой инерциальной системе отсчета имеет место эффект релятивистского сокращения длины). Поэтому обычные 3-мерные векторы не могут быть векторами пространства Минковского.

Простейшей комбинацией, построенной из координат x, y, z и ct , и инвариантной по отношению к преобразованиям Лоренца (9.5) и (9.6), т.е. не зависящей от выбора системы отсчета, является интервал между двумя событиями.

Интервал между двумя событиями 1 и 2, вычисленный в инерциальной системе отсчета K' , – это величина, равная

$$s'_{12} = \sqrt{c^2(t'_{12})^2 - (l'_{12})^2}, \quad (9.10)$$

где $t'_{12} = t'_2 - t'_1$ – промежуток времени между рассматриваемыми событиями 1 и 2, определяемый в системе K' ; l'_{12} – расстояние между двумя точками обычного трехмерного пространства в системе K' , в которых совершаются события:

$$l'_{12} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \sqrt{Dx'^2 + Dy'^2 + Dz'^2}.$$

При переходе от движущейся инерциальной системы отсчета K' к неподвижной инерциальной системе отсчета K получаем

$$s'_{12} = s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}. \quad (9.10a)$$

Действительно

$$(s'_{12})^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = inv,$$

поскольку $\Delta x' = \frac{\Delta x - ut}{\sqrt{1 - b^2}}$, $\Delta y' = \Delta y$, $\Delta z' = \Delta z$, $\Delta t' = \frac{\Delta t - \Delta x \cdot u / c^2}{\sqrt{1 - b^2}}$.

Допустим, что рассматриваемые события произошли с одной и той же частицей. Тогда $l_{12}/t_{12} = u$ – скорость частицы. Следовательно,

$$s_{12} = ct_{12} \sqrt{1 - (l_{12}/ct_{12})^2} = ct_{12} \sqrt{1 - b^2}.$$

Утверждение «два события разделены некоторым интервалом s » имеет абсолютный характер, так как справедливо во всех инерциальных системах отсчета. Величину $t_0 = t_{12} \sqrt{1 - b^2}$ называют промежутком собственного времени частицы между событиями. Поэтому $s_{12} = ct_0$. Поскольку $c = const$, то $s_{12} = inv$ и $t_0 = inv$.

В пространстве Минковского каждое событие обозначается **мировой точкой**, рис. 9.5. Интервал между двумя событиями s'_{12} (двумя мировыми точками) является квадратом длины 4-мерного радиус-вектора в пространстве Минковского. Проекция такого вектора ct , x , y и z показывают пространственные координаты некоторого события и момент времени, в который оно произошло.

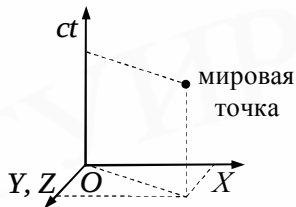


Рис. 9.5. Пространство Минковского

Изображая процесс движения частицы как последовательность событий – мировых точек, получим траекторию движения в пространстве Минковского. Она называется **мировой линией** и показывает пространственные координаты частицы в любой момент времени, т.е. представляет всю историю существования частицы.

Если $s_{12}^2 > 0$, т.е. s_{12} – действительное число, то интервал s_{12} называется **времениподобным**. В этом случае всегда можно найти такую систему K' , в которой оба события происходят в одной точке ($l'_{12} = 0$), т.е. будут одноместными: $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2$. Интервал можно измерить только часами.

Светоподобным интервал называется, когда $s_{12} = 0$, события могут быть связаны световым сигналом. События, разделенные времениподобным или светоподобным интервалами, могут быть причинно-связанными друг с другом.

Если $s_{12}^2 < 0$, т.е. s_{12} – мнимое число, то интервал называется **пространственноподобным**. Всегда можно найти такую систему K' , в которой оба события в разных точках будут происходить одновременно ($t'_{12} = 0$): $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l_{12}'^2$. При этом l_{12}^2 всегда больше $c^2 t_{12}^2$, т.е. ни в одной системе отсчета события не могут оказать влияния друг на друга. Иначе связь между событиями должна была бы осуществляться со сверхсветовой скоростью. Таким образом, два события, разделенные пространственноподобным интервалом, не могут быть соединены мировой линией.

9.6. Причинность

Пусть в инерциальной системе K в момент времени t_1 в точке A с координатой x_1 возникает сигнал. В точке B (координата x_2) при получении сигнала в момент времени t_2 начинается запуск ракеты. Будем предполагать, что оба события происходят на оси X . Скорость распространения в данной системе отсчета сигнала – скорость влияния $u_{вл}$. Может ли быть такой наблюдатель, для которого причина будет в точке B , а следствие – в точке A ? Обозначим для такого наблюдателя t'_2 и t'_1 как соответственно моменты времени прихода сигнала в точку B и испускания сигнала из точки A .

В системе отсчета K $t_2 > t_1$. Для определенности пусть $x_2 > x_1$. При этом

очевидно, что $x_2 - x_1 = u_{\text{вл}}(t_2 - t_1)$.

Из преобразований Лоренца (9.5) и (9.6)

$$t_2^{\text{л}} - t_1^{\text{л}} = \frac{t_2 - t_1 - (x_2 - x_1)u/c^2}{\sqrt{1 - b^2}} = \frac{(t_2 - t_1)(1 - u_{\text{вл}}u/c^2)}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad (9.11)$$

где u – скорость инерциальной подвижной системы отсчета.

Величина $1 - \frac{u \times u_{\text{вл}}}{c^2}$ в уравнении (9.11) всегда положительна, так как $u < c$, а $u_{\text{вл}} \leq c$ (когда причинно-следственная связь обусловлена максимально возможной скоростью передачи сигналов или взаимодействий, тогда $u_{\text{вл}} = c$, т.е. максимальное значение скорости влияния равно скорости распространения света в вакууме).

Следовательно, если $t_2 > t_1$, то и $t_2^{\text{л}} > t_1^{\text{л}}$. Таким образом, последовательность хода событий причина–следствие в релятивистской механике является неизменной, и порядок следования причинно-следственных событий одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Чтобы последовательность хода событий поменялась, надо, чтобы скорость инерционного наблюдателя была больше скорости света, что невозможно.

9.7. Релятивистский закон преобразования скоростей

Вектор в пространстве Минковского имеет 4 проекции, которые будем обозначать греческим символом: $A_m (A_{\text{ct}}, A_x, A_y, A_z)$, и является инвариантным относительно преобразования Лоренца. Такие векторы называются **четырёхмерными** или **4-векторами**. Например, четырехмерный радиус-вектор пространства Минковского $r_m (r_{\text{ct}}, r_x, r_y, r_z)$ имеет следующие пространственно-временные координаты: $r_{\text{ct}} = ct, r_x = x, r_y = y, r_z = z$. При переходе от неподвижной инерциальной системы K к инерциальной системе K' , движущейся вдоль оси X со скоростью $\dot{u}$, компоненты 4-вектора A_m преобразуются по закону:

$$A_x = \frac{A_x^{\text{л}} + \frac{u}{c} A_{\text{ct}}^{\text{л}}}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad A_y = A_y^{\text{л}}, \quad A_z = A_z^{\text{л}}, \quad A_{\text{ct}} = \frac{A_{\text{ct}}^{\text{л}} + \frac{u}{c} A_x^{\text{л}}}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad (9.12)$$

$$A_x^{\text{л}} = \frac{A_x - \frac{u}{c} A_{\text{ct}}}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad A_y^{\text{л}} = A_y, \quad A_z^{\text{л}} = A_z, \quad A_{\text{ct}}^{\text{л}} = \frac{A_{\text{ct}} - \frac{u}{c} A_x}{\sqrt{1 - b^2}}. \quad (9.12a)$$

Преобразования (9.12) и (9.12a) называются соответственно прямыми и обратными.

Эти преобразования аналогичны *преобразованиям Лоренца* (9.5) и (9.6). При переходе в другую инерциальную систему отсчета (что эквивалентно повороту осей пространства Минковского) проекции 4-векторов будут меняться. Отметим, что квадрат интервала между двумя событиями s_{12}^2 (9.10) является

релятивистским инвариантом.

Квадрат 4-вектора определяется как скалярная величина, одинаковая для всех инерциальных систем отсчета и равная

$$A^2 = A_{ct}^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2 = A_{ct}^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2 = \text{inv}. \quad (9.13)$$

Чтобы получить 4-вектор скорости, надо взять производную от 4-радиус-вектора по скалярной величине, выполняющей в пространстве Минковского роль времени, – интервал $ds = cdt = c\sqrt{1-b^2}dt$, который не изменяется при переходе в другую инерциальную систему отсчета (τ – инвариантное собственное время тела, которое показывают покоящиеся в системе часы). Поэтому **4-вектор скорости** есть

$$u_m = \frac{dr_m}{ds}, \quad (9.14)$$

и его проекции будут равны

$$u_{ct} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}, u_x = \frac{u_x}{c\sqrt{1-b^2}}, u_y = \frac{u_y}{c\sqrt{1-b^2}}, u_z = \frac{u_z}{c\sqrt{1-b^2}}. \quad (9.15)$$

Пусть в системе K в плоскости X, Y движется частица m со скоростью $\dot{u}_0$, проекции которой u_{0x} , u_{0y} и u_{0z} , рис. 9.6. Найдем проекции скорости этой частицы u'_{0x} , u'_{0y} и u'_{0z} в системе K' . Если сходственные оси декартовых координат систем отсчета K и K' попарно параллельны и система K' движется относительно K с постоянной скоростью $\dot{u}$ вдоль оси X , причем в начальный момент начала отсчета времени в K и K' ($t = t' = 0$) начала координат O и O' этих систем совпадают, то справедливы преобразования Лоренца в форме (9.6):

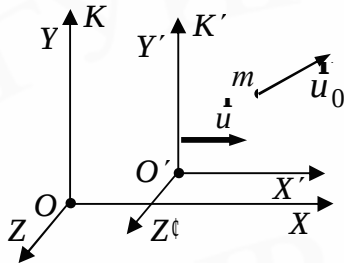


Рис. 9.6. К выводу релятивистского закона преобразования скорости

$$x^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}(x - ut), \quad y^\dagger = y, \quad z^\dagger = z,$$

$$t^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\frac{x}{c} - \frac{u}{c^2}x.$$

Проекции скорости $\dot{u}'_0$ найдем следующим образом:

$$u'_{0x} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt}, u'_{0y} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt}, u'_{0z} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'/dt}{dt'/dt}.$$

Продифференцируем выражения (9.6) для x', y', z', t' по времени t :

$$\frac{dx^\dagger}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\left(\frac{dx}{dt} - u\right) = \frac{u_{0x} - u}{\sqrt{1-b^2}}, \quad \frac{dy^\dagger}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_{0y}, \quad \frac{dz^\dagger}{dt} = \frac{dz}{dt} = u_{0z},$$

$$\frac{dt^\dagger}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\frac{x}{c} - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt} = \frac{1 - u u_{0x}/c^2}{\sqrt{1-b^2}}.$$

Полученные результаты подставим в предыдущие формулы для u'_{0x} , u'_{0y} и u'_{0z} :

$$\boxed{\begin{aligned} u_{0x} &= \frac{u_{0x} - u}{1 - uu_{0x}/c^2}, \\ u_{0y} &= \frac{u_{0y}\sqrt{1-b^2}}{1 - uu_{0x}/c^2}, \quad u_{0z} = \frac{u_{0z}\sqrt{1-b^2}}{1 - uu_{0x}/c^2}. \end{aligned}} \quad (9.16)$$

Отсюда скорость частицы в системе K' равна

$$u_0 = \sqrt{u_{0x}^2 + u_{0y}^2 + u_{0z}^2} = \frac{\sqrt{(u_{0x} - u)^2 + u_{0y}^2(1 - b^2) + u_{0z}^2(1 - b^2)}}{1 - uu_{0x}/c^2}. \quad (9.16a)$$

Данные формулы (9.16) и (9.16a) выражают **релятивистский закон преобразования скоростей** при переходе от неподвижной к подвижной инерциальной системы отсчета. Поскольку все инерциальные системы отсчета равноправны, то неподвижную систему отсчета можно рассматривать как подвижную, а подвижную систему отсчета – как неподвижную. Тогда обратные преобразования скоростей при переходе от подвижной инерциальной системы отсчета к неподвижной инерциальной системе отсчета будут получены из выражений (9.16) заменой u на $-u$:

$$u_{0x} = \frac{u_{0x} + u}{1 + uu_{0x}/c^2}, \quad u_{0y} = \frac{u_{0y}\sqrt{1-b^2}}{1 + uu_{0x}/c^2}, \quad u_{0z} = \frac{u_{0z}\sqrt{1-b^2}}{1 + uu_{0x}/c^2}. \quad (9.17)$$

При малых скоростях ($u \ll c$ и $u_0 \ll c$) релятивистский закон преобразования скорости принимает вид формул преобразования скорости в ньютоновской механике:

$$u'_{0x} = u_{0x} - u, \quad u'_{0y} = u_{0y}, \quad u'_{0z} = u_{0z}, \quad \text{или в векторном виде} \quad \dot{\mathbf{u}}'_0 = \dot{\mathbf{u}}_0 - \dot{\mathbf{u}}.$$

9.8. Релятивистский импульс

Как было показано ранее, длина, интервал времени в релятивистской динамике относительны. Можно показать, используя выражения (9.14), что для замкнутой системы из релятивистских частиц закон сохранения нерелятивистского импульса (4.6) не выполняется. Отметим также, что нерелятивистский импульс $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{u}}$ (см. формулу (3.1)) не является компонентой какого-либо 4-вектора пространства Минковского.

Для любой релятивистской частицы легко определить **4-вектор импульса**, умножая безразмерный 4-вектор скорости u_m на постоянный множитель:

$$p_m = m c u_m. \quad (9.18)$$

Величина m в уравнении (9.18) – это та же масса, которая входит в уравнения ньютоновской механики. При переходе от одной системы отсчета к другой масса m остается неизменной, поскольку является лоренцевым инвариантом.

После подстановки компонент 4-скорости (9.13a) получаем **релятивистский импульс** материальной точки

$$\dot{\mathbf{p}} = p_x \dot{\mathbf{i}} + p_y \dot{\mathbf{j}} + p_z \dot{\mathbf{k}} = \frac{m \dot{\mathbf{u}}}{\sqrt{1-b^2}}. \quad (9.19)$$

Если $b \rightarrow 0$, то релятивистский импульс совпадает с классическим импульсом.

По аналогии с классическим уравнением движения частицы (3.4) релятивистский закон движения частицы массы m записывается так:

$$\boxed{F_m = \frac{dp_m}{ds}} \quad \text{или} \quad \boxed{F_m = mc \frac{du_m}{ds} = mcw_m}, \quad (9.20)$$

где $w_m = du_m/ds$ – 4-вектор ускорения; 4-вектор внешней силы F_m – **сила Минковского**. Уравнение (9.20) называется **уравнением Минковского (релятивистское уравнение динамики материальной точки в 4-мерной форме)** и заменяет **второй закон Ньютона** (3.3).

Сила Минковского не совпадает с обычной силой. Можно показать с учетом закона (3.4), что ее компоненты определяются так:

$$F_{mx} = \frac{1}{c\sqrt{1-b^2}} \frac{dp_x}{dt} = \frac{F_x}{c\sqrt{1-b^2}}, \quad F_{my} = \frac{F_y}{c\sqrt{1-b^2}}, \quad F_{mz} = \frac{F_z}{c\sqrt{1-b^2}}, \quad F_{ct} = \frac{(\dot{\mathbf{F}}, \mathbf{u})}{c^2\sqrt{1-b^2}}. \quad (9.21)$$

Компоненты 4-вектора силы F_m при переходе из одной инерциальной системы отсчета K в другую K' преобразуются согласно формулам (9.12) и (9.12a). Смысл «временной» компоненты F_{ct} обсудим позднее в подтеме 9.9.

Пространственные компоненты уравнения Минковского F_x, F_y, F_z представляют **основной закон релятивистской динамики** материальной точки (тела) (**уравнение движения релятивистской частицы в 3-мерной форме**):

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-b^2}}}, \quad (9.22)$$

где $\dot{\mathbf{F}}$ – результирующая всех сил. Отметим, что уравнение (9.22) внешне совпадает с основным уравнением ньютоновской механики (3.4). Однако в левой части уравнения стоит производная по времени от релятивистского импульса, определяемого (9.18). Уравнение (9.22) инвариантно по отношению к **преобразованиям Лоренца**, удовлетворяя принципу относительности Эйнштейна.

В теории относительности сила $\dot{\mathbf{F}}$ является величиной неинвариантной, в разных системах отсчета ее числовое значение и направление будут различны. В общем случае ускорение релятивистской частицы не совпадает по направлению с результирующей силой. Направление и величина ускорения тела определяются не только силой, но и скоростью. Поэтому в релятивистском случае отношение силы к ускорению не может служить определением массы в отличие от известных представлений в ньютоновской механике. Нельзя ввести величину, которая бы служила мерой инертности тела. Отметим, что в специальной теории относительности масса не является источником гравитационного поля.

Из-за однородности пространства в релятивистской механике выполняется **закон сохранения релятивистского импульса**: релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

При скоростях, значительно меньших скорости света c , уравнение (9.22) переходит в основной закон нерелятивистской механики (3.4). Таким образом, **законы классической механики** можно получить как следствие теории относительности.

тельности для предельного случая $u \ll c$.

9.9. Взаимосвязь массы и энергии. Энергия покоя

Определим *кинетическую энергию* E_k релятивистской частицы как величину, приращение которой равно работе силы, действующей на частицу. Сначала найдем приращение кинетической энергии dE_k частицы под действием силы $\dot{\vec{F}}$ на элементарном пути $d\vec{r} = \dot{\vec{u}} dt$:

$$dE_k = (\dot{\vec{F}}, \dot{\vec{u}}) dt = \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{u}}} \left(\frac{\dot{\vec{p}}}{c} \right), \dot{\vec{u}} dt = (d\vec{p}, \dot{\vec{u}}).$$

Согласно основному уравнению релятивистской динамики (9.22), учитывая, что $2(\dot{\vec{u}}, d\dot{\vec{u}}) = 2u du = d(u^2)$ (см. подтему 4.6), можно получить, что

$$dE_k = d \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - b^2}} \right),$$

где m совпадает с массой покоящейся частицы; $b = u/c$. Покоящаяся частица кинетической энергии не имеет, и поэтому

$$E_k = \int_0^u d \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \quad \text{или} \quad \boxed{E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - mc^2.} \quad (9.23)$$

Выражение (9.23) – это уравнение для *релятивистской кинетической энергии* частицы. Согласно этому уравнению ни одна частица с массой, отличной от нуля, не может двигаться со скоростью света, а безмассовые частицы могут существовать, только если движутся со скоростью света c . При остановке такой частицы она исчезает (поглощается). Как известно, фотоны являются такими частицами. При малых скоростях, когда $u \ll c$, формула (9.23) переходит в ньютоновское выражение для кинетической энергии.

Кинетическая энергия равна разности энергий движущейся и покоящейся частицы. **Полная энергия свободной частицы (тела)** определяется как сумма энергии покоящейся частицы и кинетической энергии и, следовательно, равна

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.} \quad (9.24)$$

Следовательно, «временная» компонента F_{ct} уравнения Минковского (9.20)

$$F_{ct} = \frac{(\dot{\vec{F}}, \dot{\vec{u}})}{c^2 \sqrt{1 - b^2}}$$

связана с изменением полной энергии частицы, так как $(\dot{\vec{F}}, \dot{\vec{u}})$ – мощность силы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = (\dot{\vec{F}}, \dot{\vec{u}}).$$

Перепишем уравнение (9.24) в такой форме

$$E = mc^2 + E_k, \quad (9.25)$$

где в полную энергию E не включена потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле, если такое поле действует на тело. Величину mc^2 Эйнштейн назвал **энергией покоя** (*собственной энергией тела*). Энергия покоя – это общая *внутренняя энергия тела*, из каких бы видов энергии она не состояла (электрической, химической и др.), которой обладает любая покоящаяся частица ($u = 0$) с ненулевой массой:

$$\boxed{E_0 = mc^2}. \quad (9.26)$$

Отметим, что формулу (9.26), согласно которой масса m тела характеризует его энергию покоя E_0 , называют **формулой Эйнштейна**.

Таким образом, «временная» компонента 4-вектора импульса (9.17), согласно выражению (9.15), связана с полной энергией следующим образом:

$$p_{ct} = mc u_{ct} = \frac{mc}{\sqrt{1 - b^2}} = \frac{E}{c}. \quad (9.27)$$

Следовательно, 4-вектор p_m определяет динамические характеристики релятивистской частицы и объединяет энергию и импульс частицы:

$$p_m = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}.$$

Этот вектор называется 4-вектором энергии-импульса.

В силу однородности времени в релятивистской механике выполняется **закон сохранения энергии**: полная энергия замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется со временем.

Соотношение (9.26) выражает фундаментальный закон природы – закон взаимосвязи (пропорциональности) массы m и энергии покоя E_0 тела. Поэтому массу можно рассматривать как **меру энергосодержания** тела. Можно утверждать, что со всякой массой связана энергия и, наоборот, с энергией, какой бы формы она не была, связана масса. Таким образом, масса и энергия связаны друг с другом, хотя и являются качественно различными свойствами материи.

Формулы, полученные для энергии (9.24) и импульса (9.21) свидетельствуют, что данные величины имеют разные значения в разных системах отсчета. Однако существует величина – некоторая комбинация E и p , которая является инвариантной, т.е. имеет одно и то же значение в разных системах отсчета.

Используем правила преобразования 4-вектора (9.12а) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой и получим, что

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{u}{c} \frac{E}{c}}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - u p_x}{\sqrt{1 - b^2}}.$$

Импульс и энергия преобразуются друг через друга. Тогда квадрат 4-вектора, определяемый из формулы (9.13), имеет вид

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{E_0^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = inv.$$

Таким образом, подставив формулы-определения релятивистского импульса

частицы (9.19) и полной энергии (9.24), можно получить

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = m^2 c^2,$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 = \text{inv}, \quad (9.28)$$

$$\frac{\mathbf{r}}{p} = E \mathbf{u} / c^2. \quad (9.29)$$

Из формулы (9.28), а также законов сохранения релятивистского импульса и энергии получаем, что масса системы тел в теории относительности не является мерой количества вещества. Масса системы тел (частиц) не равна сумме масс тел (частиц), составляющих систему. Как и в нерелятивистской (ньютоновской) теории, масса изолированной системы тел не изменяется со временем.

Литература

1. Иродов, И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. – М. : Лаборатория Базовых знаний, 2001.
2. Иродов, И. Е. Волновые процессы. Основные законы / И. Е. Иродов. – М. : Лаборатория Базовых знаний, 2001.
3. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1. Механика / И. В. Савельев. – М. : Астрель, АСТ, 2004.
4. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 4. Волны. Оптика / И. В. Савельев. – М. : Астрель, АСТ, 2003.
5. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Академия, 2003.
6. Джанколи, Д. Физика: в 2 т. Т. 1 / Д. Джанколи. – М. : Мир, 1989.
7. Физическая энциклопедия: в 5 т. Т. 1 – 5 / гл. ред. А. М. Прохоров. – М. : Сов. Энциклопедия, 1988–1998.
8. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, МФТИ, 2002.
9. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1999.
10. Хайкин, С. Э. Физические основы механики / С. Э. Хайкин. – М. : Физматлит, 1962.
11. Алешкевич, В. А. Механика твердого тела. Лекции [Электрон. ресурс] / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. – М. : Физ. фак. МГУ, 1997. – Режим доступа: <http://nature.ru>.
12. Алешкевич, В. А. Колебания и волны. Лекции [Электрон. ресурс] / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. – М. : Физ. фак. МГУ, 2001. – Режим доступа: <http://nature.ru>.
13. Киттель, Ч. Механика / Ч. Киттель, У. Найт, Н. Рудерман. – М. : Наука, 1971.
14. Аленицын, А. Г. Краткий физико-математический справочник / А. Г. Аленицын, Е. И. Бутиков, А. С. Кондратьев. – М. : Наука, 1990.
15. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М. : Физматлит, 1963.
16. Ташлыкова-Бушкевич, И. И. Влияние вторых фаз на послойный состав быстро-затвердевших сплавов алюминия // 3-я Всероссийская науч.-тех. конф. Быстрозакаленные материалы и покрытия: сб. докл. / И. И. Ташлыкова-Бушкевич. – М., 2004. – С. 23–27.
17. Ташлыкова-Бушкевич, И. И. Метод Резерфордского обратного рассеяния при анализе состава твердых тел : учебно-метод. пособие к выполнению лабораторной работы по курсу «Физика» для студентов всех специальностей и форм обучения БГУИР / И. И. Ташлыкова-Бушкевич. – Минск : БГУИР, 2003.

РАЗДЕЛ 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Тема 10. Основные понятия статистической физики и термодинамики

10.1. Макроскопическая система.

Статистический и термодинамический методы исследования

Для теоретического исследования зависимости свойств тел от их строения, взаимодействия между частицами, из которых состоят тела, и характера движения этих частиц используется статистический (молекулярно-кинетический) метод.

Статистический метод – это метод исследования **макроскопических систем**, т.е. систем, состоящих из большого числа частиц, который оперирует статистическими закономерностями и средними значениями физических величин, характеризующих эту систему.

Этот метод лежит в основе **молекулярной физики** – раздела физики, который изучает строение и свойства вещества исходя из **молекулярно-кинетических представлений**, основывающихся на том, что все тела состоят из непрерывно хаотически движущихся атомов, молекул или ионов. Следовательно, в этом случае используется **микроскопическое описание**.

Состояние макроскопической системы, в котором отсутствуют потоки (массы, заряда, энергии и т.п.) между ее подсистемами, называется **равновесным (термодинамическое равновесие)**.

Термодинамическими называют такие макроскопические системы, которые находятся в термодинамическом равновесии. **Термодинамические параметры** – физические величины, характеризующие состояние термодинамической системы. Любая функция термодинамических параметров называется функцией состояния системы.

Изолированные термодинамические системы – это системы, которые не обмениваются с внешней средой ни энергией, ни веществом. Система, изолированная от каких-либо внешних воздействий, называется **замкнутой** и может быть разбита на составляющие ее подсистемы, слабо взаимодействующие между собой. Изменение состояния термодинамической системы со временем называется **термодинамическим процессом**.

Термодинамический метод – это метод исследования макроскопических систем, оперирующий величинами, характеризующими систему в целом при различных превращениях энергии, происходящих в системе. При этом определяется состояние термодинамической системы и не учитывается внутреннее строение изучаемых тел и характер движения отдельных частиц. **Макроскопическое описание** опирается на величины, которые непосредственно измеряются физическими приборами. Термодинамический подход оказывается тем точнее, чем больше частиц в системе.

Этот метод лежит в основе **термодинамики** – раздела физики, изучающе-

го общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями.

10.2. Физический смысл температуры

Температура является термодинамическим параметром, играющим важнейшую роль в физике в целом.

Температура – это физическая величина, которая характеризует состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. Температура – единственный термодинамический параметр, который одинаков для всех частей изолированной системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия.

Поскольку температура – это одна из макроскопических характеристик макросистемы, то она не имеет смысла для систем, состоящих из нескольких молекул. Необходимо отметить, что при определенной договоренности можно условно говорить о температуре даже одной частицы.

В настоящее время широко используются две температурные шкалы.

Международная практическая шкала (шкала Цельсия) – шкала, градуированная в градусах Цельсия ($^{\circ}\text{C}$) по двум реперным точкам – температурам замерзания и закипания воды при давлении $\sim 1,01 \cdot 10^5$ Па, которые принимаются соответственно 0 и 100°C .

Термодинамическая температурная шкала (шкала Кельвина) – шкала, градуированная в кельвинах (К), которая определяется по одной реперной точке – **тройной точке воды** – температуре, при которой лед, вода и насыщенный пар при давлении 609 Па находятся в термодинамическом равновесии. Температура этой точки по данной шкале равна 273,15 К. Температура $T = 0$ К называется **нулем Кельвина** (абсолютным нулем).

Термодинамическая температура (T) и температура (t) по Международной практической шкале связаны соотношением

$$T = 273,15 + t.$$

Нормальные условия: $T_0 = 273,15$ К $= 0^{\circ}\text{C}$, $p_0 \approx 1,01 \cdot 10^5$ Па.

В некоторых западных странах широко используется шкала Фаренгейта. Точка замерзания воды равна 32°F , точка ее закипания определяется как 212°F . Например, нормальная температура тела человека равна $98,6^{\circ}\text{F}$.

В дальнейшем (см. подтему 10.4) мы покажем, что среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекул $\langle e_{\text{пост}} \rangle$ зависит только от T . Таким образом, физический смысл температуры T заключается в том, что температура газа является мерой кинетической энергии его молекул.

Рассмотрим остальные термодинамические параметры. **Давление** – это скалярная величина, равная отношению модуля силы, действующей перпендикулярно поверхности, к площади этой поверхности при условии равномерного распределения силы по поверхности

$$p = F/S.$$

Единица давления в СИ – паскаль (Па): $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$.

В технике и физике используют следующие понятия:

– физическая атмосфера, $1 \text{ атм.} \approx 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ – это нормальное атмосферное давление при 15°C или давление столба воды высотой 10,33 м;

– мм ртутного столба или торр (по имени Торричелли), $1 \text{ атм.} = 760 \text{ мм рт. ст.}$;

– бар, $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$; $1 \text{ атм.} \approx 1,01 \text{ бар}$.

Объем V – это параметр состояния вещества, измеряемый в метрах кубических (м^3), литрах (л), миллилитрах (мл). **Удельный объем** v – это объем единицы массы. Когда тело однородно, т.е. его плотность $\rho = \text{const}$, то $v = V/m = 1/\rho$.

10.3. Уравнение состояния идеального газа

В молекулярно-кинетической теории пользуются идеализированной моделью **идеального газа**, в которой считается, что:

1. Собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда.

2. Между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия.

3. Столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Таким образом, идеальный газ можно рассматривать как совокупность беспорядочно движущихся молекул-шариков, имеющих пренебрежимо малый собственный объем и не взаимодействующих друг с другом на расстоянии.

Рассмотрим экспериментальные законы, описывающие поведение идеального газа.

Закон Бойля-Мариотта (середина XVII в.):

для данной массы газа m при постоянной температуре T произведение давления p на объем V есть величина постоянная:

$$pV = \text{const} \text{ при } T = \text{const} \text{ и } m = \text{const}, \quad (10.1)$$

т.е. при постоянной температуре объем газа обратно пропорционален приложенному к нему давлению

$$V \sim 1/p.$$

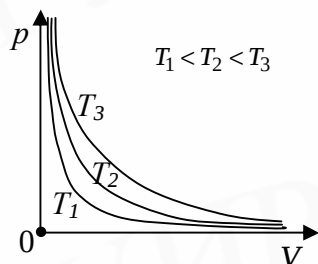


Рис. 10.1. Изотермы идеального газа

Кривая, изображающая зависимость между p и V , характеризующая свойства вещества при постоянной температуре, называется **изотермой**. Изотермы – это гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура происходящего процесса, рис. 10.1.

Количество вещества ν – это физическая величина, определяемая числом молекул, атомов или ионов, из которых состоит вещество.

Единица количества вещества – моль – это количество вещества системы, содержащей столько же молекул, сколько содержится в 0,012 кг изотопа

углерода ^{12}C .

Таким образом, в одном моле любого вещества содержится одно и то же число молекул N_A , называемое **числом Авогадро**: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$. Общее число молекул N газа определяется как

$$N = n N_A = \frac{m}{M} N_A,$$

где $n = m/M$ – число молей; m – масса газа; M – **молярная масса**, определяемая как масса одного моля вещества.

Единица молярной массы в СИ – килограмм на моль (кг/моль).

Закон Авогадро (конец XVIII в.):

моли любых газов при одинаковой температуре и давлении занимают одинаковые объемы.

При нормальных условиях ($T = T_0$, $p = p_0$) этот объем V_M (**молярный объем**) равен: $V_M = 22,41 \frac{\text{л}}{\text{моль}} = 22,41 \times 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$.

Объем газа массы m и число молекул в единице объема n – **концентрация молекул** – определяются соответственно так

$$V = n V_M = \frac{m}{M} V_M, \quad (10.2)$$

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_M}. \quad (10.2a)$$

Парциальное давление – это давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

Закон Дальтона (начало XIX в.):

давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений $p_1, p_2, \dots, p_n$ входящих в нее газов:

$$p = \sum_n p_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n. \quad (10.3)$$

Закон Шарля (XVIII в.):

давление p данной массы m газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой t , рис. 10.2, а:

$$p = p_0(1 + a t) \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const}, \quad (10.4)$$

где $a = 1/273 \text{ K}^{-1}$; p_0 – давление газа при $t = 0^\circ\text{C}$. Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется **изохорным**. На диаграмме в координатах (p, t) он изображается прямой, называемой **изохорой**, рис. 10.2, а.

Закон Гей-Люссака (начало XIX в.):

объем V данной массы m газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой t , рис. 10.2, б:

$$V = V_0(1 + a t) \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const}, \quad (10.5)$$

где $a = 1/273 \text{ K}^{-1}$; V_0 – объем газа при $t = 0^\circ\text{C}$. Процесс, протекающий при посто-

янном давлении, называется **изобарным**. На диаграмме в координатах (V, t) , рис. 10.2, б, этот процесс изображается прямой, называемой **изобарой**.

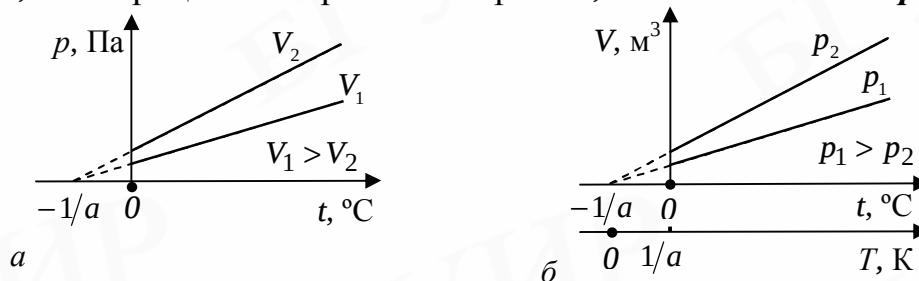


Рис. 10.2. Примеры термодинамических процессов
а – изохоры идеального газа; б – изобары идеального газа

Изобары и изохоры пересекают ось температуры в точке $t = -1/a = -273^\circ\text{C}$. Если начало отсчета сместить в эту точку, то получим шкалу Кельвина (термодинамическую температуру): $T = t + 1/a$ (см. рис. 10.2, б).

В термодинамической шкале температур

$$V = V_0(1 + a t) = V_0 a T, \quad p = p_0(1 + a t) = p_0 a T.$$

Откуда

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{V}{T} = \text{const}} \quad \text{при } p = \text{const}, m = \text{const}, \quad (10.6)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{p}{T} = \text{const}} \quad \text{при } V = \text{const}, m = \text{const}, \quad (10.7)$$

где индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям, лежащим на одной изобаре или изохоре соответственно.

Уравнение (10.6) называют **законом Гей-Люссака** ($V \sim T$). Уравнение (10.7) называют **законом Шарля** ($p \sim T$).

Уравнением состояния идеального газа называется уравнение, которое связывает его давление p , объем V и температуру T в состоянии термодинамического равновесия:

$$f(p, V, T) = 0.$$

Французский физик и инженер Б. Клапейрон, объединив законы (10.1) и (10.6), вывел **уравнение Клапейрона**:

для данной массы идеального газа отношение произведения давления и объема к термодинамической температуре есть величина постоянная

$$\frac{pV}{T} = C = \text{const}, \quad (10.8)$$

где C – газовая постоянная, которая зависит от химического состава газа и пропорциональна его массе m .

Перепишем уравнение (10.8), используя формулу (10.2), в виде

$$pV_M n = CT \quad \text{или} \quad pV_M = RT, \quad (10.9)$$

где $R = C/n$ – молярная газовая постоянная. Из закона Авогадро и уравнения (10.9) следует, что молярная газовая постоянная одинакова у всех газов. Поэто-

му ее принято называть **универсальной газовой постоянной**. Экспериментально установлено, что $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$. Действительно,

$$R = \frac{PV_m}{T} = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{м}^3 / \text{моль}}{273 \text{ К}} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Для газа произвольной массы m уравнение (10.9) можно переписать в виде

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (10.10)$$

Уравнение состояния для массы m идеального газа (10.10) называется **уравнением Менделеева–Клапейрона**. Если ввести **постоянную Больцмана**

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К},$$

то уравнение (10.10) можно записать, используя формулу (10.2а), как

$$p = \frac{RT}{V_M} = \frac{kN_A T}{V_M} = nkT. \quad (10.11)$$

Уравнения (10.9) и (10.11) – это разные формы записи *уравнения состояния идеального газа* (10.10), которое справедливо для реальных газов, если их плотности невысоки (при комнатной температуре и давлении, равном 10^5 Па).

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. Давление идеального газа при данной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул.
2. При одинаковой температуре и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул.

10.4. Средняя энергия молекулы.

Уравнение молекулярно-кинетической теории для давления газа

Рассмотрим непосредственно измеряемые параметры (температуру, давление и т.д.) с микроскопической точки зрения. Будем считать, что выполняются законы классической физики. Применить законы Ньютона к каждому атому или молекуле газа, количество которых больше 10^{25} на 1 м^3 , практически невозможно. Поэтому в **кинетической теории газов** используют статистический метод исследования.

Пусть в сосуде объемом V находится идеальный газ, состоящий из N молекул массой m . Концентрация молекул в газе по определению $n = N/V$. Разобьем молекулы в каждой единице объема на группы Dn_i , в каждой из которых скорости молекул можно считать практически одинаковыми и равными u_i , так что $\sum Dn_i = n$ – полное число молекул в единице объема. Предположим, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда, а соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие. Давление газа на стенку обусловлено столкновениями с ней молекул газа.

При оценочном подходе будем считать, что каждая молекула, налетая на

стенку нормально, в результате столкновения с ней отлетает в противоположном направлении. Тогда до столкновения со стенкой молекула имела импульс $\vec{p}_1 = m\vec{u}$ и после столкновения – импульс $\vec{p}_2 = -m\vec{u}$.

Приращение импульса молекулы в результате столкновения

$$D\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{u} - (-m\vec{u}) = 2m\vec{u}. \quad (10.11a)$$

Модуль приращения импульса, который передают стенке молекулы i -й группы ежесекундно, найдем как

$$|\Delta\vec{p}_i| = 2mu_i \cdot n_i, \quad (10.11б)$$

где n_i – число молекул, которые достигают ежесекундно поверхности стенки, двигаясь перпендикулярно к ней.

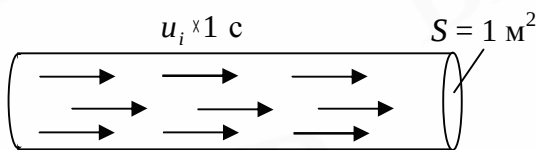


Рис. 10.3. К выводу основного уравнения кинетической теории

Число молекул n_i равно числу молекул в цилиндре длиной $u_i \cdot 1$ с и сечением $S = 1 \text{ м}^2$, рис. 10.3, т.е., поскольку все направления равновероятны, то

$$n_i = \frac{1}{6} Dn_i u_i. \quad (10.11в)$$

Суммируя по всем группам, находим

$$n = \sum n_i = \frac{1}{6} \sum \Delta n_i u_i.$$

Разделим и умножим последнюю сумму на n . В результате приходим к следующему выражению для числа ударов молекул о единицу поверхности стенки в единицу времени:

$$n = \frac{1}{6} n \langle u \rangle, \quad (10.12)$$

где $\langle u \rangle = \frac{1}{n} \sum \Delta n_i u_i$ – среднее значение модуля скорости молекул. Заметим, что точный расчет, учитывающий, что молекулы движутся не вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, а с равной вероятностью вдоль любого направления в пространстве, дает в формуле (10.12) коэффициент $1/4$, а не $1/6$.

Тогда из выражений (10.11б) и (10.11в) получим, что

$$|\Delta\vec{p}_i| = \frac{1}{3} m u_i^2 \Delta n_i.$$

Полное давление получим, просуммировав последнее уравнение (10.16) по всем группам Δn_i молекул. Поскольку по определению давление $p = F/S = [S = 1] = dp/dt = Dp/Dt$, то давление равно

$$p = \sum |\Delta\vec{p}_i| = \frac{1}{3} m \sum u_i^2 \Delta n_i.$$

Разделим и умножим данное уравнение на количество молекул n и получим

$$p = \frac{1}{3} n m \langle u^2 \rangle. \quad (10.13)$$

Выражение (10.13) можно переписать иначе:

$$p = \frac{2}{3} n \langle e_{\text{пост}} \rangle, \quad (10.14)$$

где $\langle e_{\text{пост}} \rangle = \langle mv^2/2 \rangle$ – **среднее значение поступательной кинетической энергии молекул**. Уравнение для полного давления (10.14) является точным, хотя и было получено при использовании ряда допущений.

Формулу (10.14) называют **основным уравнением кинетической теории газов**. Из него следует статистический смысл параметра давления p : давление газа на стенку определяется средним значением поступательной кинетической энергии молекул и концентрацией молекул.

Сопоставим выражение (10.14) с уравнением Менделеева–Клапейрона (10.11) и найдем, что

$$\langle e_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (10.15)$$

$\langle e_{\text{пост}} \rangle$ зависит только от температуры газа, от массы же молекул не зависит.

10.5. Внутренняя энергия идеального газа

Внутренней энергией U макросистемы называют энергию всевозможных видов движения и взаимодействия всех частиц (молекул, атомов, ионов и т.д.), образующих рассматриваемую систему. Например, внутренняя энергия системы, находящейся в газообразном состоянии, состоит из:

1) кинетической энергии беспорядочного (теплого) поступательного и вращательного движения молекул, а также колебательного движения атомов в молекулах;

2) потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия;

3) энергии электронных оболочек атомов и ионов;

4) энергии движения и взаимодействия нуклонов в атомных ядрах.

Внутренняя энергия является однозначной функцией состояния термодинамической системы и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Подобно потенциальной энергии в механике, внутренняя энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого U_0 , зависящего от выбора состояния, в котором внутренняя энергия принимается равной нулю. Выбор U_0 не играет роли, так как в термодинамических расчетах определяется изменение внутренней энергии. В дальнейшем будем считать, рассматривая процессы, не связанные с химическими реакциями и другими превращениями электронных оболочек атомов и ионов, что составляющие пп. 3 и 4 внутренней энергии не изменяются, и не будем их включать во внутреннюю энергию.

В идеальном газе пренебрегают силами межмолекулярного взаимодействия на расстоянии. Поэтому **внутренняя энергия идеального газа** равна сумме кинетических энергий беспорядочного движения всех молекул.

Внутренняя энергия идеального газа является величиной аддитивной: внутренняя энергия всей системы равна сумме внутренних энергий ее частей.

10.6. Закон равнораспределения энергии

Чтобы определить положение центра масс молекулы, необходимо задать три координаты. Следовательно, молекула, как и материальная точка, имеет три

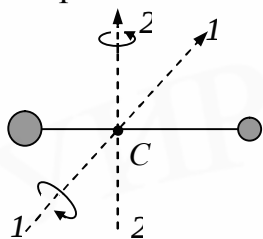


Рис. 10.4. Две вращательные степени свободы жесткой двухатомной молекулы

поступательные степени свободы. Если молекула состоит из нескольких атомов, то необходимо дополнительно учитывать степени свободы вращательного движения. Например, жесткая двухатомная молекула имеет пять степеней свободы: три поступательные и две вращательные, которые связаны с углами поворота вокруг двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс, рис. 10.4. Если молекула упругая, то молекула будет

иметь еще одну степень свободы (расстояние между атомами) – колебательную.

Существует **правило**: система из N материальных точек, между которыми нет жестких связей, имеет $3N$ степеней свободы. Любая из жестких связей, устанавливающая неизменное взаимное расположение двух точек, уменьшает число степеней свободы на единицу.

Пример. Система состоит из двух атомов жестко связанных, тогда число степеней свободы $i = 3N - 1 = 5$. Если система состоит из трех атомов с жесткой связью, то $i = 3N - 3 = 6$ степеней свободы.

В классической статистической физике выводится **закон равнораспределения энергии (закон Больцмана)**:

на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная $(1/2)kT$.

Следовательно, **средняя энергия молекулы идеального газа**, в котором атомы в молекуле жестко закреплены и не взаимодействуют, определяется как

$$\langle e \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (10.16)$$

где под i понимается сумма числа поступательных ($n_{\text{пост}}$), вращательных ($n_{\text{вращ}}$) и удвоенного числа колебательных ($n_{\text{кол}}$) степеней свободы: $i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{кол}}$. Для молекул с жесткой связью между атомами число i совпадает с **числом степеней свободы**.

Внутренняя энергия одного моля идеального газа будет равна сумме кинетических энергий N_A молекул:

$$U_M = N_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} RT. \quad (10.17)$$

Внутренняя энергия для произвольной массы m идеального газа равна

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = n \frac{i}{2} RT, \quad (10.18)$$

где M – молярная масса; ν – количество молей. Таким образом, **внутренняя энергия идеального газа** зависит только от его температуры.

10.7. Теплоемкость идеального газа

Теплота, получаемая системой от внешней среды, определяется как энергия, передаваемая системе внешними телами путем теплообмена. Передача макросистеме тепла Q осуществляется как передача внутренней энергии макросистеме от внешних тел при контакте с ними (может происходить и через излучение) без совершения работы.

Удельная теплоемкость вещества – это величина, характеризующая конкретное вещество, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}, \quad (10.19)$$

где m – масса вещества; dQ – элементарное значение теплоты.

Тогда теплота Q , поглощенная (выделенная) системой при изменении ее температуры, пропорциональна массе системы и изменению температуры:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} c m dT. \quad (10.20)$$

Если удельная теплоемкость вещества не зависит от температуры, то

$$Q = cm(T_2 - T_1). \quad (10.20a)$$

Единица теплоты в СИ – джоуль (Дж). Часто используется такая единица измерения теплоты, как калория: $4,19 \text{ Дж} \approx 1 \text{ кал}$, $4,19 \cdot 10^3 \text{ Дж} \approx 1 \text{ ккал}$.

Единица удельной теплоемкости в СИ – джоуль на килограмм-Кельвин (Дж/(кг·К)).

Для воды при $T = 15^\circ \text{C}$ и постоянном давлении 1 атм. $c = 1,00 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot ^\circ \text{C})$, т.е. для повышения температуры 1 кг воды на 1°C требуется 1 ккал теплоты.

Молярная теплоемкость вещества – это величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моль вещества на 1 К:

$$C = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} = c M, \quad (10.21)$$

где $n = m/M$ – число молей, т.е. количество вещества; M – молярная масса газа.

Единица молярной теплоемкости в СИ – Джоуль на моль-кельвин (Дж/(моль·К)).

Теплоемкость C является функцией процесса и зависит от того, каким образом происходит процесс нагревания: при постоянном давлении (C_p) или при постоянном объеме (C_v). Тогда для ν молей газа теплота будет выражаться как

$$Q = n C_p dT, \quad p = \text{const}, \quad (10.21a)$$

$$Q = n C_v dT, \quad V = \text{const}. \quad (10.21b)$$

Важная характеристика газов – **показатель (постоянная) адиабаты** γ :

$$\gamma = C_p / C_v. \quad (10.22)$$

Опытным путем получено, что значения безразмерной величины γ для разных газов лежат в пределах $1,30 - 1,67$.

Тема 11. Начала термодинамики

11.1. Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики является одним из фундаментальных законов физики макросистем и утверждает, что приращение внутренней энергии макросистемы при ее переходе из начального состояния 1 в конечное 2 не зависит от способа перехода. Для конечных изменений термодинамических параметров **первое начало термодинамики** формулируется следующим образом:

количество теплоты Q , поглощенное (выделенное) макросистемой, идет на приращение ее внутренней энергии $DU = U_2 - U_1$ и на совершение системой работы A над внешними телами:

$$Q = DU + A, \quad (11.1)$$

где величины ΔU , A и Q являются функциями процесса. Входящие в уравнение (11.2) величины могут иметь и положительные, и отрицательные значения. Например, если $Q < 0$, то тепло отводится от системы, иначе при поглощении системой тепла $Q > 0$. Если $A < 0$, то работа производится над системой.

Существует также следующая формулировка **первого начала термодинамики**:

невозможен вечный двигатель (перпетуум мобиле) первого рода, т.е. такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энергия.

При вычислении совершенной системой работы или полученного системой тепла обычно приходится разбивать рассматриваемый процесс на ряд элементарных процессов, каждый из которых соответствует весьма малому изменению параметров системы. Тогда для бесконечно малого изменения состояния системы используют **первое начало термодинамики в дифференциальной форме**

$$dQ = dU + dA, \quad (11.2)$$

где dU – бесконечно малое изменение внутренней энергии, происходящее при добавлении бесконечно малого количества тепла dQ системе, которая совершает бесконечно малую работу dA . Знак d означает, что мы имеем дело не с приращением какой-либо функции, а с элементарными значениями теплоты (dQ) и работы (dA). В отличие от U величины Q и A являются функциями процесса.

Если объем макросистемы, например газа, получает приращение dV , то элементарная работа сил давления газа на стенки будет равна

$$dA = p dV,$$

где p – давление газа на стенки. Так как давление газа на соседние тела (стенки) при изменении объема газа может изменяться, то работа, совершаемая газом при конечных изменениях объема от V_1 до V_2 , может быть представлена в виде интеграла

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (11.3)$$

Знак работы зависит от знака dV : при расширении газа ($dV > 0$) работа $A > 0$, а при сжатии газа ($dV < 0$) работа $A < 0$.

С учетом формулы (11.3) перепишем первое начало термодинамики как

$$dQ = dU + p dV. \quad (11.4)$$

Согласно уравнению (11.4) при постоянном объеме, когда $dV = 0$, для молярной теплоемкости газа можно записать

$$C_V = \left(\frac{\partial U_M}{\partial T} \right)_V, \quad (11.5)$$

где при дифференцировании U_M по T объем V считается постоянным. Следовательно, молярная теплоемкость газа при постоянном объеме C_V равна изменению внутренней энергии 1 моль газа при повышении его температуры на 1 К.

Из формулы (10.17) для идеального газа, $dU_M = \frac{i}{2} R dT$. Тогда

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (11.6)$$

Согласно уравнению (11.5)

$$dU_M = C_V dT.$$

Во все соотношения термодинамики входит DU . Опустим постоянную интегрирования и запишем для внутренней энергии одного моля идеального газа

$$U_M = C_V T. \quad (11.7)$$

Используем формулы (11.2а), (11.4) и (11.5) и представим выражение (10.20) для молярной теплоемкости (для 1 моль газа) в виде

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU_M}{dT} + \frac{dA_M}{dT},$$

$$C = C_V + p \frac{dV_M}{dT}. \quad (11.8)$$

Для изобарического процесса, например, газ нагревается при $p = \text{const}$, из уравнения Клапейрона (10.9) получаем

$$p \frac{dV_M}{dT} = p \frac{d}{dT} \left(\frac{RT}{p} \right) = R \frac{dT}{dT} = R,$$

и, следовательно, в этом случае

$$C_p = C_V + R. \quad (11.9)$$

Уравнение (11.9) называется **уравнением Майера** и показывает, что C_p всегда больше C_V . Это объясняется тем, что при *нагревании газа* при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа. Используем выражение (11.7) и тогда из уравнения (10.10) получим, что молярная теплоемкость при постоянном давлении определяется так:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (11.10)$$

Из выражений (11.9) и (11.10) согласно формуле (10.21) следует

$$g = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} = \frac{i + 2}{i}, \quad (11.11)$$

отсюда молярная теплоемкость будет равна

$$C_v = R/(g - 1). \quad (11.12)$$

На основании анализа уравнений (11.6) и (11.10) получаем, что молярные теплоемкости идеального газа определяются только числом степеней свободы i молекул и не зависят от температуры. Это утверждение молекулярно-кинетической теории справедливо в довольно широком интервале температур лишь для одноатомных реальных газов.

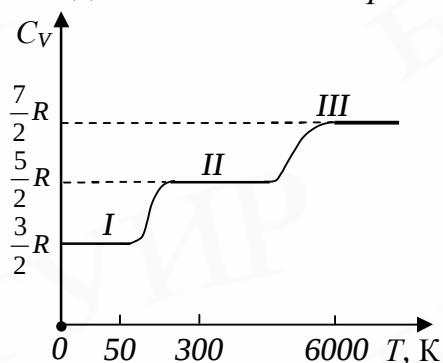


Рис. 11.1. Экспериментальная зависимость C_v от температуры для водорода

Экспериментальная зависимость C_v от температуры, полученная в опытах с водородом, рис. 11.1, объясняется квантовой механикой. Энергия вращательного и колебательного движений является квантованной, т.е. она может принимать не любые, а только дискретные значения. Если энергия теплового движения недостаточна, например для возбуждения колебаний, то эти колебания не вносят своего вклада в теплоемкость. Соответствующая степень свободы «замораживается» и к ней не применим закон равнораспределения энергии.

Этим объясняется, что теплоемкость моля двухатомного газа – водорода ($i = 5$) – при комнатной температуре равна $(5/2)R$, а не $(7/2)R$. Следовательно, при температурах, соответствующих участкам I, II и III на рис. 11.1 соответственно, у молекул проявляются только 3 поступательные степени свободы, затем добавляются 2 вращательные степени свободы, а при высоких температурах начинает играть роль колебательное движение молекулы. В промежутках температур теплоемкость растет монотонно, так как не все молекулы одновременно вовлекаются во вращательное и колебательное движения.

Таким образом, классическая теория теплоемкости приблизительно верна только для отдельных температурных интервалов, причем каждому интервалу соответствует свое число степеней свободы молекул.

На основании формул (11.12) и (11.7) получим следующее выражение для внутренней энергии ν молей идеального газа:

$$U = \frac{nRT}{g - 1} = \frac{pV}{g - 1}. \quad (11.13)$$

Рассмотрим **применение первого начала термодинамики** в случае **изо-процессов**, т.е. таких процессов, когда один из термодинамических параметров при протекании процесса не изменяется.

1. **Изохорный процесс** ($V = \text{const}$, см. рис. 10.2, а). Согласно первому началу термодинамики (11.26), так как для изохорного процесса $dA = p dV = 0$:

$$dQ = dU + dA = dU.$$

Из формулы (11.5) $dU_M = C_V dT$. Поэтому для произвольной массы идеального газа получим

$$dQ = dU = \frac{m}{M} C_V dT. \quad (11.14)$$

2. *Изобарный процесс* ($p = \text{const}$, см. рис. 10.2, б). Согласно формуле (11.3) работа при увеличении объема от V_1 до V_2 равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1). \quad (11.15)$$

Воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона (10.10):

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1, \quad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2.$$

Откуда

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{M} \frac{R}{p} (T_2 - T_1).$$

Тогда уравнение (11.15) для работы изобарного расширения примет вид

$$A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1). \quad (11.16)$$

Физический смысл молярной газовой постоянной R :

R численно равна работе 1 моля идеального газа при изобарном расширении при нагреве его на 1К.

В изобарном процессе при сообщении газу массой m количества теплоты

$$dQ = \frac{m}{M} C_p dT$$

его внутренняя энергия возрастает на величину согласно уравнению (11.5):

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT.$$

3. *Изотермический процесс* ($T = \text{const}$, см. рис. 10.1). Исходя из выражения (11.3) и уравнения Менделеева–Клапейрона (10.10) найдем работу изотермического расширения газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Внутренняя энергия идеального газа при изотермическом процессе не изменяется, так как

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT = 0.$$

В изотермическом процессе теплоемкость газа не определена. Из первого начала термодинамики (11.2б) получаем

$$dQ = dU + dA = dA.$$

Все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (11.17)$$

Следовательно, в течение изотермического расширения газа, чтобы его температура не понижалась, к газу надо подводить количество теплоты, равное работе газа при расширении.

4. *Адиабатический процесс.* **Адиабатическим** называется **процесс**, при котором отсутствует теплообмен ($dQ = 0$) между системой и окружающей средой. При этом процессе теплоемкость равна нулю, см. формулу (10.24). Адиабатические процессы используют в холодильных установках и т.д.

Из первого начала термодинамики (11.2б) следует, что

$$dA = -dU, \quad (11.18)$$

внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Можно доказать справедливость **уравнения адиабатического процесса**, называемого также **уравнением Пуассона**:

$$pV^g = \text{const}. \quad (11.19)$$

Уравнение (11.19) объясняет причину названия g *показателем адиабаты*.

Эквивалентные уравнения адиабатического процесса имеют вид

$$TV^{g-1} = \text{const}, \quad (11.19a)$$

$$T^g p^{1-g} = \text{const}. \quad (11.19б)$$

Отметим, что g называется также **коэффициентом Пуассона**.

Диаграмма адиабатического процесса в координатах (p , V) изображается кривой, называемой **адиабатой**, рис. 11.2. Как видно из рис. 11.2, адиабата идет круче изотермы, так как

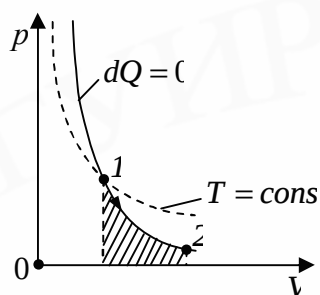


Рис. 11.2. К сравнению графиков адиабаты и изотермы

$$g = \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} > 1.$$

Работа адиабатического расширения (при этом температура газа уменьшается от T_1 до T_2) идеального газа

$$A = \int_{T_1}^{T_2} \left(-\frac{m}{M} C_V \right) dT = -\frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2). \quad (11.20)$$

5. *Политропный процесс.* **Политропным** называется **процесс**, в котором теплоемкость остается постоянной. Исходя из первого начала термодинамики (11.2б) для политропного процесса можно вывести **уравнение политропы**

$$pV^n = \text{const}, \quad (11.21)$$

где $n = (C - C_p)/(C - C_V)$ – **показатель политропы**. В частности, при $C = 0$, $n = g$ и из формулы (11.21) получается уравнение адиабаты.

11.2. Вероятность и флуктуации.

Смысл статистического описания: малость относительной флуктуации

Статистическая физика – это раздел физики, в котором изучаются свойства макросистем исходя из индивидуальных свойств составляющих мак-

росистему частиц (число частиц порядка $10^{22} - 10^{23}$) и взаимодействий между ними.

Основу статистической физики составляет **теория вероятностей**. **Вероятность** интересующего нас события характеризуется кратностью его повторения. Если из N случаев i -е событие происходит N_i раз, то вероятностью P_i этого события называют величину

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}.$$

Так как на практике N всегда конечно, то для вычисления вероятности стараются, чтобы N и N_i были достаточно большими. Поэтому можно рассчитывать вероятность как

$$P_i \approx \frac{N_i}{N}. \quad (11.22)$$

Сумма вероятностей всех возможных результатов измерений равна единице:

$$\sum_i P_i = 1. \quad (11.23)$$

Пусть некоторая величина x описывает, например, молекулу и принимает дискретные значения x_i с разной вероятностью P_i . Тогда **среднее (среднее арифметическое) значение** величины $\langle x \rangle$ вычисляется так:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_i N_i x_i = \sum_i P_i x_i. \quad (11.24)$$

Экспериментально наблюдаемая доля результатов, когда событие осуществляется, испытывает флуктуации $\Delta x = x - \langle x \rangle$. **Флуктуации** – это случайные отклонения физической величины от ее среднего значения. Отметим, что флуктуации испытывают любые величины, зависящие от случайных факторов. В статистической физике флуктуации вызваны хаотическим тепловым движением частиц, образующих систему. Даже в состоянии статистического равновесия наблюдаемые физические величины испытывают флуктуации около средних значений. Согласно теории вероятности, с увеличением числа N испытаний относительная флуктуация любой величины x уменьшается по закону $1/\sqrt{N}$. Поэтому макроскопические законы, полученные для очень большого числа молекул, являются точными.

В дальнейшем обычно будем рассматривать малый объем dV макросистемы ничтожно малого размера по сравнению с размерами самой макросистемы, содержащий число частиц dN настолько большое, что относительной флуктуацией их можно пренебречь.

Функция распределения. Рассмотрим случай, когда случайная величина x , например скорость молекулы, имеет непрерывный характер. Разобьем всю область изменения x на отдельные достаточно небольшие интервалы $(x, x + \Delta x)$, такие чтобы избежать заметных флуктуаций величины x . Пусть ΔP_i – это вероятность попадания случайной величины в данный интервал.

Определим **функцию распределения** $f(x)$ как вероятность того, что интересующая нас величина окажется в единичном интервале вблизи значения x :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta x} = \frac{dP_x}{dx}. \quad (11.25)$$

Вероятность того, что значение величины x попадет в интервал (a, b) , равна

$$P = \int_a^b f(x) dx. \quad (11.26)$$

Условие нормировки вероятностей: вероятность того, что величина x может принять хотя бы какое-нибудь значение, равна 1, т.е.

$$\int_A^B f(x) dx = 1, \quad (11.27)$$

где интегрирование проводится по всему интервалу (A, B) возможных значений величины x . Таким образом, вся площадь под кривой $f(x)$ равна единице (см. подтему 11.3). Уравнение (11.27) является аналогом формулы (11.23).

Если известна нормированная на единицу функция распределения величины x , то справедливы следующие формулы для среднего и среднеквадратичного значений величины x :

$$\langle x \rangle = \int_A^B x f(x) dx, \quad (11.28)$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_A^B x^2 f(x) dx. \quad (11.29)$$

11.3. Распределение Максвелла. Средняя, средняя квадратичная и наиболее вероятная скорости молекул

Рассмотрим газ, находящийся в состоянии равновесия при данной температуре. Все положения и направления движения молекул равновероятны. Пусть N – общее число молекул газа в данном объеме. В газе устанавливается некоторое стационарное распределение молекул по скоростям, не зависящее от времени. Это распределение описывается **функцией распределения Максвелла по абсолютным значениям скоростей** $f(u)$, которая также не зависит от времени. Величина $f(u)$ определяет относительное число молекул dN/N , абсолютные значения скоростей которых лежат в интервале от u до $u + du$. Очевидно, что dN/N пропорционально интервалу du :

$$\frac{dN(u)}{N} = f(u) du. \quad (11.30)$$

Тогда $N f(u) du = F(u) du$ – это число молекул, которые имеют скорости в интервале от u до $u + du$. В 1859 г. Дж. К. Максвелл получил формулу для $f(u)$ – **распределение Максвелла по абсолютным значениям скоростей**:

$$f(u) = 4p \left(\frac{m}{2pkT} \right)^{3/2} u^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{mu^2}{kT} \right), \quad (11.31)$$

где m – масса молекулы; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температу-

ра. Эта функция $f(u)$, показанная на рис. 11.3, удовлетворяет условию нормировки (11.27):

$$\int_0^{\infty} f(u) du = 1.$$

Отметим, что распределение Максвелла (11.31) является равновесным и стационарным, т.е. доля молекул со скоростями от u до $u + du$ остается постоянной, независимо от изменения скорости отдельных молекул при столкновениях.

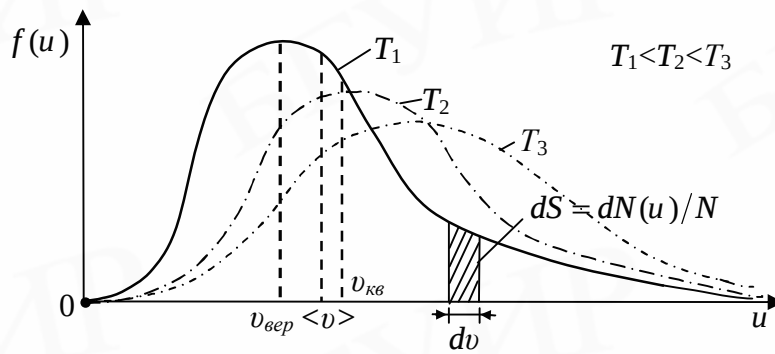


Рис. 11.3. График функции распределения $f(u)$ Максвелла в зависимости от скорости молекул u

Функция распределения Максвелла по проекциям скоростей молекул определяется так:

$$f(u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{m(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{kT} \right). \quad (11.31a)$$

Тогда число молекул со скоростями от u_1 до u_2 в газе можно найти по формуле

$$\Delta N = N \int_{u_{1x}}^{u_{2x}} \int_{u_{1y}}^{u_{2y}} \int_{u_{1z}}^{u_{2z}} f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z.$$

Запишем ранее полученное для средней кинетической энергии поступательного движения одной молекулы идеального газа уравнение (10.15)

$$\langle e_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{m \langle u^2 \rangle}{2},$$

где согласно формуле (11.29) $\sqrt{\langle u^2 \rangle} = u_{\text{кв}}$ — **средняя квадратичная скорость** молекул идеального газа. Следовательно, средняя квадратичная скорость равна

$$u_{\text{кв}} = \sqrt{3 \frac{kT}{m}} = \sqrt{3 \frac{RT}{M}}. \quad (11.32)$$

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям $f(u)$ достигает максимума, называется **наиболее вероятной скоростью** $u_{\text{вер}}$. Эта скорость определяется из условия $df/du = 0$ и равна

$$u_{\text{вер}} = \sqrt{2 \frac{kT}{m}} = \sqrt{2 \frac{RT}{M}}. \quad (11.33)$$

Большая часть молекул газа имеет скорости выше, чем $u_{вер}$ (см. рис. 11.3).

Средняя (средняя арифметическая) скорость молекул газа согласно определению (11.28) определяется как

$$\langle u \rangle = \int_0^{\infty} u f(u) du = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}}. \quad (11.34)$$

Эти три скорости отличаются друг от друга числовыми множителями, близкими к единице, причем $u_{кв} > \langle u \rangle > u_{ср}$.

Распределение Максвелла для данного газа зависит только от температуры: чем сильнее нагрет газ, тем быстрее движутся его молекулы. Поскольку с повышением температуры газа значения $\langle u \rangle$, $u_{кв}$ и $u_{ср}$ увеличиваются, то максимум функции $f(u)$ смещается в сторону больших скоростей, рис. 11.3, а его абсолютная величина уменьшается. Площадь под кривой $f(u)$ сохраняется.

Кривые на рис. 11.3 можно также рассматривать и иначе – как соответствующие газам при одной и той же температуре с разными массами молекул: $m_1 > m_2 > m_3$.

Эксперименты по определению функции распределения по скоростям в реальных газах (1920) с высокой точностью подтвердили распределение Максвелла для газов при не слишком высоком давлении.

11.4. Распределение молекул во внешнем поле.

Распределение Больцмана. Распределение Максвелла–Больцмана

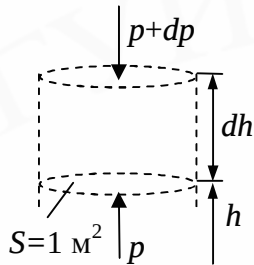


Рис. 11.4. К выводу барометрической формулы

Рассмотрим идеальный газ в однородном поле тяжести. Атмосферное давление на какой-либо высоте h обусловлено весом вышележащих слоев газа. Будем считать, что газ находится в состоянии термодинамического равновесия и его температура T всюду одинакова. Выделим на высоте h столб газа высотой dh и площадью основания S , равной единице, рис. 11.4. Разность давлений p и $p + dp$ численно равна весу газа в выделенном цилиндре:

$$p - (p + dp) = r g dh, \quad -dp = r g dh,$$

где $r = m/V$ – плотность газа на высоте h ; $r dh \cdot 1 = dm$ – элемент массы газа. Знак минус в формуле показывает, что давление с высотой убывает.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона (10.10) следует, что

$$V = (m/(Mp))RT \quad \text{и} \quad r = Mp/(RT).$$

Тогда находим

$$dp = -\frac{pM}{RT} g dh \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh,$$

где в общем случае T зависит только от h . Интегрируя последнее выражение по высоте от 0 до h и по давлению от p_0 до p , получаем

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}, \quad (11.35)$$

где p_0 – давление газа на высоте $h = 0$. Следовательно, измерив с помощью барометра давление p_0 и p , можно по изменению давления определить высоту

$$h = \frac{RT}{gM} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (11.36)$$

Поэтому выражение (11.35) называется **барометрической формулой** и определяет зависимость давления атмосферы от высоты над поверхностью Земли. Из нее следует, что *давление* убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ (больше M) и чем ниже его температура, рис. 11.5, а.

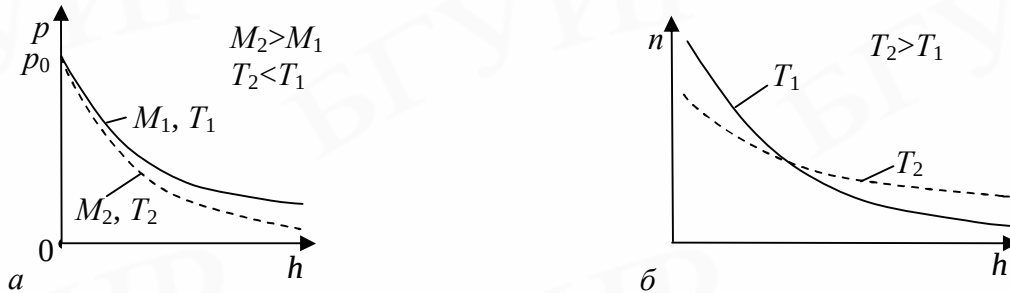


Рис. 11.5. Схемы, иллюстрирующие барометрическую формулу и закон Больцмана:

а – изменение давления газа p в зависимости от высоты h ;
б – изменение концентрации газа n в зависимости от высоты h

Барометрическая формула позволяет получить соотношение между концентрациями газа на различной высоте. Используем уравнение состояния идеального газа в форме (10.11): $p = nkT$, где n – концентрация молекул. При $T = \text{const}$ имеем $p/p_0 = n/n_0$, где n_0 – концентрация молекул газа при давлении p_0 . Поэтому из выражения (11.35) получим

$$n = n_0 e^{-mgh/(kT)}, \quad (11.37)$$

где $k/m = R/M$. Из уравнения (11.37) следует, что при повышении температуры, т.е. при $T \rightarrow \infty$, молекулы оказываются распределенными по высоте почти равномерно: $n \rightarrow n_0$. При $T \rightarrow 0$ К молекулы под действием силы тяжести будут опускаться на дно сосуда: $n \rightarrow 0$, рис. 11.5, б.

Учтем, что $mgh = E_p$ – потенциальная энергия молекулы в однородном поле тяготения вблизи поверхности Земли. Примем, что на уровне $h = 0$ потенциальная энергия равна нулю. Тогда формулу (11.37) можно переписать в виде

$$n = n_0 e^{-E_p/(kT)}, \quad (11.38)$$

где n_0 – плотность частиц, соответствующая точке, в которой $E_p = 0$. Выражение (11.38) – **распределение Больцмана** молекул газа по положениям – характеризует распределение частиц во внешнем *потенциальном поле* и справедливо при действии любых консервативных сил для совокупности любых одинаковых частиц, которые находятся в состоянии хаотического теплового движения. Из него следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где *меньше* потенциальная энергия его молекул, т.е. ближе к поверхности Земли.

В поле внешних сил молекулы газа подчиняются одновременно и распределению Максвелла (по скоростям) (11.31a), и распределению Больцмана (по положениям). В обеих формулах распределений присутствует экспоненциальный множитель, в показателе которого имеет место соответственно отношение кинетической и потенциальной энергии одной молекулы к величине kT , которая определяет *среднюю энергию теплового движения молекулы*. Оба распределения можно объединить в один **закон Максвелла–Больцмана (распределение Максвелла–Больцмана)**.

Рассмотрим элементарный объем идеального газа $dV = dxdydz$, расположенный в точке с координатами x, y и z . Обязательным является то, что во всех точках объема dV концентрация n молекул должна быть одинакова. Число молекул dN , компоненты скоростей которых изменяются в интервалах от u_x, u_y, u_z до $u_x + du_x, u_y + du_y, u_z + du_z$, а координаты – от x, y, z до $x+dx, y+dy, z+dz$, в элементе объема dV вычисляется так:

$$dN = n f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z dV = n_0 e^{-E_p/(kT)} f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z dxdydz.$$

По **закону Максвелла–Больцмана** число молекул определяется выражением

$$dN = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\frac{mu^2}{2} + E_p}{kT} \right) du_x du_y du_z dxdydz, \quad (11.39)$$

где n_0 – плотность частиц, соответствующая точке (началу координат), в которой E_p равна 0; потенциальная энергия $E_p = E_p(x, y, z)$; кинетическая энергия – функция компонент скорости ($u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$); $mu^2/2 + E_p = E$ – полная энергия молекулы.

11.5. Второе начало термодинамики. Обратимые и необратимые процессы

Первое начало термодинамики не позволяет установить направление протекания процессов. Оно не исключает возможности такого процесса, единственным результатом которого было бы полное превращение теплоты, полученной от некоторого тела, в работу, например существование вечного двигателя второго рода. **Вечным двигателем второго рода** называется периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения только источника теплоты. Обобщение огромного экспериментального материала привело к выводу о невозможности реализации данного двигателя и получило название второго закона термодинамики.

Существует несколько эквивалентных формулировок **второго начала термодинамики**. Приведем следующие формулировки.

Формулировка Клаузиуса: невозможен процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к телу более нагретому.

Формулировка Кельвина: невозможны процессы, единственным конечным результатом которых было бы превращение всего полученного системой тепла целиком в работу.

Второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов, указывая какие процессы в природе возможны, а какие – нет.

Тепловой двигатель – это периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет получения извне теплоты.

КПД теплового двигателя определяется так:

$$h = A/Q_1,$$

где Q_1 – сообщенное двигателю тепло; A – произведенная им работа. Величина A представляет собой «полезный» «выход» двигателя (то, что мы получаем от него), а Q_1 – то, что «вкладываем» в него. Поскольку *полная энергия* сохраняется, то подводимая теплота Q_1 должна быть равна сумме работы и количества теплоты, отводимой при низкой температуре:

$$Q_1 = A + Q_2.$$

Отсюда можно записать для КПД двигателя

$$h = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (11.40)$$

Согласно соотношению (11.40) КПД двигателя тем выше, чем меньше будет теплота Q_2 . Опыт показывает, что уменьшить Q_2 до нуля невозможно.

Формулировку Кельвина можно перефразировать:

невозможно создать тепловой двигатель с КПД $h = 1$.

Термодинамический процесс называется **обратимым**, если он допускает возвращение тела (системы) в первоначальное состояние без того, чтобы в окружающей среде остались какие-нибудь изменения. Необходимое и достаточное условие обратимости – **равновесность** термодинамического процесса, когда равновесие в каждой точке системы устанавливается быстрее длительности самого процесса.

Квазистатический процесс – это бесконечно медленный переход термодинамической системы из одного равновесного состояния в другое, при котором термодинамическое состояние в любой момент времени бесконечно мало отличается от равновесного и его можно рассматривать как состояние *термодинамического равновесия*.

Всякий термодинамический процесс, не удовлетворяющий условиям обратимости, называется **необратимым термодинамическим процессом**. Все реальные процессы являются необратимыми.

11.6. Энтропия. Закон возрастания энтропии. Макро- и микросостояния. Статистический смысл энтропии. Энтропия и необратимость

Немецкий ученый Р. Клаузиус (1865) показал, что процесс превращения теплоты в работу подчиняется второму началу термодинамики, которое можно

сформулировать строго математически, если ввести особую функцию состояния – энтропию.

Круговым процессом (циклом) называется термодинамический процесс, при котором все термодинамические параметры (и термодинамические функции) возвращаются к своим начальным значениям.

Запишем **неравенство Клаузиуса** для кругового процесса

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0, \quad (11.41)$$

где dQ – количество теплоты, сообщаемое системе (или отводимое от нее) на бесконечно малом участке цикла; T – абсолютная температура соответствующего элемента среды. В термодинамике доказывается, что циклу, состоящему только из обратимых процессов, соответствует знак равенства (**равенство Клаузиуса**). Иначе, если цикл сопровождается некоторыми необратимыми изменениями, то выполняется неравенство (знак « $\leq$ » в выражении (11.41)).

Элементарное приведенное количество теплоты – это отношение элементарного количества тепла dQ , полученного телом при квазистатическом процессе, к температуре T теплоотдающего тела (например окружающей среды).

Для обратимого процесса согласно равенству Клаузиуса

$$\boxed{dS = \frac{dQ}{T}} \quad (11.42)$$

есть полный дифференциал функции состояния S , называемый **энтропией**. Разность энтропий системы в двух произвольных состояниях 1 и 2 равна

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}, \quad (11.43)$$

где $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ – изменение энтропии в ходе некоторого процесса. Интегрирование в выражении (11.43) ведется вдоль пути любого квазистатического обратимого процесса, связывающего состояния 1 и 2. Отметим, что формула (11.42) определяет энтропию с точностью до аддитивной постоянной. Физический смысл имеет не сама энтропия, а разности энтропий.

Таким образом, из второго начала термодинамики следует, что существует однозначная функция состояния S , которая при обратимых адиабатических процессах ($dQ = 0$) остается постоянной.

Согласно неравенству Клаузиуса (11.41) при необратимых процессах

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} > \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (11.43a)$$

Из соотношений (11.43) и (11.43a) следует утверждение, что энтропия замкнутой (адиабатно изолированной) макросистемы не уменьшается:

$$\boxed{\Delta S_{1 \rightarrow 2} \geq 0}, \quad (11.44)$$

т.е. энтропия может или возрасть в случае необратимых (неравновесных) процессов, или оставаться постоянной в случае обратимых процессов. Если же макросистема незамкнута, т.е. обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может изменяться любым образом.

Найдем изменение энтропии в процессах идеального газа, используя выражение (11.43). Так как $dU = \frac{m}{M} C_v dT$ и $dA = pdV = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}$ (см. соответственно формулы (11.15) и (11.4)), то можно получить, что

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{M} C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (11.44a)$$

Приращение энтропии при необратимом процессе между двумя равновесными состояниями 1 и 2 рассчитывают, проведя между состояниями 1 и 2 какой-нибудь *обратимый процесс*.

Отметим, что согласно определению (11.42) в случае обратимых процессов $dQ = TdS$. Переданное системе тепло можно представить как

$$Q = \int_1^2 dQ = \int_1^2 TdS,$$

и оно будет равно площади под кривой процесса на диаграмме T – S . Таким образом, в случае обратимых процессов выполняется термодинамическое равенство

$$\boxed{TdS = dU + pdV}. \quad (11.45)$$

Уравнение (11.45) является одной из форм записи *первого начала термодинамики* (11.26) для таких процессов.

Энтропия обладает свойством **аддитивности**: энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему.

Рассмотрим смешивание двух идеальных газов, занимающих разделенные перегородками объемы $V_1 = V_2$. Давление, температура и число молей в обоих объемах одинаково. После удаления перегородки происходит необратимый процесс смешения газов. Приращение энтропии каждого газа согласно (11.44a) $\Delta S_{1 \rightarrow 2} = nR \ln 2$. В соответствии со свойством аддитивности энтропии суммарное приращение энтропии системы равно

$$DS = 2nR \ln 2.$$

Приращение $DS > 0$, что естественно, так как процесс смешения необратим.

Теорема Нернста:

при приближении температуры к абсолютному нулю энтропия макросистемы также стремится к нулю при любых значениях других термодинамических параметров системы:

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow 0} S = 0}. \quad (11.46)$$

Так как теорема Нернста не может быть выведена из первых двух начал термодинамики, то ее часто называют **третьим началом термодинамики**. Таким образом, абсолютное значение энтропии можно установить с помощью третьего начала термодинамики, согласно которому принимается $S = 0$ при $T = 0$.

В случае изобарического процесса мы можем вычислять абсолютное значение энтропии по формуле

$$S(p, T) = \int_0^T \frac{C_p(T)}{T} dT. \quad (11.47)$$

Следовательно, при $T \rightarrow 0$ теплоемкость C_p всех макросистем должна стремиться к нулю. Также из теоремы следует, что C_v при 0 К равна нулю.

В *термодинамике* говорят, что задано **макросостояние** системы, когда состояние данной макросистемы может быть охарактеризовано заданием таких макропараметров как объем, давление, температура и др.

Состояние же макросистемы, когда заданы состояния всех молекул, называют **микросостоянием**.

Любое макросостояние может быть реализовано различными способами или различными микросостояниями (микрораспределениями частиц по координатам и скоростям).

Термодинамическая вероятность W состояния системы (статистический вес) – это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число равновероятных микросостояний, соответствующих данному макросостоянию. По определению $W \geq 1$, т.е. термодинамическая вероятность не есть вероятность в математическом смысле, которая ≤ 1 .

Согласно Больцману (1872), энтропия системы и термодинамическая вероятность связаны между собой соотношением

$$S = k \ln W, \quad (11.48)$$

где k – постоянная Больцмана. Таким образом, энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Следовательно, энтропия может рассматриваться как **мера вероятности** состояния термодинамической системы.

Формула Больцмана (11.48) позволяет дать энтропии следующее **статистическое толкование**:

энтропия является мерой неупорядоченности системы.

Действительно, чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В *состоянии равновесия* – самого вероятного состояния системы – число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия.

Таким образом, второе начало термодинамики можно сформулировать как **закон возрастания энтропии** замкнутой системы при необратимых процессах (две формулировки):

любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает,

или

в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает.

При статистическом толковании энтропии это означает, что *процессы в замкнутой системе* идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, от менее вероятных состояний к более вероятным, до тех пор пока вероятность состояния не станет максимальной. Следовательно, возраста-

ние энтропии означает переход системы из менее вероятных в более вероятные состояния. Согласно выражениям (11.43) и (11.48) термодинамическая вероятность состояний, как и энтропия, замкнутой системы не может уменьшаться.

Для «малых» систем, состоящих из малого числа частиц, могут наблюдаться относительно большие флуктуации, т.е. энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы на определенном отрезке времени могут убывать, а не возрастать, или оставаться постоянными. В системах с очень большим числом частиц все флуктуации малы.

Таким образом, *второе начало термодинамики* является статистическим законом и выражает необходимые закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

11.7. Цикл Карно

Большое значение для применений термодинамики имеют круговые процессы. Круговые процессы лежат в основе всех тепловых машин – двигателей внутреннего сгорания, паровых и газовых турбин, холодильных машин и др.

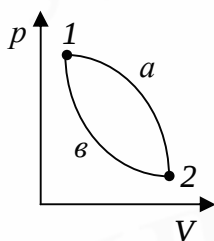


Рис. 11.6. Пример равновесного кругового процесса

Равновесные круговые процессы изображаются в диаграммах p – V , p – T и др. в виде замкнутых кривых, так как двум тождественным состояниям – началу и концу кругового процесса – соответствует в любой диаграмме одна и та же точка, рис. 11.6. Работа расширения A_1 (площадь фигуры $1a2v1$ на рис. 11.6) является положительной, а работа сжатия A_2 (площадь $2a1v2$) – отрицательна. Работа за цикл A равна с точностью до знака площади цикла в p – V диаграмме, охватываемой замкнутой кривой: $A = A_1 + A_2$.

Таким образом, *работа* зависит от вида процесса, в результате которого система приходит из одного состояния в другое.

Цикл называется прямым, если за цикл совершается положительная работа $A = \oint p dV > 0$ (цикл протекает по часовой стрелке). Цикл называется обратным (цикл протекает против часовой стрелки), если за цикл совершается отрицательная работа $A = \oint p dV < 0$.

Рабочее тело теплового двигателя – это тело, совершающее круговой процесс и обменивающееся энергией с другими телами. Обычно это газ.

Термостатом называется термодинамическая система, которая может обмениваться теплотой с телами практически без изменения собственной температуры.

Принцип работы теплового двигателя: от термостата с более высокой температурой T_1 , называемого **нагревателем**, за цикл отнимается количество теплоты Q_1 , а термостату с более низкой температурой T_2 , называемому **холодильником**, за цикл передается количество теплоты Q_2 , при этом совершается

работа $A = Q_1 - Q_2$, рис. 11.7, а.

Термический КПД двигателя согласно формуле (11.40) равен

$$h = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

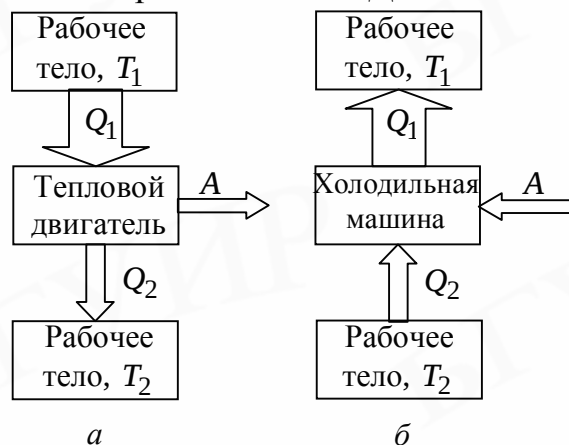


Рис. 11.7. Схемы к циклу Карно:
а – действие теплового двигателя;
б – действие холодильной машины

где $Q_2 \neq 0$ согласно второму началу термодинамики.

Процесс, обратный происходящему в тепловом двигателе, используется в холодильной машине: от термостата с более низкой температурой T_2 за цикл получают количество теплоты Q_2 и отдают термостату T_1 количество теплоты Q_1 . При этом над системой совершается работа $A = Q_1 - Q_2$, рис. 11.7, б.

Эффективность холодильной машины характеризует холодильный коэффициент h' – отношение отнятой у термостата с более низкой температурой количества теплоты Q_2 к работе A , которая затрачивается на приведение холодильной машины в действие:

$$h' = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (11.49)$$

К термодинамическим циклам, исследование которых сыграло важную роль в разработке общих основ термодинамики, относится цикл Карно, рис. 11.8. **Цикл Карно** – это обратимый круговой процесс, в котором совершается превращение теплоты в работу (или работы в теплоту). Он состоит из последовательно чередующихся двух изотермических и двух адиабатических процессов, осуществляемых с рабочим телом (идеальным газом или паром). Цикл Карно был впервые рассмотрен французским физиком Н. Л. С. Карно (1824) как идеальный рабочий цикл теплового двигателя. Рабочее тело последовательно находится в тепловом контакте с двумя тепловыми резервуарами – нагревателем с постоянной температурой T_1 и холодильником с $T_2 < T_1$. Превращение теплоты в работу сопровождается переносом рабочим телом определенного количества теплоты от нагревателя к холодильнику.

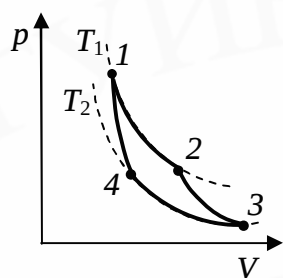


Рис. 11.8. Цикл Карно для идеального газа на диаграмме p – V

Выберем точку 1 в качестве начального состояния, рис. 11.8. Идеальный газ расширяется изотермически и обратимо по пути 1–2 при температуре T_1 . Например, газ заключен в цилиндре с подвижным поршнем и находится в контакте с горячим термостатом (T_1), который сообщает газу количество теплоты Q_1 . Затем газ расширяется

адиабатически и обратимо по пути 2–3; на этом участке передачи теплоты не происходит и температура газа падает до T_2 . На третьей стадии цикла происхо-

дит изотермическое обратимое сжатие газа по пути 3–4; здесь необходим контакт с холодным термостатом (T_2), которому газ передает количество теплоты Q_2 . Наконец, газ адиабатически сжимается по пути 4–1, возвращаясь в исходное состояние. Результирующая работа, совершаемая в одном цикле Карно, численно равна площади, ограниченной криволинейными отрезками, образующими цикл на p – V -диаграмме (кривая на рис. 11.8).

Данный цикл может быть проведен в обратном направлении. Например, по такому принципу работает любой бытовой холодильник.

Цикл Карно можно также изобразить на диаграмме T – S на рис. 11.9. Изотермы изображаются прямыми 1–2 и 3–4, адиабаты – прямыми 2–3 и 4–1.

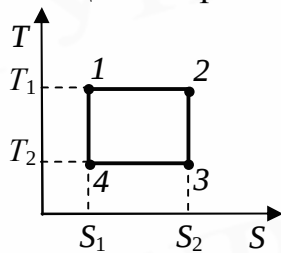


Рис. 11.9. Цикл Карно на диаграмме T – S

Карно сформулировал следующую теорему (**теорема Карно**):

все обратимые двигатели, работающие между термостатами с одинаковыми двумя температурами, имеют один и тот же КПД; ни один необратимый двигатель, работающий между теми же термостатами, не может иметь более высокий КПД.

Коэффициент полезного действия двигателя Карно, как и любого теплового двигателя, задается выражением (11.40). Согласно (11.49) полученное тепло $Q_1 = T_1(S_2 - S_1)$ и равно площади под отрезком 1–2. Отданное холодильнику тепло $Q_2 = T_2(S_2 - S_1)$ и равно площади под отрезком 4–3. При этом площадь прямоугольника, т.е. $Q_1 - Q_2$, равна работе совершаемой двигателем за цикл. Подставив выражения Q_1 и Q_2 в формулу (11.40), получим, что КПД обратимого двигателя Карно зависит только от температур термостатов T_1 и T_2 :

$$h = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad (11.50)$$

где температуры T_1 и T_2 являются абсолютными, измеренными по температурной шкале идеального газа. Цикл Карно имеет максимальный КПД и служит мерой эффективности тепловых двигателей.

Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса. В реальных средах (твёрдые тела, жидкости, реальные газы) между молекулами среды действуют силы притяжения или отталкивания. **Силы межмолекулярного взаимодействия** действуют между молекулами и атомами на расстояниях до 10^{-9} м и являются короткодействующими. Когда эти силы приводят к образованию химических соединений, то их называют **химическими** или **валентными силами**. Мы будем рассматривать только газы, состоящие из электрически нейтральных молекул или атомов.

Сила взаимодействия молекул – это суперпозиция сил притяжения (**сил Ван-дер-Ваальса**), преобладающих на больших расстояниях, и сил отталкивания, доминирующих на малых расстояниях. Эти силы уравнивают друг друга на **равновесном расстоянии** r_0 между молекулами – расстоянии, на ко-

тором бы находились молекулы в отсутствие теплового движения.

Потенциальная энергия взаимодействия молекул U – функция расстояния r между центрами сблизившихся молекул – минимальна при $r = r_0$. $U_{\min}$ определяет работу, которую нужно совершить против сил притяжения, чтобы разъединить молекулы, находящиеся в равновесии ($r = r_0$).

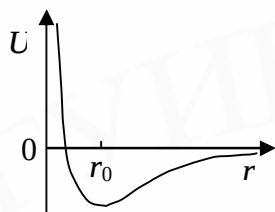


Рис. 11.10. Типичная кривая зависимости энергии взаимодействия молекул U

Соотношение между $|U_{\min}|$ и kT является критерием различных агрегатных состояний вещества. В случае газообразного состояния $|U_{\min}| \ll kT$, т.е. тепловое движение молекул препятствует соединению (конденсации) молекул. Если же $|U_{\min}| \gg kT$, то тепловой энергии недостаточно, чтобы «оторвать» молекулы друг от друга, и вещество находится в твердом состоянии. Когда $|U_{\min}| \gg kT$, то из-за теплового движения молекулы перемещаются в пространстве, обмениваясь местами, но $r \notin r_0$, и вещество находится в жидком состоянии.

Универсального уравнения состояния для жидкостей и реальных газов не существует. Внесем в уравнение состояния идеального газа (10.9) $pV_M = RT$ поправки, учитывающие соответственно собственный объем молекул и силы межмолекулярного взаимодействия: b – объем, занимаемый самими молекулами, и $p' = a/V_M^2$ – **внутреннее давление** (a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса, значения которых определяются экспериментально). Силы Ван-дер-Ваальса стремятся сблизить молекулы. Следовательно, внутреннее давление реального газа увеличивается на p' . Но при сближении кулоновское отталкивание не позволяет молекуле занять место, уже занятое другой молекулой. Поэтому реальный объем, в котором могут перемещаться молекулы, определяется как $V_M - b$.

Голландский ученый Я. Д. Ван-дер-Ваальс (1873) вывел уравнение, которое записывается

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT \quad \text{или} \quad (11.51)$$

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - n b) = n RT, \quad (11.51a)$$

где $n = m/M$; $V = nV_M$; R – универсальная газовая постоянная. **Уравнение Ван-дер-Ваальса** для моля газа (11.51) называется **уравнением состояния реальных газов**. Для произвольной массы газа данное уравнение имеет вид (11.51a). Газы, точно подчиняющиеся уравнению Ван-дер-Ваальса, называются **газами Ван-дер-Ваальса**. Значения констант Ван-дер-Ваальса a и b соответственно равны, например, для водорода – $0,0245 \text{ Дж}\cdot\text{м}^3/\text{моль}^2$ и $26,6\cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$, для кислорода – $0,138 \text{ Дж}\cdot\text{м}^3/\text{моль}^2$ и $31,8\cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$, для этилового спирта – $1,22 \text{ Дж}\cdot\text{м}^3/\text{моль}^2$ и $84\cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Литература

18. Иродов, И. Е. Физика макросистем. Основные законы / И. Е. Иродов. – М. : Лаборатория Базовых знаний, 2001.
19. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 3. Молекулярная физика и термодинамика / И. В. Савельев. – М. : Астрель, АСТ, 2003.
20. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Академия, 2003.
21. Джанколи, Д. Физика: в 2 т. Т. 1 / Д. Джанколи. – М. : Мир, 1989.
22. Физическая энциклопедия: в 5 т. Т. 1 – 5 / гл. ред. А. М. Прохоров. – М. : Сов. Энциклопедия, 1988–1998.
23. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, МФТИ, 2003.
24. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1999.
25. Киттель, Ч. Статистическая термодинамика / Ч. Киттель. – М. : Наука, 1977.
26. Аленицын, А. Г. Краткий физико-математический справочник / А. Г. Аленицын, Е. И. Бутиков, А. С. Кондратьев. – М. : Наука, 1990.
27. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М. : Физматлит, 1963.

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Тема 12. Электростатическое поле в вакууме

12.1. Закон сохранения электрического заряда. Электрическое поле.

Напряженность электрического поля точечного заряда.

Принцип суперпозиции. Расчет электрического поля

Электростатика – раздел классической физики, который изучает взаимодействие неподвижных электрических зарядов и свойства постоянного электрического поля.

Электрический заряд – это внутреннее свойство тел или частиц, характеризующее их способность к электромагнитным взаимодействиям. Заряд q определяют в кулонах (Кл).

Существует **элементарный** (минимальный) **электрический заряд**

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Носитель элементарного отрицательного заряда – электрон. Его масса $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг. Носитель элементарного положительного заряда – протон. Его масса $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Экспериментально установлены следующие **фундаментальные свойства** электрического заряда:

1. Электрический заряд существует в двух видах: положительном и отрицательном. Одноименные заряды притягиваются, разноименные – отталкиваются.

2. Электрический заряд инвариантен – его величина не зависит от системы отсчета и, следовательно, не зависит от того движется он или покоится.

3. Электрический заряд дискретен – заряд любого тела составляет целое кратное элементарного электрического заряда e .

4. Электрический заряд аддитивен – заряд любой системы тел (частиц) равен сумме зарядов тел (частиц), входящих в систему.

В 1747 г. Франклин сформулировал, а М. Фарадей в 1843 г. доказал **закон сохранения электрического заряда**:

алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри данной системы.

Под замкнутой системой в данном законе понимается **электрически изолированная система**, которая не обменивается зарядами с внешними телами.

Точечный электрический заряд – это заряженная материальная точка.

Согласно современным представлениям взаимодействие между зарядами осуществляется через поле. Всякий электрический заряд создает **электрическое поле**, изменяя определенным образом свойства окружающего пространства. Помещенный в какую-либо точку электрического поля пробный заряд будет испытывать действие силы.

Пробным электрическим зарядом называется точечный заряд настолько малой величины, что он практически не вызывает перераспределения электрических зарядов на окружающих телах и, следовательно, не вызывает заметного искажения исследуемого поля.

Электростатическим полем называется электрическое поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами и не изменяющееся во времени. Со стороны электростатического поля на заряды (заряженные частицы) действуют **электростатические силы**, которые являются центральными.

Французский физик Шарль Кулон в 1785 г. с помощью крутильных весов установил **закон взаимодействия двух точечных зарядов (закон Кулона)**:

сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами q_1 и q_2 , находящимися в вакууме, прямо пропорциональна величинам зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена вдоль соединяющей их прямой:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}}, \quad \text{модуль} \quad F_{12} = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \quad (12.1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный вдоль линии, соединяющей точечные заряды q_1 и q_2 ; вектор $\vec{F}_{12}$ по соглашению приложен к заряду q_2 на конце вектора $\vec{r}$; k – коэффициент пропорциональности. В СИ $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2 =$

$= 9,0 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$, где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – **электрическая постоянная** (фарад (Ф) – единица электрической емкости (см. подтему 12.7)). Направления сил $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ противоположны. В случае разноименных зарядов сила взаимодействия соот-

ветствует притяжению, а в случае одноименных зарядов – отталкиванию.

Силы электростатического взаимодействия часто называют **кулоновскими силами**. Отметим, что закон Кулона аналогичен по форме *закону всемирного тяготения* (3.12). При этом роль тяжелых масс играют электрические заряды.

Экспериментально установлено, что сила взаимодействия двух зарядов не изменяется, если вблизи поместить еще какие-либо заряды. Пусть кроме заряда Q имеются заряды q_i ($i = \overline{1, n}$), рис. 12.1. Тогда результирующая сила $\vec{F}$, с которой действуют заряды q_i на Q , определяется по **принципу суперпозиции сил**:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (12.2)$$

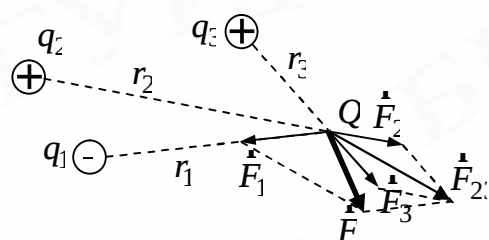


Рис. 12.1. Взаимодействие точечных разноименных зарядов q_i ($i = \overline{1, 3}$) с зарядом $Q > 0$

где $\vec{F}_i$ – сила, с которой действует заряд q_i на Q в отсутствие остальных $(n - 1)$ зарядов.

Всякое заряженное тело можно представить как совокупность точечных зарядов, аналогично тому, как в механике всякое тело можно считать совокупностью материальных точек. Поэтому электростатическая сила, с которой одно заряженное тело действует на другое, равна геометрической сумме сил, приложенных ко всем точечным зарядам второго тела со стороны каждого точечного заряда первого тела.

Когда заряды распределены в заряженном теле непрерывно – вдоль некоторой линии (например в случае заряженного тонкого стержня), поверхности (например в случае заряженной пластины) или объема (например в случае заряженного шара), используют понятия **линейной l , поверхностной s и объемной r плотностей электрических зарядов** соответственно:

$$l = \frac{dq}{dl}, \quad s = \frac{dq}{dS}, \quad r = \frac{dq}{dV}, \quad (12.3)$$

где dq – заряд малого участка или заряженной линии длиной dl , или заряженной поверхности площадью dS , или заряженного тела объемом dV соответственно.

Опыт показывает, что сила $\vec{F}$, действующая на неподвижный точечный пробный заряд q , всегда может быть представлена как

$$\vec{F} = q \vec{E}, \quad (12.4)$$

где вектор $\vec{E}$ не зависит от величины пробного заряда q и называется напряженностью электрического поля в данной точке.

Напряженность – это силовая векторная характеристика электростатического поля

$$\vec{E} = \vec{F} / q. \quad (12.4a)$$

В общем случае $\vec{E}$ является функцией координат. Если в каждой точке пространства $\vec{E} = \text{const}$, то поле называется однородным.

Из выражения (12.4a) вектор $\vec{E}$ можно определить следующим образом:

напряженность электрического поля в данной точке пространства – это сила, действующая на единичный положительный неподвижный заряд, помещенный в данную точку.

Единица напряженности в СИ – Ньютон на Кулон (Н/Кл): $1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}$, где В (вольт) – единица потенциала электростатического поля (см. подтему 12.3).

Из закона Кулона (12.1) непосредственно следует, что напряженность неподвижного точечного заряда Q в вакууме на расстоянии r от него можно представить как

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}}, \quad \text{модуль} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}, \quad (12.5)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий точку поля с зарядом Q .

Направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. Если поле создается положительным зарядом, то вектор $\vec{E}$ направлен в каждой точке пространства вдоль радиус-вектора $\vec{r}$ от заряда (отталкивание пробного положительного заряда). Если поле создается отрицательным зарядом, то вектор $\vec{E}$ направлен к заряду (притяжение пробного положительного заряда).

Графически электростатическое поле изображают с помощью **силовых линий** (**линий напряженности**) – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{E}$ (рис. 12.2, а), т.е. содержат $\vec{E}$.

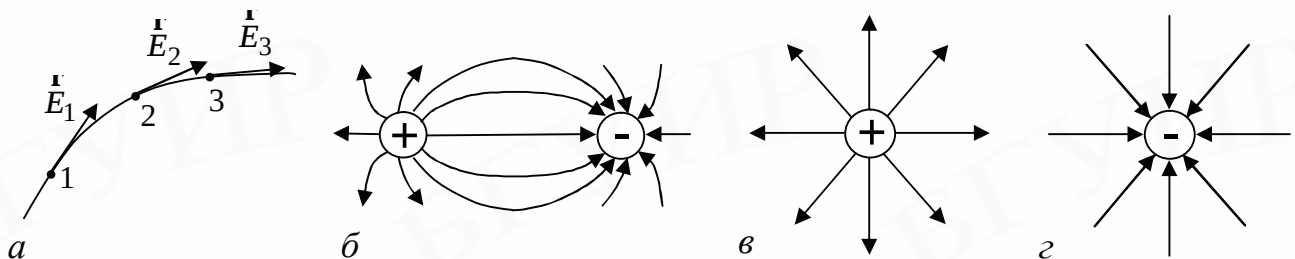


Рис. 12.2. Картины силовых линий электрического поля:

а – для произвольного электростатического поля указаны направления вектора $\vec{E}$ в разных точках силовой линии; б – для двух разноименных зарядов; в и г – соответственно для положительного и отрицательного точечных зарядов

Свойства силовых линий:

1. указывают направление силы, действующей в данной точке поля на положительный пробный заряд;
2. начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах (рис. 12.2, б);
3. представляют собой радиальные прямые, если поле создается точечным зарядом, которые выходят из заряда, если он положителен, и входят в него, если он отрицателен (рис. 12.2, в, г);
4. нигде не пересекаются, так как в каждой точке пространства вектор напряженности однозначно направлен;
5. параллельны вектору напряженности в случае **однородного поля**, когда вектор напряженности в любой точке постоянен по модулю и направлению.

Из формулы (12.2) следует **принцип суперпозиции электрических полей**:

напряженность электрического поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей каждого из этих зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i, \quad (12.6)$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, проведенный от точечного заряда q_i к точке, где измеряется поле. Таким образом, результирующее поле можно рассматривать как наложение (суперпозицию) полей каждого из зарядов системы в отдельности.

Если заряд непрерывно распределен, например, по объему V , то формула (12.5) будет представлена в другой форме. Надо заменить Q на $dq = r dV$ и вместо суммирования провести интегрирование по области пространства, где r отлично от нуля:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{r}{r^3} \vec{r} dV. \quad (12.7)$$

Аналогично, когда заряды распределены в заряженном теле непрерывно вдоль некоторой линии l или на поверхности S , тогда напряженность поля, используя соотношения (12.3), определяется соответственно по формулам:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{l}{r^3} \vec{r} dl, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{s}{r^3} \vec{r} dS. \quad (12.7a)$$

В однородной изотропной среде, относительно плохо проводящей электрический ток (диэлектрике, см. подтему 13.1), которая безгранична или заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями поля зарядов (см. подтему 12.4), сила $\vec{F}$ (12.1) и напряженность $\vec{E}$ поля (12.5) определяются как

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 e} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \quad \text{модуль} \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 e} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \quad (12.8)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 e} \frac{Q}{r^3} \vec{r}, \quad \text{модуль} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 e} \frac{|Q|}{r^2}, \quad (12.8a)$$

где e – **диэлектрическая проницаемость среды** (см. подтему 13.2) – безразмерная величина, показывающая, во сколько раз уменьшается взаимодействие точечных зарядов в данной среде по сравнению с вакуумом. Диэлектрическая проницаемость вакуума $e_{\text{вак}} = 1$.

Зная распределение зарядов, мы можем **рассчитать напряженность электрического поля** по формуле (12.6), если поле дискретно, или по формулам (12.7), (12.7a), если распределение зарядов непрерывно. При этом для нахождения вектора $\vec{E}$ надо вычислить сначала его проекции. Например, в декартовых координатах:

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z, \\ E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2},$$

где проекции вектора $\vec{E} = E_x, E_y, E_z$ – три интеграла типа (12.7) или (12.7а). Только тогда, когда система зарядов обладает той или иной симметрией, задача, как правило, значительно облегчается.

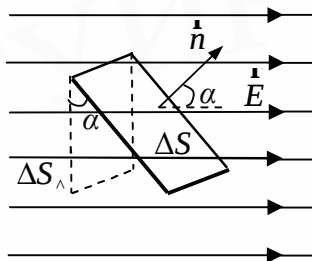
12.2. Поток вектора $\vec{E}$.

Теорема Гаусса и ее применение к расчету поля

Рассмотрим элементарную площадку dS , которую пронизывают линии напряженности, рис. 12.3. Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный площадке ΔS и направленный под углом α к вектору $\vec{E}$. Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку ΔS , равно $E \Delta S \cos \alpha = E_n \Delta S$, где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке dS .

Величина $\Delta \Phi_E = E_n \Delta S = E \Delta S \cos \alpha = \vec{E} \Delta \vec{S}$ называется **поток вектора напряженности** электростатического поля через площадку ΔS . Здесь $\Delta \vec{S} = \Delta S \vec{n}$ – вектор, модуль которого равен ΔS , его направление совпадает с направлением $\vec{n}$ к площадке. Отметим, что выбор направления вектора $\vec{n}$ условен, его можно было направить в противоположную сторону на рис. 12.4.

Если поле неоднородно и поверхность S не плоская (см. рис. 12.4), то, разбивая поверхность на участки DS_i ($i = \overline{1, n}$) так, чтобы каждый элемент DS_i был плоским и электрическое поле в пределах элемента было однородным, получаем для потока напряженности через всю поверхность



$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i,$$

где $\vec{E}_i$ – напряженность поля, отвечающая элементу $d\vec{S}_i$. При $\Delta S_i \rightarrow 0$ сумма переходит в интеграл по всей поверхности, и равенство становится точным:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (12.9)$$

Рис. 12.3. Однородное электрическое поле $\vec{E}$ изображено параллельными силовыми линиями, проходящими через поверхность площадки ΔS .

Штриховыми линиями изображена проекция площади ΔS на плоскость, перпендикулярную силовым линиям поля

Поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность S , т.е. через поверхность, ограничивающую некоторую область пространства равен

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS, \quad (12.10)$$

где знак $\oint$ показывает, что интеграл берется по замкнутой поверхности.

Для наглядного изображения электростатического поля будем проводить через единичную площадку, перпендикулярную силовым линиям поля, число силовых линий N , равное модулю *потока* Φ_E вектора напряженности.

В случае замкнутой поверхности принято брать нормаль, направленную наружу области, охватываемой этой поверхностью, т.е. **внешнюю нормаль**,

рис. 12.5. Знак потока Φ_E определяется следующим образом. Когда силовые линии выходят из объема (рис. 12.5, угол $\alpha < \pi/2$), то поток будет положителен. А если силовые линии входят в объем (см. рис. 12.5, угол $\alpha > \pi/2$, т.е. $\cos \alpha < 0$), то поток будет отрицателен.

Теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$ (для электростатического поля в вакууме):
поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме N зарядов q_i , охватываемых этой поверхностью, деленной на электрическую постоянную ϵ_0 :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (12.11)$$

Доказательство:

Известно, что напряженность поля точечного заряда q определяется как

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (12.11a)$$

а по величине модуль напряженности равен $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$.

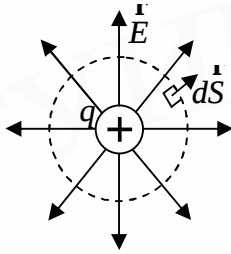


Рис. 12.6. К выводу теоремы Гаусса

Рассмотрим воображаемую замкнутую сферическую поверхность радиуса r , в центре которой помещен точечный положительный заряд q . Силовые линии заряда q центрально симметричны, рис. 12.6. В соответствии с формулой (12.10a) в каждой точке этой поверхности проекция вектора $\vec{E}$ на внешнюю нормаль будет равна

$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Следовательно, поток вектора $\vec{E}$ через поверхность равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = E_n S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (12.11b)$$

Выражение (12.11b) не зависит от r . Так как силовые линии нигде не пересекаются, то их число будет таким же через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряд q .

Если заряд положителен, то на нем начинается число линий

$$N_{нач} = q/\epsilon_0.$$

Для отрицательного заряда линии идут из бесконечности, заканчиваясь на нем:

$$N_{зак} = -q/\epsilon_0.$$

Количество линий при этом $N_{зак} > 0$, т.е. неотрицательно, так как $q < 0$. Отметим, что число линий отрицательным быть не может.

В соответствии с принципом суперпозиции (12.6) электрических полей заключаем, что для зарядов одного знака справедливо уравнение (12.11). Если внутри замкнутой поверхности S находится N_1 положительных точечных зарядов и N_2 отрицательных точечных зарядов, то количество силовых линий будет следующим:

$$N_{нач} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_1} q_i, \quad N_{зак} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_2} q_k.$$

Поэтому общий поток вектора $\vec{E}$ будет равен разности потоков полей по-

ложительных и отрицательных зарядов, т.е. соответственно разности числа линий, начинающихся и оканчивающихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = N_{нач} - N_{зак} = \frac{1}{e_0} \sum_{i=1}^{N_1} q_i + \frac{1}{e_0} \sum_{k=1}^{N_2} q_k = \frac{1}{e_0} \sum_{i,k} q_{i,k},$$

где $\sum_{i,k} q_{i,k}$ – алгебраическая сумма всех зарядов внутри поверхности S ,

что и требовалось доказать.

Если заряды q_i расположены вне замкнутой поверхности или суммарный заряд внутри замкнутой поверхности равен нулю, то поток вектора $\vec{E}$ через нее Φ_E равен нулю. Наглядно это можно объяснить тем, что количество линий, которые входят в объем, ограниченный поверхностью S , равно числу линий, выходящих из него.

Теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$ в дифференциальной форме. При рассмотрении поля, создаваемого макроскопическим зарядом, заряд считают распределенным в пространстве непрерывно с конечной объемной плотностью ρ . Тогда можно считать, что каждый элементарный объем ΔV представляет собой точечный заряд $\rho \Delta V$.

Разделим поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S на объем ΔV , заключенный внутри данной поверхности:

$$\frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\rho}{e_0}$$

и будем стягивать эту поверхность в точку. Полученная скалярная величина называется **дивергенцией вектора $\vec{E}$** :

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}.$$

Можно показать, что в декартовой системе координат

$$\text{div} \vec{E} \equiv \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Согласно **теореме Остроградского** из векторного анализа

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV. \quad (12.12)$$

Сопоставив уравнения (12.11) и (12.12), сформулируем **теорему Гаусса (12.11) в дифференциальной форме**:

дивергенция вектора $\vec{E}$ в некоторой точке электростатического поля равна объемной плотности электрического заряда ρ в этой точке, деленной на e_0 :

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{e_0}}. \quad (12.13)$$

Те точки поля, где $\text{div} \vec{E}$ положительна, называются **источниками** векторного поля (положительные заряды), а те точки, где она отрицательна, – **стоками** (отрицательные заряды). Отметим, что поверхность интегрирования S выбирают так, чтобы модуль вектора $\vec{E}$ был или постоянен по всей поверхно-

сти, или на отдельных ее участках.

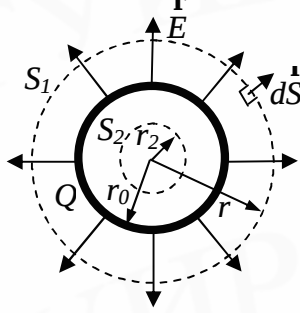


Рис. 12.7. К вычислению поля равномерно заряженной сферической оболочки

Пример. Определить напряженность $\vec{E}$: а) вне сферы и б) внутри сферы радиусом r_0 заряженной положительно, если заряд Q равномерно распределен по тонкой сферической оболочке (рис. 12.7).

Решение. А. Выберем поверхность интегрирования S_1 в виде сферы радиуса $r > r_0$, центр которой совпадает с центром заряженной сферической оболочки.

Из-за равномерного распределения заряда по сфере поле $\vec{E}$ сферически симметрично. Вектор $\vec{E}$ направлен наружу, так как заряд положителен, и имеет только радиальную составляющую $\vec{E} = E_r \frac{\vec{r}}{r}$, где $\vec{r}$ – радиус вектор из центра сферы в рассматриваемую точку поля. Следовательно, $E = E_r$.

Поскольку вектор $\vec{E}$ перпендикулярен к поверхности S_1 , то справедливо $\vec{E} \cdot \vec{n} = E$, где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности S_1 . Поэтому $\cos(\vec{E}, \vec{n}) = 1$. Тогда согласно теореме Гаусса (12.11)

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} E_n dS = E \oint_{S_1} dS = E \cdot (4\pi r^2) = Q/\epsilon_0.$$

В результате получаем, что напряженность поля

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2},$$

т.е. является такой же, как если бы весь заряд находился бы в центре сферы.

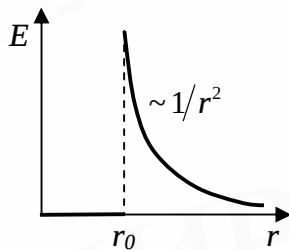


Рис. 12.8. Зависимость напряженности электрического поля E от расстояния r до центра равномерно заряженной сферической оболочки радиуса r_0

Б. Выберем поверхность интегрирования S_2 в виде сферы радиуса $r_2 < r_0$. Поле должно быть также сферически симметрично. Используем теорему Гаусса (12.11) и получим

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_{S_2} dS = E \cdot (4\pi r_2^2) = 0,$$

поскольку внутри сферы заряд равен нулю. Внутри заряженной сферы $E = 0$, рис. 12.8.

Необходимо отметить, что внутри любого проводящего шара, весь заряд которого сосредоточен в тонком поверхностном слое, напряженность поля равна нулю.

Таким образом, применение теоремы Гаусса (12.11) для расчета полей эффективно в том случае, когда поле обладает специальной симметрией (чаще всего плоской, цилиндрической или сферической).

12.3. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$. Потенциал. Потенциал поля точечного заряда

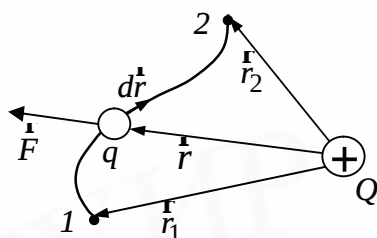


Рис. 12.9. К определению работы перемещения заряда в электростатическом поле ($Q, q > 0$)

Рассмотрим неподвижный точечный заряд Q , который создает в вакууме электростатическое поле $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$. Пусть в этом поле перемещается другой точечный заряд q из начального положения 1 в конечное положение 2 вдоль произвольной кривой 1–2 (рис. 12.9). Тогда сила, приложенная со стороны поля к заряду, совершает работу, выражающуюся линейным интегралом, который берется по некоторой линии (пути):

$$A_{12} = \int_1^2 q(\vec{E} \cdot d\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3}. \quad (12.14)$$

Но $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$, в чем легко убедиться, дифференцируя тождество $r^2 = r^2$. Поэтому интеграл (12.14) сводится к определенному интегралу

$$A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (12.14a)$$

Работа A_{12} не зависит от траектории перемещения, а определяется только положением точек 1 и 2. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является стационарным и потенциальным, а электростатические силы – консервативными (см. подтемы 4.5, 4.6). Доказанное утверждение справедливо для любого электростатического поля.

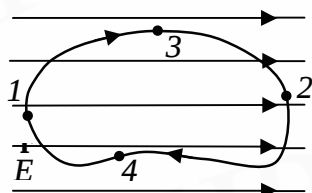


Рис. 12.10. Работа при перемещении заряда в электростатическом поле не зависит от формы пути

Допустим, что в электростатическом поле заряд переносится из точки 1 в точку 2 сначала по пути 1–3–2, а затем по пути 1–4–2, рис. 12.10. В обоих случаях работы сил одинаковы: $A_{132} = A_{142}$. Если заряд переносится по замкнутому пути 1–3–2–4–1, то на участке 2–4–1 работа изменит знак: $A_{241} = -A_{142}$. Поэтому имеем, что

$$A_{132} + A_{241} = A_{13241} = 0.$$

Значит, при перемещении заряда по любому замкнутому пути работа в электростатическом поле равна нулю.

Если перемещаемый заряд единичный ($q = 1$ Кл), то работа по замкнутому пути сводится к интегралу

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_L E_l dl, \quad (12.15)$$

где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление бесконечно малого перемещения $d\vec{l}$ вдоль контура L в данной точке поля; $d\vec{l} = dl \vec{t}$ ($\vec{t}$ – единичный вектор касательной к контуру). Такой интеграл называется **циркуляцией вектора напря-**

женности $\vec{E}$ электростатического поля по замкнутому контуру L .

Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$:

циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (12.16)$$

Равенство (12.16) можно рассматривать как определение **потенциальности** поля. Таким образом, любое электростатическое поле потенциально.

Для потенциальных полей можно ввести понятие потенциала – энергетической характеристики поля.

Потенциал $j(\vec{r})$ – это скалярная физическая величина, численно равная потенциальной энергии $W(\vec{r})$ единичного положительного заряда в данной точке пространства:

$$j(\vec{r}) = \frac{W(\vec{r})}{q}. \quad (12.17)$$

Потенциал определен с точностью до аддитивной постоянной. За нулевой потенциал часто удобно принимать потенциал бесконечно удаленной точки пространства. На практике за нулевой потенциал обычно принимают потенциал на поверхности Земли.

Единица потенциала в СИ – вольт (В).

1 В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж (1 В = 1 Дж/ 1 Кл).

В потенциальном поле тела обладают потенциальной энергией и работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии

$$A_{12} = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1 - W_2. \quad (12.18)$$

Тогда в соответствии с выражением (12.14) для точечного заряда можно записать

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C, \quad (12.19)$$

где постоянная C не играет роли, так как электростатические поля связаны с разностью потенциалов. Потенциал – это неоднозначная характеристика поля, а напряженность – однозначная. Считая, что при удалении заряда на бесконечность потенциальная энергия обращается в нуль $W(\infty) = 0$, получаем $C = 0$ и записываем формулу (12.19) без константы.

Разностью потенциалов $j_1 - j_2$ между точками 1 и 2 называется работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда по произвольному пути из точки 1 и в точку 2:

$$j_1 - j_2 = \frac{A_{12}}{q}, \quad (12.20)$$

где $(j_1 - j_2)$ – убыль потенциала. Согласно формулам (12.13), (12.15) и (12.19):

$$j_1 - j_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl, \quad (12.21)$$

где $d\vec{l}$ – бесконечно малое перемещение, а интеграл берется вдоль произвольной кривой между начальной и конечной точками.

Если перемещать заряд из произвольной точки на бесконечность, где потенциальная энергия, а значит, и потенциал принимаются равными нулю, то работа сил электростатического поля $A_\infty = qj$, откуда

$$j = \frac{A_\infty}{q}. \quad (12.22)$$

Поэтому можно сформулировать следующее определение потенциала:
потенциал – это физическая величина, определяемая работой сил поля по перемещению единичного положительного заряда при его удалении из данной точки пространства в бесконечность.

12.4. Связь потенциала и напряженности поля. Потенциал поля системы зарядов

Пусть в пространстве имеется электростатическое поле $\vec{E}$. В произвольном направлении перемещается точечный заряд q на отрезок $d\vec{l}$. При этом силы поля совершают работу

$$dA = q(\vec{E}d\vec{l}) = qE_l dl, \quad (12.23)$$

где E_l – проекция вектора $\vec{E}$ на направление бесконечно малого перемещения $d\vec{l}$. Эту работу можно определить через убыль потенциала ($-dj$):

$$dA = -qdj = -q\left(\frac{\partial j}{\partial l}\right)dl. \quad (12.23a)$$

Приравняв (12.23) и (12.23a), имеем

$$qE_l dl = -q\left(\frac{\partial j}{\partial l}\right)dl, \quad (12.24)$$

$$E_l = -\frac{\partial j}{\partial l}.$$

Таким образом, проекция вектора $\vec{E}$ на направление $d\vec{l}$ равна скорости убывания потенциала вдоль этого направления.

Взяв в качестве этого направления l координатные оси X , Y и Z , получим для компонентов вектора $\vec{E}$:

$$E_x = -\frac{\partial j}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial j}{\partial y} \quad \text{и} \quad E_z = -\frac{\partial j}{\partial z}.$$

Соответственно выражение для $\vec{E}$ имеет вид

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial j}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial j}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial j}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad } j \equiv -\vec{\nabla} j, \quad (12.25)$$

т.е. напряженность электростатического поля равна градиенту потенциала, взятому с обратным знаком. Следовательно, зная функцию $j(\vec{r})$, можно определить напряженность поля $\vec{E}$. Знак минус в формуле (12.25) показывает, что вектор $\vec{E}$ направлен в сторону убывания потенциала.

Для графического изображения распределения потенциала используют **экипотенциальные поверхности** – поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение.

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении электрического заряда по одной и той же экипотенциальной поверхности, равна нулю. Поэтому силовые линии пересекают экипотенциальные поверхности под прямым углом, вектор $\vec{E}$ будет перпендикулярен экипотенциальным поверхностям.

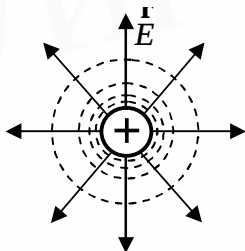


Рис. 12.11. Экипотенциальные поверхности (пунктирные линии) и силовые линии (сплошные линии) поля точечного положительного заряда

Экипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между двумя соседними экипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота экипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность больше. На рис. 12.11 пунктиром изображены силовые линии электростатического поля точечного положительного заряда, сплошными линиями – сечения экипотенциальных поверхностей.

Потенциал поля системы зарядов. Пусть система состоит из неподвижных точечных зарядов q_i ($i = \overline{1, n}$). Используем принцип суперпозиции электрических полей (12.6). В любой точке поля напряженность $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$, где $\vec{E}_i$ – напряженность поля заряда q_i . Поскольку $\vec{E} = -\vec{\nabla} j$, а $\vec{E}_i = -\vec{\nabla} j_i$, то мы можем вынести оператор дифференцирования $\vec{\nabla}$ за знак суммы. Получим принцип суперпозиции для потенциала системы неподвижных точечных зарядов:

$$j(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n j_i(\vec{r}_i),$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i -го точечного заряда, проведенный из интересующей нас точки.

Потенциал **системы неподвижных точечных зарядов** определяется как

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (12.26)$$

где r_i – расстояние от точечного заряда q_i до интересующей нас точки поля. В выражении (12.26) произвольная константа опущена. Всякая реальная система зарядов ограничена в пространстве, поэтому ее потенциал на бесконечности можно принять равным нулю.

Если заряды, образующие систему, распределены в пространстве непрерывно, то

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_V \frac{r}{r} dV, \quad (12.27)$$

где r – объемная плотность заряда в месте нахождения объема dV , интегрирование проводится или по всему пространству, или по той его части, которая содержит заряды.

Если заряды распределены только на поверхности S или распределены линейно (заряд сосредоточен на очень тонком «нитевидном» проводнике l), то соответственно будут справедливы формулы

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{s}{r} dS \text{ и } j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_l \frac{l}{r} dl, \quad (12.27a)$$

где s и l – соответственно поверхностная и линейная плотность заряда; dS – элемент поверхности S ; dl – элемент заряженной линии (нити).

12.5. Электрический диполь. Момент сил, действующий на диполь. Энергия диполя в поле

Электрическим диполем называется система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов $(+q, -q)$ на расстоянии l друг от друга.

Плечо диполя $\vec{l}$ – вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними.

Электрический момент диполя $\vec{p}$ – вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя, направленный от отрицательного заряда к положительному и равный произведению модуля заряда q на плечо $\vec{l}$:

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (12.28)$$

Согласно формуле для потенциала точечного заряда (12.19) потенциал электростатического поля диполя в точке A (рис. 12.12) определяется так:

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-}.$$

Если расстояние r от центра диполя до точки A таково, что $r \gg l$, то $r_- - r_+ = l \cos \alpha$ и $r_+ r_- = r^2$. Поэтому

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \alpha}{r^2}. \quad (12.29)$$

Найдем по формуле (12.24) проекции вектора $\vec{E}$:

$$E_r = -\frac{\partial j}{\partial r} = -\frac{\partial j}{\partial l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \alpha}{r^3}, \quad E_\alpha = -\frac{\partial j}{\partial \alpha} = -\frac{\partial j}{\partial \alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \alpha}{r^3}, \quad (12.30)$$

где направление l_1 совпадает с направлением радиус-вектора $\vec{r}$, а другое направление l_2 лежит в плоскости с осью диполя и направлено перпендикулярно к $\vec{r}$ в сторону возрастания угла α , рис. 12.13. При этом $dl_1 = dr$, $dl_2 = r d\alpha$.

Отсюда получаем, что модуль вектора $\vec{E}$ поля диполя в точке A равен

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\alpha^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}. \quad (12.31)$$

Можно доказать, что сила, действующая на диполь, определяется так:

$$\mathbf{r} \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial l}, \quad (12.32)$$

где $\frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial l}$ – производная вектора $\dot{\mathbf{E}}$ по направлению, совпадающему с вектором $\dot{\mathbf{l}}$ или $\dot{\mathbf{p}}$.

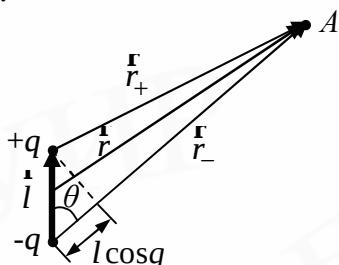


Рис. 12.12. К вычислению потенциала поля диполя

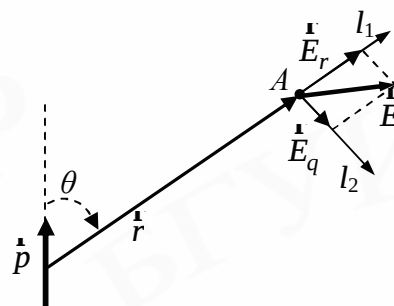


Рис. 12.13. К вычислению электрического поля диполя

Из выражения (12.32) следует, в частности, что в однородном поле $\frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial l} = 0$ и $\dot{\mathbf{F}} = 0$. Значит, сила действует на диполь только в *неоднородном поле*.

Момент сил, действующий на диполь. Во внешнем электрическом поле на заряды диполя действует пара сил, которая стремится повернуть диполь так, чтобы электрический момент диполя развернулся вдоль направления поля $\dot{\mathbf{E}}$.

Во внешнем однородном поле, рис. 12.14, а, момент пары сил $\mathbf{M}$ согласно определению (см. формулу (4.42)) равен

$$\mathbf{M} = qEl \sin a \quad \text{или в векторном виде} \quad \dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{p}} \times \dot{\mathbf{E}}. \quad (12.33)$$

Хотя создается вращающий момент, результирующая пары сил равна нулю и диполь в поле не перемещается. Момент сил стремится развернуть диполь вдоль силовой линии электрического поля. Вектор $\dot{\mathbf{M}}$ направлен перпендикулярно $\dot{\mathbf{p}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ по правилу векторного произведения.

Во внешнем неоднородном поле (рис. 12.14, б) силы, действующие на концы диполя, неодинаковы ($|\dot{\mathbf{F}}_2| > |\dot{\mathbf{F}}_1|$). Их результирующая сила стремится передвинуть диполь. Диполь втягивается в область поля с большей напряженностью, если угол $a = (\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{E}})$ меньше $\pi/2$ (см. рис. 12.14, б). При $a > \pi/2$ диполь будет выталкиваться из области более сильного поля.

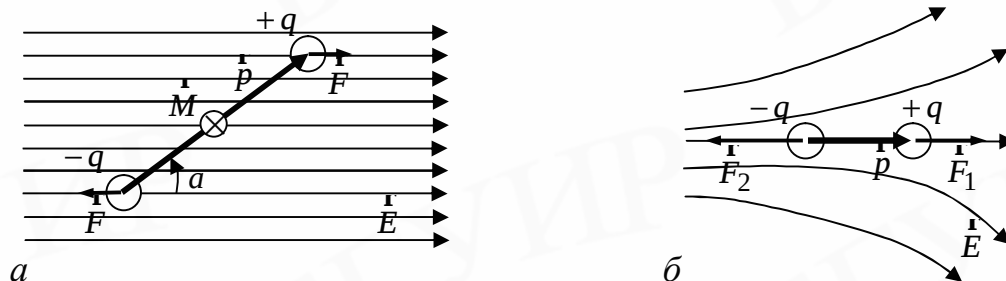


Рис. 12.14. Диполь во внешнем электростатическом поле:
а – в однородном; б – в неоднородном

Энергия диполя в поле. Энергия точечного заряда во внешнем поле по формуле (12.17) равна $W = qj$, где φ – потенциал поля в точке нахождения заряда q . Поэтому энергия диполя во внешнем поле

$$W = q_+ j_+ + q_- j_- = q(j_+ - j_-),$$

где j_+ и j_- – потенциалы внешнего поля в точках расположения зарядов q_+ и q_- соответственно. С точностью до величины второго порядка малости, учитывая выражение (12.26), получаем

$$j_+ - j_- = \frac{\nabla j}{\nabla l} l = -E_l l,$$

где $\frac{\nabla j}{\nabla l}$ – производная потенциала по направлению вектора $\vec{l}$. Поэтому

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (12.34)$$

Следовательно, минимальную энергию ($W_{\min} = -pE$) диполь имеет в положении устойчивого равновесия, когда направления векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$ совпадают между собой. При отклонении из этого положения возникает момент внешних сил, возвращающих диполь к положению равновесия.

12.6. Проводники в электрическом поле

Микрополе – это истинное электрическое поле в любом веществе, оно меняется весьма резко как в пространстве, так и во времени. Микрополе различно в разных точках атомов и промежутках между ними. Чтобы найти напряженность истинного поля в некоторой точке в данный момент, необходимо сложить напряженности полей всех отдельных заряженных частиц вещества – электронов и ядер.

Макрополе – это электрическое поле $\vec{E}$ в веществе, под которым понимают пространственно усредненное микрополе. Усреднение проводится по физически бесконечно малому объему, содержащему достаточно большое число атомов и имеющему размеры во много раз меньше, чем те расстояния, на которых макрополе меняется заметно:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{макро}} = \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle. \quad (12.35)$$

В металлических проводниках имеются **свободные носители заряда** – электроны проводимости (свободные электроны), которые могут под действием внешнего электрического поля перемещаться по всему проводнику.

В отсутствие внешнего поля электрические поля электронов проводимости и положительных ионов металла взаимно компенсируются.

Если металлический проводник внести во внешнее электростатическое поле, то под действием этого поля электроны проводимости перераспределяются в проводнике таким образом, чтобы в любой точке *внутри проводника* электрическое поле электронов проводимости и положительных ионов скомпенсировало внешнее поле. При установившемся равновесном распределении зарядов электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль: $\vec{E} = \vec{0}$.

Явлением **электростатической индукции** называется перераспределение зарядов в проводнике под влиянием внешнего электростатического поля.

При этом на проводнике возникают заряды, численно равные друг другу, но противоположные по знакам – **индуцированные (наведенные) заряды**, которые исчезают, как только проводник удаляется из электрического поля.

Поскольку внутри проводника $\vec{E} = -\text{grad } j = 0$, то потенциал будет постоянной величиной и справедливы следующие **следствия**:

1. Вектор $\vec{E}$ направлен по нормали к каждой точке поверхности: $\vec{E} = \vec{E}_n$, $\vec{E}_t = 0$. Иначе касательная составляющая вектора $\vec{E}$ вызвала бы перемещение носителей тока по поверхности проводника.

2. Потенциал во всех точках однородного проводника одинаков. Весь объем проводника эквипотенциален, так как для любого направления l

$$\frac{\partial j}{\partial l} = -E = -E_t = -E \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = 0,$$

и поэтому всюду внутри проводника, а также на его поверхности $j = \text{const}$.

3. Поверхность проводника является эквипотенциальной, так как для любой линии на этой поверхности

$$\frac{\partial j}{\partial l} = -E_t = 0.$$

4. Нескомпенсированные заряды располагаются в проводнике только на его поверхности. Согласно теореме Гаусса (12.11), заряд q , охватываемый произвольной замкнутой поверхностью S , проведенной внутри проводника, будет равен нулю:

$$q = \oint_S \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = 0,$$

так как во всех точках поверхности S напряженность $\vec{E} = 0$.

Поэтому при помещении **нейтрального проводника** во внешнее поле свободные заряды начнут перемещаться: положительные – по полю, а отрицательные – против поля, рис. 12.15, а. На одном конце проводника будет избыток положительных зарядов, на другом – отрицательных. Окончательно внутри проводника напряженность поля станет равна нулю, а линии напряженности вне проводника – перпендикулярными его поверхности, рис. 12.15, б.

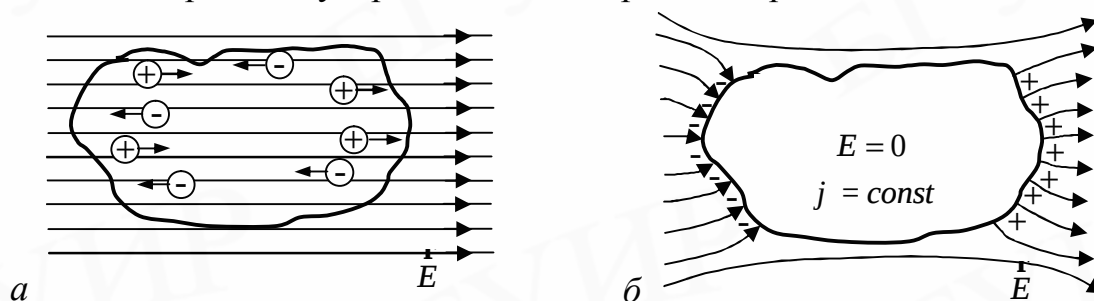


Рис. 12.15. Незаряженный проводник в электрическом поле:

а – носители заряда приходят в движение при помещении проводника во внешнее поле;

б – картина линий напряженности поля (на поверхности проводника изображены индуцированные заряды)

12.7. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение заряда в проводнике

Напряженность $\vec{E}$ электростатического поля вблизи поверхности проводника связана с поверхностной плотностью свободных зарядов на проводнике. Эту связь можно определить, используя теорему Гаусса (12.11).

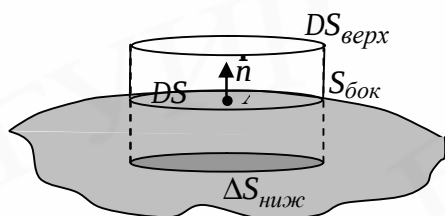


Рис. 12.16. К определению напряженности поля вблизи поверхности проводника

На поверхности проводника, граничащего с вакуумом, в окрестности точки A , рис. 12.16, выделим малый участок площадью ΔS , на котором находится заряд $q = s \Delta S$, где s – поверхностная плотность заряда на проводнике. Пусть $\vec{n}$ – внешняя нормаль в точке A к поверхности проводника. Выберем в качестве замкнутой гауссовой поверхности S поверхность цилиндра, основания которого равны: $\Delta S_{\text{верх}} = \Delta S_{\text{нижн}} = \Delta S$.

Образующие цилиндра параллельны нормали $\vec{n}$. Тогда поток вектора $\vec{E}$ через эту поверхность согласно формуле (12.11) будет таким:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{бок}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_{\text{нижн}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_{\text{верх}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{s \Delta S}{\epsilon_0},$$

где если $\Delta S_{\text{бок}} \rightarrow 0$, то $\int_{S_{\text{бок}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ и $\int_{\Delta S_{\text{нижн}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$, поскольку соответственно вектор $\vec{E}$ перпендикулярен внешней нормали к боковой поверхности $S_{\text{бок}}$ и внутри проводника поля нет.

Поэтому из последнего уравнения следует

$$E_n \Delta S = s \Delta S / \epsilon_0,$$

где E_n – проекция вектора на внешнюю нормаль $\vec{n}$. Отсюда окончательно получим, что вблизи проводника в вакууме

$$\boxed{E_n = \frac{s}{\epsilon_0}}. \quad (12.36)$$

Если $s > 0$, то и $E_n > 0$, т.е. вектор $\vec{E}$ направлен от поверхности проводника – совпадает по направлению с нормалью $\vec{n}$; иначе если $s < 0$, то $E_n < 0$ – вектор направлен внутрь проводника (см. рис. 12.15, б).

Согласно уравнению (12.26) $E_n = -\partial j / \partial n$ и, следовательно:

$$\boxed{s = -\epsilon_0 \frac{\partial j}{\partial n}}. \quad (12.37)$$

На рис. 12.17 представлен вид силовых линий и эквипотенциальных поверхностей поля заряженного положительно металлического тела цилиндрической формы с коническим выступом на одном конце и конической впадиной на другом.

Определим силы, действующие на поверхность проводника. Рассмотрим случай, когда заряженный участок поверхности проводника граничит с вакуу-

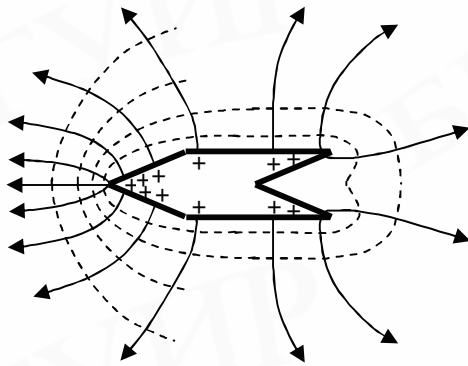


Рис. 12.17. Эквипотенциальные поверхности и силовые линии заостренного проводника: сплошные линии – силовые линии, пунктирные линии – эквипотенциальные поверхности

мом. Между одноименными зарядами, находящимися на поверхности заряженного проводника, действуют силы взаимного отталкивания. Можно доказать, что сила, действующая на единицу поверхности проводника, определяется как

$$\vec{F}_{ed} = \frac{s^2}{2\epsilon_0} \vec{n} = \frac{\epsilon_0 E_n^2}{2} \vec{n}, \quad (12.38)$$

где учтено, что $s = \epsilon_0 E_n$ и $E_n^2 = E^2$.

Величину $\vec{F}_{ed}$ называют **поверхностной плотностью сил**. Независимо от знака s , а значит и направления $\vec{E}$, сила $\vec{F}_{ed}$ всегда направлена наружу заряженного проводника и стремится его растянуть.

Свойства замкнутой проводящей оболочки. Итак, в состоянии равновесия избыточных зарядов внутри проводника нет, вещество внутри проводника электрически нейтрально. При удалении вещества из некоторого объема внутри проводника, т.е. создании замкнутой полости, поле нигде не изменится. Равновесное распределение зарядов сохранится. Следовательно, избыточный заряд распределится на проводнике с полостью так же, как и на сплошном проводнике – по его наружной поверхности.

Поэтому внешние заряды, в частности заряды на наружной поверхности проводника, не создают поля в полости внутри проводника. Это явление лежит в основе **электростатической защиты** – экранировании тел, например измерительных приборов, от влияния внешних электростатических полей. Вместо сплошного проводника-оболочки может быть густая металлическая сетка.

12.8. Емкость уединенного проводника

Уединенным проводником называется проводник, который находится настолько далеко от других тел, что влиянием их электрических полей можно пренебречь.

Характер распределения зарядов по поверхности заряженного уединенного проводника, находящегося в однородной, изотропной диэлектрической среде (см. подтему 13.1), зависит только от формы поверхности проводника. Поверхностная плотность зарядов s в каждой точке A поверхности проводника пропорциональна его общему заряду:

$$s = kq, \quad (12.39)$$

где $k = k(x, y, z)$ – функция координат точки A , зависящая от формы и размеров поверхности проводника. Значения k больше в тех точках поверхности, где больше ее кривизна. Опыт показывает, что заряд q на уединенном проводнике прямо пропорционален его потенциалу ϕ (считаем, что на бесконечности

$j_{\infty} = 0$): $q \sim j$ или $q = Cj$.

Коэффициент пропорциональности C называется **электрической емкостью** (**электроемкостью** или просто **емкостью**) этого проводника:

$$C = \frac{q}{j}. \quad (12.40)$$

Единица емкости в СИ – фарад (Ф): $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}$.

За единицу емкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при увеличении заряда на нем на 1 Кл.

Например, найдем емкость уединенного проводящего шара радиусом R , используя формулы (12.11), (12.20) и (12.40), учитывая, что $j_{\infty} = 0$:

$$j - j_{\infty} = -\oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{r} = -\oint_R \vec{E} d\vec{r} = -\oint_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\left. \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_R^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

$$C_{\text{шара}} = \frac{q}{j} = 4\pi\epsilon_0 R, \quad (12.40a)$$

следовательно, для шара емкость прямо пропорциональна его радиусу. На практике обычно приходится встречаться с емкостями в интервале от 1 мкФ до 1 пФ. Например, емкость проводящего шара с радиусом Земли 0,71 мФ.

Емкость зависит от формы и размера уединенного проводника и от диэлектрических свойств окружающей среды (см. тему 13). Емкости геометрически подобных проводников пропорциональны их размерам.

12.9. Взаимная емкость двух проводников. Конденсаторы

Установлено, что электроемкость неуединенного проводника всегда больше электроемкости того же проводника, когда он уединен. Если к проводнику с зарядом q приблизить другие тела, то на их поверхности возникнут индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды (см. подтему 13.1). Эти заряды ослабляют поле, создаваемое проводником с зарядом q . Потенциал проводника понижается, а его электроемкость повышается.

Конденсатор – это система из двух (иногда более) проводников (**обкладок**) с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами. Как правило, форма и расположение обкладок таковы, что электрическое поле практически полностью сосредоточено между обкладками.

Емкость конденсатора – это физическая величина, равная отношению заряда q , расположенного на положительно заряженной обкладке конденсатора, к разности потенциалов $j_1 - j_2$ между его обкладками:

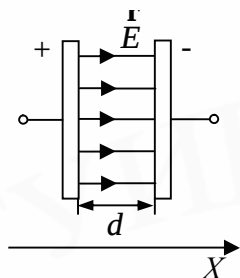
$$C = \frac{q}{j_1 - j_2} = \frac{q}{U}, \quad (12.41)$$

где $U = j_1 - j_2$ – **напряжение**, приложенное к конденсатору. Емкость конденсатора C зависит от формы и геометрических размеров обкладок, от зазора между ними и от заполняющей конденсатор среды.

Пример. Рассчитаем емкость плоского конденсатора, представляющего

собой две металлические плоские параллельные пластины площадью S , разделенные зазором ширины d . Пусть конденсатор заполнен средой, характеризующейся диэлектрической проницаемостью ϵ . Заряд конденсатора q , рис. 12.8.

Решение. Можно показать, что напряженность внутри конденсатора



$$E = \frac{S}{ee_0} = \frac{q}{ee_0 S} = \text{const}. \quad (12.42)$$

Поэтому напряжение между обкладками, так как ось X перпендикулярна обкладкам, определяется как

$$U = j_1 - j_2 = \int_0^d E dx = E \int_0^d dx = Ed = \frac{qd}{ee_0 S}.$$

Рис. 12.18. Конденсатор с параллельными обкладками

Подставим U в формулу (12.41) и получим для плоского конденсатора

$$C_{\text{пл конд}} = \frac{ee_0 S}{d}. \quad (12.43)$$

Отметим, что в данных расчетах не учтено искажение поля у границ пластин. Емкость реального конденсатора определяется выражением (12.43) тем точнее, чем меньше зазор d по сравнению с линейными размерами.

Соединения конденсаторов. Для того чтобы получить определенную емкость комбинации конденсаторов C_i ($i = \overline{1, n}$), их соединяют следующими основными способами. У **параллельно соединенных конденсаторов** разность потенциалов Δj_i на обкладках конденсаторов одинакова и равна Dj , рис. 12.19, а.



Рис. 12.19. Соединения конденсаторов:
а – параллельное; б – последовательное

Полная емкость будет равна сумме емкостей отдельных конденсаторов

$$C = \frac{q}{\Delta j} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\Delta j} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \Delta j_i}{\Delta j} = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (12.44)$$

У **последовательно соединенных конденсаторов** заряды q всех обкладок равны по модулю (рис. 12.19, б), а суммарная разность потенциалов равна

$$Dj = \sum_{i=1}^n Dj_i = \sum_{i=1}^n \frac{q}{C_i} = \frac{q}{C},$$

откуда получаем, что при последовательном соединении конденсаторов суммируются обратные величины емкостей:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (12.45)$$

Тема 13. Электростатическое поле в диэлектрике

13.1. Связанные и сторонние заряды

Известно, что **диэлектриками** называются вещества, которые при обычных условиях практически не проводят электрический ток. В данной подтеме ознакомимся со свойствами диэлектрика.

Как и всякое вещество, диэлектрик состоит из молекул (атомов). Все молекулы диэлектрика электрически нейтральны: суммарный заряд электронов и атомных ядер, входящих в состав молекулы, равен нулю. Однако молекулы обладают электрическими свойствами.

В первом приближении молекулу диэлектрика можно рассматривать как электрический диполь с электрическим моментом

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

где q – суммарный положительный заряд всех атомных ядер в молекуле; $\vec{l}$ – вектор, проведенный из «центра тяжести» электронов в молекуле в «центр тяжести» положительных зарядов атомных ядер.

Различают три типа диэлектриков:

1. **Неполярные диэлектрики** – диэлектрики с неполярными молекулами – это такие диэлектрики, в молекулах которых в отсутствие внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов совпадают ($\vec{l} = 0$) и, следовательно, дипольные моменты молекул равны нулю. Таковы, например, молекулы H_2 , O_2 , N_2 и др.

2. **Полярные диэлектрики** – диэлектрики с полярными молекулами – это диэлектрики, молекулы (атомы) которых имеют электроны, расположенные несимметрично относительно атомных ядер, и поэтому они обладают дипольным электрическим моментом. Например, молекулы H_2O , спиртов, NH_3 и т.д.

Если полярный диэлектрик не находится во внешнем электрическом поле, то в результате теплового движения молекул векторы их дипольных электрических моментов ориентированы беспорядочно. Следовательно, сумма дипольных моментов всех молекул, содержащихся в любом физически бесконечно малом объеме диэлектрика, равна нулю.

3. **Ионные диэлектрики** – это диэлектрики, имеющие ионную кристаллическую решетку и представляющие собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков. Например, молекулы KCl .

Поляризацией диэлектрика называется процесс, в результате которого физический объект (атом, молекула, твердое тело и др.) приобретает электрический дипольный момент.

Соответственно различают три вида поляризации диэлектриков:

1. **Электронная**, или **деформационная**, поляризация диэлектрика с неполярными молекулами. Во внешнем электрическом поле электронные оболочки атомов и молекул деформируются: положительные заряды смещаются по полю, отрицательные заряды – против поля. Поэтому неполярная молекула приобре-

тает индуцированный (наведенный) дипольный электрический момент, пропорциональный напряженности внешнего поля $\vec{E}$, рис. 13.1, а. Неполлярная молекула подобна упругому диполю, длина плеча которого пропорциональна напряженности внешнего электрического поля.

2. **Ориентационная**, или **дипольная**, поляризация диэлектрика с полярными молекулами – ориентация имеющихся дипольных моментов молекул по полю, рис. 13.1, б. Во внешнем электрическом поле полярная молекула деформируется. Однако в первом приближении этой деформацией можно пренебречь. Можно считать, что полярная молекула по своим электрическим свойствам подобна жесткому диполю, модуль электрического момента которого постоянен.

3. **Ионная** поляризация диэлектрика с ионными кристаллическими решетками – смещение подрешетки положительных ионов вдоль поля, а отрицательных ионов против поля приводит к возникновению дипольных моментов.

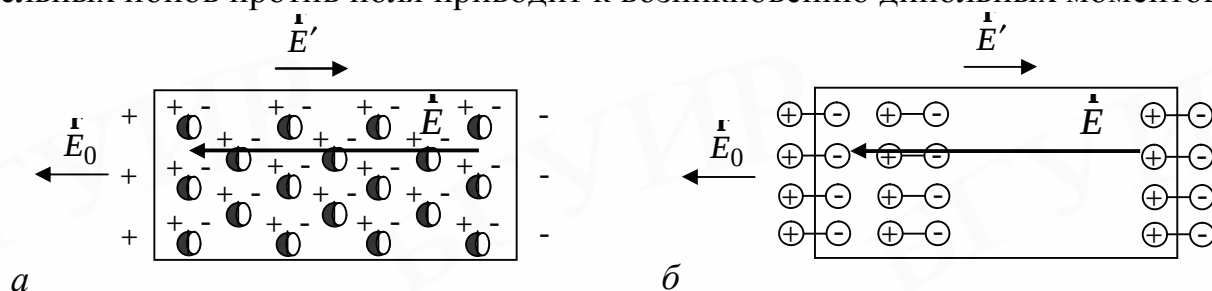


Рис. 13.1. Молекулярные представления о диэлектриках:

а – электронная поляризация неполярного диэлектрика;

б – ориентационная поляризация полярного диэлектрика

Таким образом, *механизм поляризации* связан с конкретным строением диэлектрика. Однако независимо от механизма поляризации все положительные заряды смещаются по полю, а отрицательные – против поля. В обычных условиях смещения зарядов значительно меньше размеров молекул. В результате поляризации на поверхности диэлектрика в электрическом поле появляются нескомпенсированные заряды, которые называются **связанными (поляризационными)**. Связанные заряды не могут передвигаться свободно и перемещаются только внутри электрически нейтральных молекул. В общем случае могут возникать и объемные, и поверхностные связанные заряды (q', r', s').

Первичным источником электрического поля в диэлектрике являются **сторонние заряды**, которые не входят в состав нейтральных молекул диэлектрика.

Поле $\vec{E}$ внутри диэлектрика будем называть величиной, являющуюся суперпозицией поля $\vec{E}_0$ сторонних зарядов и поля $\vec{E}'$ связанных зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad (13.1)$$

где $\vec{E}_0$ и $\vec{E}'$ – это макрополя, т.е. усредненные по физически бесконечно малому объему микрополя, рис. 13.1. Теперь можно определить, что **диэлектрики** – это вещества, через которые проникает электростатическое поле, в отличие от металлов, экранирующих электростатическое поле.

13.2. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость. Диэлектрическая проницаемость

Количественной характеристикой поляризации диэлектрика служит вектор $\vec{P}$, называемый поляризованностью.

Поляризованность (вектор поляризации) определяется как дипольный момент единицы объема диэлектрика, равный отношению электрического дипольного момента малого объема диэлектрика к этому объему ΔV :

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad (13.2)$$

где $\vec{p}_i = q\vec{l}_i$ – электрический дипольный момент i -й молекулы; n – общее число молекул в объеме ΔV . Этот объем должен быть настолько мал, чтобы в его пределах электрическое поле можно было считать однородным. Число молекул в ΔV должно быть достаточно велико, чтобы к ним можно было применить статистические закономерности: $n \gg 1$.

Единица поляризованности в СИ – кулон на метр в квадрате (Кл/м²).

В случае изотропных диэлектриков (за исключением сегнетоэлектриков и некоторых ионных кристаллов), чьи свойства не зависят от направления, поляризованность линейно зависит от напряженности результирующего (13.1) поля:

$$\vec{P} = c e_0 \vec{E}, \quad (13.3)$$

где c – безразмерная величина – **диэлектрическая восприимчивость вещества**, характеризующая свойства диэлектрика. Всегда $c > 0$. Диэлектрическая восприимчивость не зависит от напряженности $\vec{E}$.

Отметим, что в сильных электрических полях зависимость поляризованности $\vec{P}$ от напряженности $\vec{E}$ поля в диэлектрике может быть нелинейной.

Можно доказать **теорему Гаусса для поля вектора поляризации**:

поток вектора поляризации $\vec{P}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объеме V , охватываемом поверхностью S , т.е.:

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q' = -\int_V r' dV, \quad (13.4)$$

где r' – объемная плотность нескомпенсированного связанного заряда.

В **дифференциальной форме** уравнение (13.4) имеет следующий вид:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -r', \quad (13.5)$$

т.е. дивергенция поля вектора $\vec{P}$ равна взятой с обратным знаком объемной плотности избыточного связанного заряда в той же точке. Линии $\vec{P}$ начинаются на отрицательных и заканчиваются на положительных связанных зарядах.

Величина плотности нескомпенсированного связанного заряда r' в диэлектрике связана с плотностью сторонних зарядов ρ формулой

$$r' = -\frac{c}{1+c} r - \frac{e_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{1+c}. \quad (13.6)$$

Следовательно, **объемные связанные заряды** внутри диэлектрика будут отсутствовать при одновременном выполнении двух условий:

- 1) диэлектрик является однородным ($\nabla \epsilon = 0$);
- 2) сторонние заряды внутри него отсутствуют ($\rho = 0$).

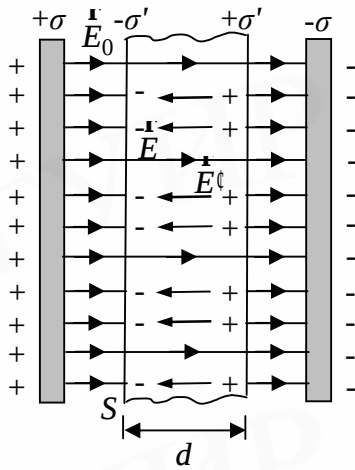


Рис. 13.2. Напряженность электрического поля $\vec{E}$ внутри диэлектрика

Поместим пластинку из однородного диэлектрика во внешнее электрическое поле, созданное двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями, рис. 13.2. В диэлектрике поле $\vec{E}'$ создается связанными зарядами и направлено против внешнего поля $\vec{E}_0$, создаваемого сторонними зарядами. Результирующее поле внутри диэлектрика согласно формуле (13.1) определяется как

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}'.$$

С помощью теоремы Гаусса (12.11) можно вычислить напряженность между двумя разноименно заряженными плоскостями (см. выражение (12.42)):

$$E_0 = \frac{s}{\epsilon_0},$$

где s – поверхностная плотность стороннего заряда на металлических обкладках конденсатора. По аналогии можно записать для поля $\vec{E}'$:

$$\boxed{E' = \frac{s'}{\epsilon_0}}. \quad (13.7)$$

где s' – поверхностная плотность связанных зарядов.

Тогда получаем, что напряженность поля внутри диэлектрика

$$\boxed{E = E_0 - E' = \frac{s - s'}{\epsilon_0}} \quad (13.7a)$$

совпадает с напряженностью поля в вакууме, когда поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора равна $(s - s')$.

Можно показать, что на границе диэлектрика и вакуума **поверхностная плотность связанных зарядов** s' равна нормальной составляющей вектора поляризации в данной точке поверхности:

$$\boxed{s' = P_n = \epsilon_0 E_n}, \quad (13.8)$$

где P_n – проекция вектора $\vec{P}$ на внешнюю нормаль к поверхности данного диэлектрика; E_n – проекция вектора $\vec{E}$ (внутри диэлектрика вблизи его поверхности) на внешнюю нормаль. Следовательно, знак P_n определяет знак s' .

Тогда можно записать из формул (13.7) и (13.7a)

$$E = E_0 - \frac{s'}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\epsilon_0 E_n}{\epsilon_0} = E_0 - E_n.$$

Напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$\boxed{E = \frac{E_0}{1 + \epsilon} = \frac{E_0}{\epsilon}}, \quad (13.9)$$

где $\epsilon = 1 + \epsilon = \frac{E_0}{E}$ – **диэлектрическая проницаемость среды**. Она характеризует способность диэлектрика поляризоваться в электрическом поле и показывает, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком (см. подтему 12.1). Отметим, что для всех веществ $\epsilon > 1$. Для вакуума $\epsilon = 1$, для газов ϵ мало отличается от 1, для воды $\epsilon = 81$, а для некоторых керамик может достигать многих тысяч. Для электроизолирующих материалов, например для мягкой резины, $\epsilon = 2,6 - 3$, для ультрафарфора (керамика) $\epsilon = 6,3 - 7,5$, для стекла $\epsilon = 4 - 10$.

При наличии диэлектрика теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$ (12.11) и эквивалентное уравнение (12.13) обычно записываются так:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \sum_{i=1}^N q_i, \quad \text{div} \vec{E} = \frac{r}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (13.10)$$

где q_i – сторонние заряды, охватываемые замкнутой поверхностью S ; ρ – объемная плотность стороннего электрического заряда в той же точке поля, в которой определяется дивергенция поля $\vec{E}$. Необходимо отметить выполнение теоремы о циркуляции вектора $\vec{E}$ (12.16) и в вакууме, и при наличии диэлектрика.

13.3. Вектор $\vec{D}$ (электрическое смещение). Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$

Напряженность электростатического поля зависит от свойств среды (от ϵ). Кроме того, вектор напряженности $\vec{E}$ на границе диэлектриков претерпевает скачкообразное изменение. Введем для описания электрического поля системы зарядов с учетом поляризационных свойств диэлектриков вспомогательный вектор, использование которого во многих случаях упрощает изучение поля в диэлектриках.

Внутри диэлектрика поле определяется и сторонними, и связанными зарядами. Поэтому, исходя из теоремы Гаусса для вектора напряженности в вакууме (12.11) и учитывая величину плотности нескомпенсированного связанного заряда r' в диэлектрике, запишем

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{r + r'}{\epsilon_0}.$$

По теореме Гаусса для вектора поляризации (13.5):

$$\nabla \cdot \vec{P} = -r'.$$

Тогда имеем, что

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} (r - \text{div} \vec{P}), \\ \text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= r, \end{aligned} \quad (13.11)$$

где **вектором электрического смещения (электрической индукции)** называется вектор

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.} \quad (13.12)$$

Для изотропного диэлектрика с учетом формулы (13.3) получаем

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \epsilon) \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (13.12a)$$

Единица вектора электрического смещения в СИ – кулон на метр в квадрате (Кл/м²).

Вектор $\vec{D}$ описывает электростатическое поле, создаваемое сторонними зарядами в вакууме, но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Аналогично линиям напряженности можно ввести **линии электрического смещения**. Направление и густота линий вектора электрического смещения определяются так же как и для вектора напряженности $\vec{E}$.

Согласно уравнению (13.11) **теорема Гаусса в дифференциальной форме для вектора $\vec{D}$** имеет вид

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = r, \quad (13.13)$$

т.е. дивергенция поля вектора $\vec{D}$ равна объемной плотности стороннего заряда в той же точке.

В тех точках, где дивергенция вектора $\vec{D}$ положительна, расположены **источники** поля $\vec{D}$ ($r > 0$), а в тех точках, где она отрицательна, – **стоки** поля вектора $\vec{D}$ ($r < 0$). Линии вектора $\vec{D}$ начинаются и заканчиваются только на сторонних зарядах. Отметим, что **источниками и стоками** поля $\vec{E}$ являются как сторонние, так и связанные заряды (см. рис. 13.2).

Используем теорему Остроградского (12.12) и сформулируем **теорему Гаусса для вектора $\vec{D}$ (теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике)**:

$$\oint_S \vec{D} \times d\vec{S} = q, \quad (13.14)$$

поток вектора электрического смещения электростатического поля в диэлектрике через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме охватываемых этой поверхностью **сторонних** электрических зарядов.

В изотропных диэлектриках векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ параллельны. В анизотропных диэлектриках эти векторы непараллельны.

Для непрерывного распределения заряда в пространстве с объемной плотностью $r = dq/dV$ справедливо

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V r dV. \quad (13.14a)$$

Отметим, что для вакуума формула (13.11a) записывается так:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}. \quad (13.15)$$

13.4. Поле в диэлектрике. Условия на границе двух диэлектриков

Изучим поведение векторов напряженности $\vec{E}$ и электрического смещения $\vec{D}$ электростатического поля на границе раздела двух однородных изо-

тропных диэлектрических сред 1 ($\vec{E}_1, \vec{D}_1$) и 2 ($\vec{E}_2, \vec{D}_2$). Рассмотрим окрестность произвольной точки A , лежащей на поверхности раздела этих сред. Пусть ϵ_1 и ϵ_2 – диэлектрические проницаемости первой и второй сред. Будем использовать теорему о циркуляции вектора $\vec{E}$ (12.16) и теорему Гаусса для вектора $\vec{D}$ (13.14).

Проведем в точке A на границе раздела сред единичные векторы, направленные по касательной к поверхности ($\vec{t}$) раздела и по нормали ($\vec{n}$) к ней, направленной из первой среды во вторую.

Построим вблизи точки A замкнутый прямоугольный контур L , две стороны которого параллельны границе раздела сред и равны Δl , а две другие равны Dh , рис. 13.3, а. При любом значении Dh должна выполняться теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$ (12.16):

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Перейдем к пределу при $Dh \rightarrow 0$:

$$\lim_{Dh \rightarrow 0} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (13.16)$$

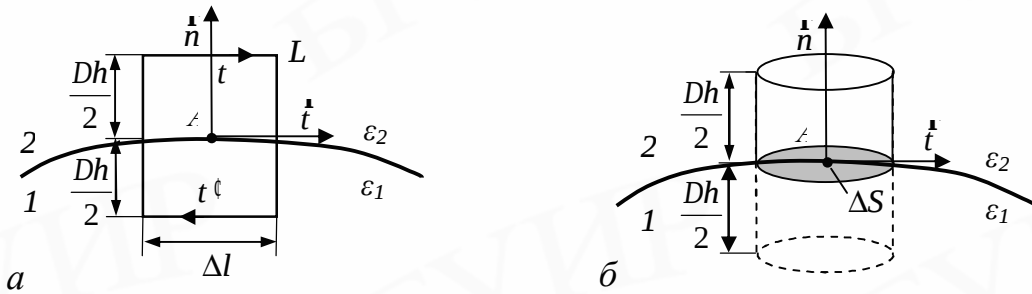


Рис. 13.3. К получению условий на границе двух диэлектриков:

а – для тангенциальных компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$;

б – для нормальных компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$

В этом случае значения интеграла $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ вдоль боковых сторон (Dh) прямоугольного контура L стремятся тоже к нулю. Верхняя и нижняя стороны контура неограниченно приближаются к поверхности раздела сред. При обходе контура L по часовой стрелке с учетом выражения (13.16) получаем, что

$$(E_{2t} + E_{1t'})\Delta l = 0,$$

где проекции вектора $\vec{E}$ взяты на направление обхода контура, показанное стрелками на рис. 13.3, а. Учтем, что в проекции на вектор $\vec{t}$ выполняется $E_{1t'} = -E_{1t}$. Таким образом, **первое граничное условие для напряженности поля**

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad (13.17)$$

т.е. тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ напряженности поля не изменяется при переходе из одной среды в другую через поверхность раздела.

Согласно формулам (13.12а) и (13.17) имеем

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \text{ и } \frac{1}{\epsilon_2 \epsilon_0} D_{2t} = \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_0} D_{1t}$$

и получаем **первое граничное условие для электрического смещения**:

$$\boxed{D_{2t} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{1t}}, \quad (13.18)$$

т.е. тангенциальная составляющая вектора $\vec{D}$ претерпевает на границе раздела диэлектриков разрыв.

Определим вторую пару условий. Выберем вокруг точки A небольшой участок поверхности раздела сред площадью ΔS . Построим цилиндрическую замкнутую поверхность S , охватывающую этот участок границы раздела сред 1 и 2. Пусть образующие цилиндра длиной Dh параллельны вектору $\vec{n}$ нормали к поверхности раздела, а основания цилиндра перпендикулярны $\vec{n}$, рис. 13.3, б.

В теореме Гаусса (13.14) для вектора $\vec{D}$:

$$\oint_S \vec{D} \times d\vec{S} = q,$$

где q – суммарный сторонний заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности S , т.е. в объеме цилиндра. Перейдем к пределу при $\Delta h \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \times d\vec{S} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} q.$$

В общем случае при наличии поверхностных сторонних зарядов на границе раздела

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} q = s \Delta S,$$

где σ – поверхностная плотность стороннего заряда на границе раздела. Тогда должно выполняться равенство

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \times d\vec{S} = (D_{2n} - D_{1n}) \Delta S = s \Delta S.$$

Получаем граничное условие для вектора $\vec{D}$ в виде

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = s}. \quad (13.19)$$

Если на поверхности раздела сред нет поверхностных сторонних зарядов, то

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} q = 0.$$

Следовательно, **второе граничное условие для вектора $\vec{D}$** записывается как

$$\boxed{D_{2n} = D_{1n}}, \quad (13.20)$$

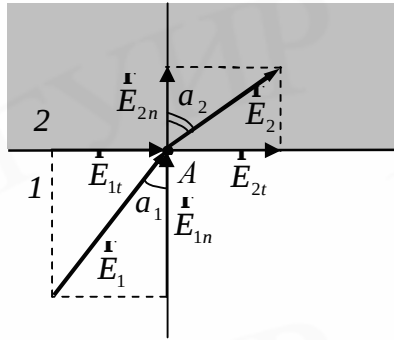
т.е. при переходе через границу раздела двух сред, на которой нет поверхностных сторонних зарядов, нормальная составляющая вектора электрического смещения непрерывна.

Соответственно **второе граничное условие для напряженности поля** имеет вид

$$\epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n} = \epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n} \Rightarrow \boxed{E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n}}. \quad (13.21)$$

В частности, если первая среда – вакуум, то $\epsilon_1 = 1$ и $E_{2n} = E_{1n} / \epsilon_2$. Это условие важно для практического применения в решении задач.

Преломление линий векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Полученные выше условия для составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков означают, что линии этих векторов на этой границе преломляются, рис. 13.4. Найдем соотношение между углами α_1 и α_2 , образуемыми линиями напряженности с перпендикуляром к поверхности раздела сред в точке A . Если сторонних зарядов на границе раздела нет, то по формулам (13.17) и (13.21) получаем



$$E_{2t} = E_{1t} \text{ и } E_{2n} = \frac{e_1}{e_2} E_{1n}.$$

Из рис. 13.4 следует, что углы α_1 и α_2 удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{E_{1t}}{E_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \Rightarrow \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} &= \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \cdot \frac{E_{1n}}{E_{1t}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}}. \end{aligned}$$

Рис. 13.4. Преломление линий напряженности на границе двух диэлектриков ($e_2 > e_1$)

Тогда **закон преломления линий напряженности электростатического поля** на поверхности раздела двух диэлектрических сред при условии отсутствия на этой поверхности сторонних зарядов в соответствии с уравнением (13.21) запишется так:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{e_2}{e_1}. \quad (13.22)$$

Условие на границе проводник–диэлектрик. Если на рис. 13.3, б среда 1 – проводник, а среда 2 – диэлектрик, то $D_{2n} = D_n$, а $D_{1n} = 0$, так как внутри проводника $\vec{E} = 0$. Из формулы (13.19) следует, что

$$D_n = s, \quad (13.23)$$

где $\vec{n}$ – внешняя по отношению к проводнику нормаль.

Связанный заряд у поверхности проводника. Можно доказать, что если к заряженному участку поверхности проводника прилегает однородный диэлектрик (объемная плотность связанных зарядов $r' = 0$), то на границе диэлектрика с проводником будут связанные заряды с поверхностной плотностью s'

$$s' = -\frac{e-1}{e} s, \quad (13.24)$$

где s – поверхностная плотность стороннего заряда на проводнике. При этом знаки связанного и стороннего зарядов будут противоположны.

Сегнетоэлектрики. *Сегнетоэлектриками* называются кристаллические диэлектрики, обладающие в определенном диапазоне температур спонтанной поляризацией, которая существенно изменяется под влиянием внешних воздействий. Они используются в конденсаторах большой емкости при малых размерах. Примеры: сегнетова соль $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, титанат бария BaTiO_3 .

Домены – это области сегнетоэлектриков с различными направлениями поляризации. Доменная структура отражает особенности развития фазового перехода в реальном сегнетоэлектрике. Температура, выше которой исчезают

сегнетоэлектрические свойства и вещество ведет себя как *изотропный диэлектрик*, называют **точкой Кюри** T_C . В некотором температурном интервале у сегнетоэлектриков $\epsilon \sim 10\,000$. Например, у сегнетовой соли $T_C = 258 - 296\text{ К}$, спонтанная поляризация $p_s = 2,6\text{ нКл/м}^2$, $\epsilon \gg 200$; у титаната бария $T_C = 391\text{ К}$, спонтанная поляризация $p_s = 158\text{ нКл/м}^2$, $\epsilon \gg 3000$.

Для сегнетоэлектриков связь между вектором напряженности внешнего электрического поля $\vec{E}$ и вектором поляризации $\vec{P}$ нелинейная и наблюдается явление **диэлектрического гистерезиса** – сохранения остаточной поляризованности $P_{ост}$ при снятии внешнего поля (рис. 13.5). Поляризация образца исчезает полностью лишь под действием электрического поля противоположного направления, напряженность которого $E = -E_c$.

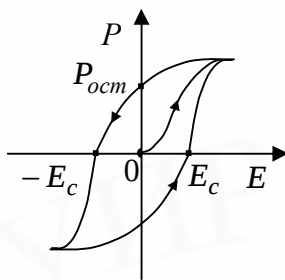


Рис. 13.5. Диэлектрический гистерезис в сегнетоэлектриках

направления, напряженность которого $E = -E_c$. Величина E_c называется **коэрцитивной силой**.

Пьезоэлектрики – это кристаллические диэлектрики, в которых при сжатии или растяжении возникает электрическая поляризация – прямой пьезоэффект. **Обратный пьезоэффект** – появление механической деформации под действием электрического поля.

13.5. Энергия электрического поля. Электрическая энергия системы зарядов. Энергия уединенного проводника. Энергия конденсатора. Плотность энергии

Согласно определению потенциала (12.17) **энергию взаимодействия системы n неподвижных точечных зарядов q_i ($i = \overline{1, n}$)** можно определить как

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i j_i, \quad (13.25)$$

где j_i – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд q_i , всеми зарядами, кроме i -го. Если заряд распределен в пространстве непрерывно с объемной плотностью $r = r(\vec{r})$, то элемент объема dV будет иметь заряд $dq = r dV$. Тогда энергия системы определяется уравнением

$$W = \frac{1}{2} \int_V j r dV, \quad (13.26)$$

где V – весь объем, занимаемый зарядом.

Определим **энергию заряженного уединенного проводника** произвольной формы, заряд, емкость и потенциал которого равны соответственно q , C , φ . Потенциал во всех точках уединенного проводника одинаков. Зная φ , найдем его энергию как

$$W = \frac{1}{2} \int_V j r dV = \frac{1}{2} q \varphi, \quad (13.26a)$$

или, используя, что $C = q/j$ по формуле (12.40), найдем

$$W = \frac{Cj^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (13.266)$$

Можно доказать, что электрическая энергия системы из n неподвижных заряженных проводников равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i j_i, \quad (13.26в)$$

где $q_i = \int_{S_i} s_i dS$, поскольку в проводнике избыточные заряды распределены по

его внешней поверхности; s_i – поверхностная плотность сторонних зарядов на малом элементе поверхности i -го проводника площадью dS . Интегрирование проводится по всей эквипотенциальной внешней поверхности проводника площадью S_i . Таким образом, формулу (13.26в) перепишем в виде

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} j_i s_i dS, \quad (13.27)$$

где S_i – поверхность заряженных проводников.

В общем случае **электрическую энергию любой системы заряженных неподвижных тел** – проводников и непроводников – можно найти по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_S j s dS + \frac{1}{2} \int_V j r dV, \quad (13.28)$$

где σ и r – соответственно поверхностная и объемная плотности сторонних зарядов; φ – потенциал *резльтирующего поля* всех сторонних и связанных зарядов в точках малых элементов dS и dV заряженных поверхностей и объемов. Интегрирование проводится по всем заряженным поверхностям S и по всему заряженному объему V тел системы.

Согласно формуле (13.28), если заряд распределен непрерывно, то необходимо разбить заряд каждого тела на бесконечно малые элементы $s dS$ или $r dV$ и каждый из них умножить на потенциал j , создаваемый не только зарядами других объектов, но и элементами заряда этого тела.

Поэтому расчет по формуле (13.28) позволяет вычислить **полную энергию взаимодействия**, поскольку получаем величину, равную сумме энергий взаимодействия заряженных неподвижных тел и их собственных энергий.

Собственная энергия заряженного тела – это энергия взаимодействия друг с другом элементов данного заряженного тела.

Энергию W можно трактовать как потенциальную энергию системы заряженных тел, обусловленную кулоновскими силами их взаимодействия. Влияние среды на энергию системы при неизменном распределении сторонних зарядов таково, что значения потенциалов φ в разных диэлектриках различны. Например, в однородном, изотропном диэлектрике, заполняющем все поле, φ меньше, чем в вакууме, в ϵ раз.

Из формулы (13.28) можно получить формулу также для **электрической**

энергии конденсатора ($r = 0$):

$$W = \frac{1}{2} \int_S j_s dS = \frac{1}{2} \left[j_1 \int_{S_1} s dS + j_2 \int_{S_2} s dS \right] = \frac{q_1 j_1 + q_2 j_2}{2} = \frac{1}{2} q(j_1 - j_2) = \frac{1}{2} qU, \quad (13.28a)$$

где S_1 и S_2 – площади обкладок конденсатора; $q = CU$.

Изучение переменных электромагнитных полей (тема 20) показало, что они могут существовать отдельно от породивших их систем электрических зарядов и токов, а их распространение в пространстве в виде электромагнитных волн связано с переносом энергии. Так было доказано, что:

электромагнитное поле обладает энергией. Соответственно и электростатическое поле обладает энергией, которая распределена в поле с объемной плотностью w_e .

Объемная плотность энергии электростатического поля w_e в случае однородных полей вычисляется по формуле

$$w_e = \frac{W}{V}. \quad (13.29)$$

Для неоднородных полей справедливо выражение

$$w_e = \frac{dW}{dV}, \quad (13.30)$$

где dW – энергия малого элемента dV объема поля, в пределах которого величину объемной плотности электростатического поля w_e можно считать всюду одинаковой.

Единица объемной плотности энергии электрического поля в СИ – джоуль на метр в кубе (Дж/м³).

Объемная плотность энергии электростатического поля в изотропной диэлектрической среде (или вакууме) равна

$$w_e = \int \mathbf{E} d\mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon \epsilon_0}, \quad (13.31)$$

где D – электрическое смещение. Согласно уравнению (13.12a) $\dot{D} = \epsilon \epsilon_0 \dot{E}$.

Необходимо отметить, что формулы (13.25) – (13.28a) справедливы для **потенциальных электростатических полей**, т.е. полей неподвижных заряженных тел.

Для **переменных непотенциальных электрических полей** понятие потенциала и построенные на его основе выражения для энергии лишены смысла. Эти поля обладают **энергией**, которую можно найти, пользуясь универсальной формулой, справедливой как для однородного, так и для неоднородного поля:

$$W = \int_V w_e dV = \int_V \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dV, \quad (13.32)$$

где V – объем, занимаемый полем.

Энергия поляризованного диэлектрика. Объемная плотность энергии электростатического поля в вакууме, как следует из формул (13.30) и (13.31), равна

$$w_e^{vak} = \frac{1}{2} e_0 E^2.$$

При той же напряженности $\dot{E}$ поля в диэлектрической среде объемная плотность энергии поля в e раз больше, чем в вакууме:

$$w_e = \frac{1}{2} e e_0 E^2.$$

Поэтому **объемная плотность энергии** $w_{диэл}$ поляризованного диэлектрика определяется как

$$w_{диэл} = \frac{1}{2} (e - 1) e_0 E^2 = \frac{1}{2} c e_0 E^2 = \frac{1}{2} P E, \quad (13.33)$$

где $\dot{P} = c e_0 \dot{E}$ – поляризованность диэлектрика; c – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

Пондеромоторные силы. *Пондеромоторные силы* – это механические силы, которые действуют на заряженные тела, помещенные в электрическое поле. Под действием этих сил поляризованный диэлектрик деформируется – это явление называется *электрострикцией*. Причиной их возникновения является действие неоднородного электрического поля на дипольные молекулы поляризованного диэлектрика. Эти силы обусловлены неоднородностью макрополя, а также и микрополя, создаваемого в основном ближайшими молекулами поляризованного диэлектрика.

Например, рассмотрим заряженный плоский конденсатор, отключенный от источника (постоянные заряды на обкладках), см. рис. 12.18. Введем в него диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ таким образом, чтобы между ним и пластинами конденсатора не было даже тонкого зазора (иначе силы электрострикции не передавались бы пластинам и сила взаимодействия между пластинами не менялась бы при введении диэлектрика). Под действием пондеромоторной силы обкладки конденсатора сжимают пластину диэлектрика, помещенного между ними, и в диэлектрике возникает давление.

Если расстояние между пластинами уменьшается на dx , то механическая работа равна

$$dA = F_x dx,$$

где F_x – проекция силы притяжения $\dot{F}$ между пластинами конденсатора на положительное положение оси X . Изменение энергии поля

$$dW = - \frac{e e_0 E^2}{2} S dx,$$

где S – площадь поверхности обкладки конденсатора.

Согласно закону сохранения энергии механическая работа сил электрического поля равна уменьшению энергии электрического поля. Тогда пондеромоторная сила – сила, действующая на единицу поверхности пластины, – будет равна

$$f = \frac{F_x}{S} = - \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} e e_0 E^2 S, \quad (13.34)$$

т.е. объемной плотности энергии электрического поля.

Тема 14. Постоянный электрический ток

14.1. Сила и плотность тока. Уравнение непрерывности

Электродинамика – раздел учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, обусловленные движением электрических зарядов.

Пусть u и $\vec{u}$ – скорости соответственно теплового движения электронов в отсутствии поля и упорядоченного движения электронов в поле. Через любую площадку dS средняя скорость $\langle \vec{u} \rangle = 0$. Тогда средняя скорость электронов в поле будет равна

$$\langle \vec{u} + \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \rangle + \langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \rangle.$$

Электрический ток есть упорядоченное движение электрических зарядов. Для возникновения и существования электрического тока в веществе (проводящей среде) необходимо:

1) наличие свободных **носителей тока** – заряженных частиц, способных перемещаться в проводящей среде упорядочено;

2) наличие электрического поля внутри проводника.

Носителями тока могут быть электроны (в металлах), ионы (в электролитах) или другие частицы. За направление электрического тока принимают направление движения положительных зарядов.

Сила тока I – это скалярная физическая величина, равная величине заряда dq , переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (14.1)$$

Заметим, что определение единицы силы тока в Международной системе единиц дается через силу взаимодействия токов и излагается ниже в подтеме 15.5.

Электрический ток называется **постоянным (стационарным)**, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени. **Переменным электрическим током** называется ток, изменяющийся с течением времени.

Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}, \quad (14.2)$$

где q – заряд, проходящий за время t через поперечное сечение проводника.

Единица силы тока в СИ – ампер (А).

Один ампер – это ток, при котором за единицу времени 1 с через полное сечение проводника проходит заряд 1 Кл.

Плотностью электрического тока называется ток, протекающий сквозь единицу площади поверхности $dS_{\perp}$, ортогональной направлению тока:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (14.3)$$

Единица плотности тока в СИ – ампер на метр в квадрате (A/m^2).

Вектор плотности тока $\vec{j}$ характеризует направление электрического тока в разных точках рассматриваемой поверхности и распределение силы тока по этой поверхности. Поэтому сила тока через произвольную поверхность S определяется как поток вектора плотности тока

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (14.4)$$

где $d\vec{S} = \vec{n}dS$ ($\vec{n}$ – единичный вектор нормали к площадке dS). Для постоянного тока I , текущего перпендикулярно сечению S проводника, плотность тока выражается как

$$\vec{j} = I/S. \quad (14.5)$$

Если за время dt через поперечное сечение dS проводника в направлении скорости $\langle \vec{u} \rangle$ переносится электрический заряд $dq = ne\langle u \rangle dSdt$ (где $n, e, \langle u \rangle$ – концентрация, заряд и средняя скорость упорядоченного движения зарядов соответственно), то сила тока $I = dq/dt = ne\langle u \rangle dS$, а плотность тока будет равна

$$\vec{j} = ne\langle \vec{u} \rangle. \quad (14.6)$$

Если носителями тока являются как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется формулой:

$$\vec{j} = r_+ \vec{u}_+ + r_- \vec{u}_- = n_+ e_+ \vec{u}_+ + n_- e_- \vec{u}_-, \quad (14.6a)$$

где r_+ и r_- – объемные плотности положительного и отрицательного зарядов-носителей; $\vec{u}_+$ и $\vec{u}_-$ – скорости их упорядоченного движения; n_+ и n_- – концентрация положительных и отрицательных носителей тока, имеющих заряд e_+ и e_- соответственно.

В проводниках, где носителями являются только электроны ($r_- < 0$ и $\vec{u}_+ = 0$), вектор плотности тока равен с учетом знака электрона

$$\vec{j} = -ne\vec{u}. \quad (14.6b)$$

Уравнение непрерывности. Рассмотрим в некоторой проводящей среде, где течет ток, замкнутую поверхность S . Для замкнутых поверхностей принято брать вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности dS , направленный наружу. Поэтому интеграл $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ определяет заряд, проходящий в единицу времени через поверхность S .

Согласно закону сохранения заряда этот интеграл равен убыли заряда в единицу времени внутри объема V , ограниченного поверхностью S :

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}. \quad (14.7)$$

Это соотношение называется **уравнением непрерывности электрического заряда** и выражает закон сохранения заряда. В случае постоянного тока распределение зарядов в пространстве должно оставаться неизменным, т.е. $dq/dt = 0$. Следовательно, уравнение (14.7) примет вид

$$\oint_S \vec{j} \times d\vec{S} = 0. \quad (14.8)$$

Таким образом, **линии вектора** $\vec{j}$, направленные по движению зарядов, т.е. вдоль вектора $\vec{E}$, в случае постоянного тока замкнуты. Поле вектора $\vec{j}$ не имеет источников.

Из уравнения непрерывности (14.7), представив q в виде $q = \int_V \rho dV$ и используя теорему Остроградского (12.12), получим **дифференциальную форму уравнения непрерывности**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (14.9)$$

Условие стационарности (для постоянного тока $\partial \rho / \partial t = 0$) записывается как

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (14.10)$$

14.2. Закон Ома для однородного проводника.

Закон Ома в дифференциальной форме

Закон Ома для однородного участка цепи (не содержащего источник тока) (**интегральная форма закона Ома**):

сила тока I , текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна напряжению U на конце проводника:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (14.11)$$

где R – **электрическое сопротивление проводника**.

Единица сопротивления в СИ – ом (Ом).

1 Ом – это сопротивление такого проводника, в котором течет постоянный ток 1 А при напряжении 1 В на его концах.

Сопротивление проводника зависит от его размеров и формы, а также от материала, из которого проводник изготовлен. Для однородного цилиндрического проводника сопротивление определяется как

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (14.12)$$

где l – длина проводника; S – площадь его поперечного сечения; ρ – **удельное электрическое сопротивление**, характеризующее материал проводника.

Единица удельного электрического сопротивления в СИ – Ом·метр (Ом·м).

Для большинства металлов при не слишком низких температурах

$$\rho \sim T. \quad (14.13)$$

Величина, обратная удельному электрическому сопротивлению, называется **удельной электрической проводимостью** вещества проводника:

$$s = \frac{1}{\rho}. \quad (14.14)$$

Единица удельной электрической проводимости в СИ – сименс на метр (См/м).

Найдем связь между плотностью тока $\vec{j}$ и полем $\vec{E}$ в одной и той же точке проводящей среды. Рассмотрим изотропный проводник, в котором направления векторов $\vec{j}$ и $\vec{E}$ совпадают.

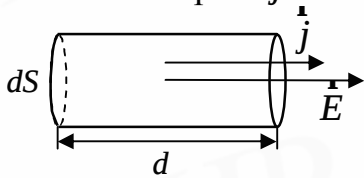


Рис. 14.1. К выводу локального закона Ома

Мысленно выделим в окрестности некоторой точки проводящей среды элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными вектору $\vec{j}$, а следовательно, и вектору $\vec{E}$. Пусть dS – поперечное сечение цилиндра, dl – его длина. В проводнике напряженность электрического поля $E = U/dl$.

Тогда из формул (14.11) и (14.12) для такого элементарного цилиндра получаем

$$I = U/R = j dS \text{ и } R = r \frac{dl}{dS}, \text{ следовательно, } j dS = \frac{E dl}{r dl/dS}.$$

Поэтому имеем

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{r} \vec{E} = s \vec{E}.} \quad (14.15)$$

Выражение (14.15) называется **законом Ома в дифференциальной форме (локальным законом Ома)** и устанавливает связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля в одной и той же точке пространства.

Необходимо отметить, что если ток постоянный, то избыточный заряд внутри однородного проводника всюду равен нулю. Избыточный заряд может появиться только на поверхности однородного проводника в местах соприкосновения с другими проводниками или на участках, где проводник имеет неоднородности.

Отметим, что электростатическое поле внутри проводников при равновесии зарядов равно нулю. Поскольку в случае стационарных токов заряды, возбуждающие электрическое поле, движутся, то электрическое поле $\vec{E}$ стационарных токов существует и внутри проводников с током.

14.3. Сторонние силы

Для существования *постоянного тока* необходимо наличие в цепи **источника тока** – устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счет сил не электростатического происхождения. Отметим, что перемещение носителей тока под действием сил электростатического поля приводит к выравниванию потенциалов всех точек цепи и прекращению тока.

Сторонними силами называются силы не электростатического происхождения, действующие на заряды либо на отдельных участках цепи, либо во всей цепи.

Количественная характеристика сторонних сил – поле сторонних сил и его напряженность $\vec{E}_{\text{стор}}$, определяемая сторонней силой, действующей на единичный положительный заряд:

$$\vec{E}_{стор} = \frac{\vec{F}_{стор}}{q}. \quad (14.16)$$

Природа сторонних сил может быть различной: в гальванических элементах они возникают за счет энергии химических реакций между электродами и электролитами; в генераторе – за счет механической энергии вращения ротора генератора; в солнечных батареях – за счет энергии фотонов и т.п.

Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против кулоновских сил электростатического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный электрический ток.

Физическая величина, определяемая работой, которую совершают сторонние силы при перемещении единичного положительного заряда, называется **электродвижущей силой (ЭДС)**, действующей в цепи:

$$e = \frac{A}{q}. \quad (14.17)$$

Эта работа совершается за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока, поэтому величину ε можно назвать ЭДС источника тока, включенного в цепь.

Единица ЭДС в СИ – вольт (В).

Участок электрической цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется **однородным**. Участок цепи, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется **неоднородным**.

Работа сторонних сил по перемещению заряда q на замкнутом участке цепи равна

$$A = \oint \vec{F}_{стор} d\vec{l} = q \oint \vec{E}_{стор} d\vec{l}.$$

Отсюда ЭДС, действующая в замкнутой цепи, – это циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил:

$$e = \oint \vec{E}_{стор} d\vec{l}. \quad (14.17a)$$

Следовательно, для поля сторонних сил циркуляция его напряженности по замкнутому контуру не равна нулю. ЭДС, действующая на участке 1–2 цепи

(рис. 14.2), находится как

$$e_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{стор} d\vec{l}. \quad (14.17б)$$

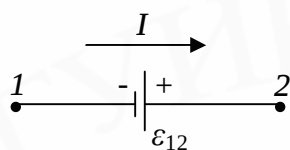


Рис. 14.2. Участок цепи с ЭДС

Если на заряд q действуют сторонние силы $\vec{F}_{стор}$ и силы электростатического поля $\vec{F}_e$, то результирующая сила равна

$$\vec{F} = \vec{F}_{стор} + \vec{F}_e = q(\vec{E}_{стор} + \vec{E}).$$

Работа результирующей силы по перемещению заряда q на участке 1–2 определяется с помощью формул (14.17б) и (12.21) как

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E}_{стор} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = qe_{12} + q(j_1 - j_2). \quad (14.18)$$

Для замкнутой цепи, так как работа электростатических сил в этом случае рав-

на нулю ($j_1 = j_2$), получаем

$$A = qe_{12}. \quad (14.18a)$$

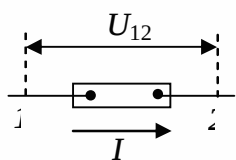


Рис. 14.3. К вычислению работы электрического тока

Напряжением U_{12} на участке 1–2 называется физическая величина, численно равная суммарной работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда на данном участке цепи, рис. 14.3:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = j_1 - j_2 + e_{12}. \quad (14.19)$$

Таким образом, напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов, если участок является однородным (т.е. на участке не действует ЭДС, сторонние силы отсутствуют, рис. 14.3):

$$U_{12} = j_1 - j_2. \quad (14.19a)$$

Сопротивление соединения проводников. В случае последовательного соединения n проводников, показанного на рис. 14.4, а, сила тока в них будет одинаковой: $I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$.



Рис. 14.4. Соединения n проводников ($n = 3$):
а – параллельное; б – последовательное

Используя закон сохранения энергии, согласно которому полное напряжение U равно сумме падений напряжений на каждом сопротивлении, получаем, что

$$IR = U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n I_i R_i = I \sum_{i=1}^n R_i. \quad (14.20)$$

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^n R_i.}$$

При параллельном соединении n проводников (рис. 14.4, б) к каждому проводнику приложено полное напряжение U : $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$. Учтем, что заряд сохраняется. Тогда

$$\frac{U}{R} = I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{R_i} = U \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

Поэтому общее сопротивление цепи оказывается меньше сопротивления каждого из резисторов в отдельности:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.} \quad (14.21)$$

14.4. Обобщенный закон Ома в дифференциальной форме.

Закон Ома для неоднородного участка цепи

Закон Ома в дифференциальной форме (14.15) при совместном действии поля $\vec{E}$ и поля сторонних сил $\vec{E}_{стор}$ записывается так:

$$\vec{j} = s (\vec{E} + \vec{E}_{стор}). \quad (14.22)$$

Этот закон справедлив в случае неоднородных участков цепи и называется **обобщенным законом Ома в дифференциальной форме**.

Умножим скалярно обе части равенства (14.22) на вектор $d\vec{l}$, численно равный длине dl элемента проводника и направленный вдоль проводника в направлении тока, т.е. вдоль вектора $\vec{j}$ плотности тока:

$$\vec{j} \cdot d\vec{l} = (\vec{E} \cdot d\vec{l} + \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}) / r.$$

Так как $\vec{j} \cdot d\vec{l} = j dl$, то

$$r j dl = r \frac{I}{S} dl = \vec{E} \cdot d\vec{l} + \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}.$$

Проинтегрируем по длине участка цепи 1–2 (между сечениями цепи 1 и 2) и учтем, что сила тока во всех сечениях цепи одинакова:

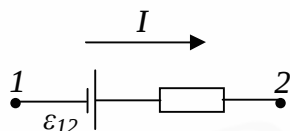


Рис. 14.5. К выводу закона Ома для неоднородного участка цепи

$$I \int_1^2 \frac{r}{S} dl = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}.$$

Тогда согласно формулам (14.12) и (14.18) последнее выражение преобразуется в **обобщенный закон Ома**:

$$I_{12} R_{12} = (j_1 - j_2) + e_{12}, \quad (14.23)$$

где R_{12} – электрическое сопротивление участка цепи 1–2; $(j_1 - j_2)$ – разность потенциалов на участке цепи 1–2, рис. 14.5.

Уравнение (14.23) – это **закон Ома для неоднородного участка цепи**: произведение электрического сопротивления участка цепи на силу тока в нем равно сумме падения электрического потенциала на этом участке и ЭДС всех источников электрической энергии, включенных на данном участке.

Пользуясь обобщенным законом Ома (14.23), нужно соблюдать следующее **правило знаков** для ЭДС источников, включенных на участке цепи 1–2:

если напряженность поля сторонних сил в источнике совпадает с направлением выбранного обхода участка цепи (внутри источника обход связан с перемещением от катода к аноду), то при подсчете ЭДС этого источника нужно считать положительной, а в противном случае – отрицательной. Например, $e_{12} = e > 0$ на рис. 14.6, а; $e_{12} = -e < 0$ на рис. 14.6, б.

Обобщенный закон Ома (14.23) можно представить в форме, в которой его экспериментально установил немецкий физик Ом в 1826 г.:

$$I_{12} R_{12} = U_{12}, \quad (14.23a)$$

где напряжение U_{12} определяется согласно формуле (14.19).

Рассмотрим частные случаи:

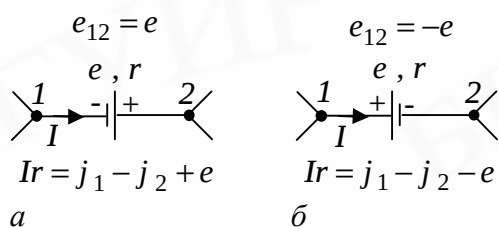


Рис. 14.6. Правило знаков для ЭДС источников:

a – случай $e > 0$; $б$ – случай $e < 0$ (r – внутреннее сопротивление источника тока). Стрелкой обозначено выбранное направление обхода

разомкнутой цепи, равна разности потенциалов на его клеммах:

$$e_{12} = j_2 - j_1.$$

3. В случае короткого замыкания сопротивление внешней цепи $R_{внеш} = 0$. Тогда сила тока $I = \frac{e}{r}$.

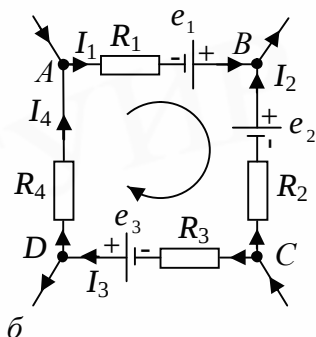
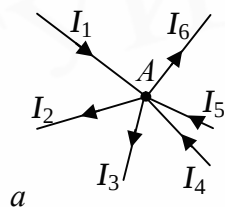


Рис. 14.7. К применению правил Кирхгофа:

a – узел электрической цепи;

$б$ – разветвленная цепь

контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма падений напряжений $U_i = I_i R_i$ на последовательных участках этого контура равна алгебраической сумме ЭДС e_k , включенных в контур:

$$\sum_i U_i = \sum_i I_i R_i = \sum_k e_k, \quad (14.25)$$

где I_i и R_i – соответственно ток и сопротивление i -го участка. Например, для замкнутого контура $ABCD A$ (рис. 14.7, б)

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = e_1 - e_2 + e_3,$$

где токи и ЭДС уже считаются положительными (обход по часовой стрелке).

1. **Закон Ома для замкнутой цепи** ($\Delta j = 0$):

$$I = \frac{e}{R} = \frac{e}{r + R_{внеш}},$$

где e – алгебраическая сумма отдельных ЭДС в данной цепи; R – суммарное сопротивление всей цепи; $R_{внеш}$ – сопротивление внешней цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока.

2. Если цепь разомкнута, то $I = 0$.

Поэтому ЭДС источника, действующего в

разомкнутой цепи, равна разности потенциалов на его клеммах:

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей (1847 г.). **Узлом электрической цепи** называется любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трех проводников с током. Ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла, – отрицательным, рис. 14.7.

Первое правило Кирхгофа – алгебраическая сумма токов I_k , сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (14.24)$$

где n – число проводников, сходящихся в узле.

Например, для узла A на рис. 14.7, а первое правило Кирхгофа записывается так:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 - I_6 = 0.$$

Второе правило Кирхгофа – в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной

электрической цепи, алгебраическая сумма падений напряжений $U_i = I_i R_i$ на последовательных участках этого контура равна алгебраической сумме ЭДС e_k , включенных в контур:

При расчете цепей с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи. При решении задачи определяется, что если искомый ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно, а если отрицательным – его истинное направление противоположно выбранному.

2. Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться; произведение $I_i R_i$ положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода. ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, действующие против – отрицательными.

3. Подсчитать число m узлов в цепи. Записать для каждого из узлов $(m - 1)$ выражений (14.24).

4. Составить систему уравнений (14.25), используя все сопротивления и ЭДС рассматриваемой цепи. Каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент, не содержащийся в предыдущих контурах.

14.5. Закон Джоуля–Ленца

Когда электрический ток I проходит по проводнику, то из-за неупругих столкновений носителей тока (электронов) между собой и с другими частицами среды (атомами) происходит рассеяние энергии. Если ток течет в цепи из неподвижных металлических проводников, то работа, совершаемая кулоновскими силами при переносе заряда $dq = I dt$ (см. формулы (12.20) и (14.19a)), равна

$$dA = dq(j_1 - j_2) = I dt U$$

и целиком расходуется на нагревание проводников. Тогда за малое время dt в объеме dV элемента проводника длиной dl выделяется количество теплоты, определяемое согласно закону Ома (14.11) следующим образом:

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt.$$

За конечный промежуток времени от 0 до t ток I выделяет во всем объеме проводника, сопротивление которого равно R , количество теплоты Q :

$$Q = \int_0^t I^2 R dt. \quad (14.26)$$

Формула (14.26) выражает **закон Джоуля–Ленца**. Если ток в цепи постоянен, то получаем закон Джоуля–Ленца для участка цепи постоянного тока (в интегральной форме), который с учетом закона Ома (14.11) записывается так:

$$Q = I^2 R t = U I t = \frac{U^2 t}{R}, \quad (14.26a)$$

количество теплоты, выделяемое постоянным электрическим током на участке цепи, равно произведению квадрата силы тока на время его прохождения и электрическое сопротивление этого участка цепи.

Этот закон был установлен экспериментально независимо в 1841 г. Д. Джоулем и в 1842 г. русским физиком Э. Х. Ленцем.

Выделим в проводнике цилиндрический объем $dV = dS dl$ (ось цилиндра

совпадает с направлением тока). По закону Джоуля–Ленца за время dt в этом объеме выделится теплота:

$$dQ = I^2 R dt = \frac{r}{dS} \frac{dl}{dS} (j dS)^2 dt = r j^2 dV dt.$$

Удельной тепловой мощностью называется количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема:

$$w = \frac{dQ}{dV dt} = r j^2. \quad (14.27)$$

Используем дифференциальную форму закона Ома (14.15) $j = sE$ и определение удельной электрической проводимости вещества (14.14) $r = 1/s$. В результате получим **закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме**:

$$w = s E^2 = jE. \quad (14.28)$$

Мощностью постоянного тока называют величину $P = IU$, которая равна джоулеву теплу, выделяемому в проводнике за единицу времени.

Тепловое действие электрического тока используется в лампах накаливания, электросварке, электронагревательных приборах и т.д.

Классическая теория электропроводности металлов. Основные законы электрического тока в классической теории электропроводности металлов – это законы Ома, Джоуля–Ленца и Видемана–Франца.

Для всех металлов при одинаковой температуре отношение коэффициента теплопроводности K к удельной электрической проводимости одинаково и увеличивается с температурой согласно **закону Видемана–Франца** (1853):

$$\frac{K}{s} = LT, \quad (14.29)$$

где L – число Лоренца, не зависящее от металла; K зависит от атомно-молекулярного строения вещества, состава, температуры, давления и т.д.

В **классической теории электропроводности металлов**, положения которой частично были использованы ранее, считается:

1. При образовании кристаллической решетки электроны внешних оболочек атомов обобществляются и кристалл представляет собой решетку неподвижных ионов металла, между которыми хаотически движутся свободные электроны, образуя электронный газ, обладающий свойствами идеального газа.

2. Движение электронов подчиняется законам классической механики.

3. Пренебрегается взаимодействием электронов между собой, рассматриваются только столкновения с атомами в узлах решетки.

4. Даже при предельно допустимых значениях плотности тока, средняя скорость $\langle u \rangle$ упорядоченного движения электронов, обуславливающего электрический ток, значительно меньше их скорости теплового движения $\langle u \rangle$.

Необходимо отметить, что существует ряд трудностей классической теории, которые разрешаются квантовой теорией: например, не согласуется с экспериментальной зависимостью сопротивления от температуры, зависимость теплоемкости металлов от температуры противоречит экспериментальной.

Тема 15. Магнитное поле в вакууме

15.1. Магнитная индукция $\vec{B}$. Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Принцип суперпозиции полей

В XIX в. опытным путем было установлено:

1. В пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое **поле**, называемое **магнитным**.

2. Движущиеся заряды создают магнитное поле.

3. Магнитное поле действует на движущиеся заряды.

Как известно, электростатическое поле действует и на неподвижные заряды, и на движущиеся. Магнитное поле не действует на покоящиеся заряды. Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток зависит от:

- 1) формы проводника, по которому течет ток;
- 2) расположения проводника;
- 3) направления тока.

Аналогично тому, как при исследовании электростатического поля используется пробный заряд, при исследовании магнитного поля используется замкнутый плоский контур с током (рамка с током), линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле.

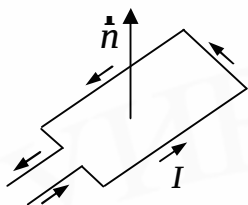


Рис. 15.1. Использование рамки с током для исследования магнитного поля

Ориентация контура с током в пространстве характеризуется направлением нормали $\vec{n}$ к контуру. В качестве положительного направления нормали принимается направление, связанное с током **правилом буравчика**:

за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке.

Опыты показывают, что со стороны магнитного поля на движущуюся в этом поле со скоростью $\vec{u}$ заряженную частицу q действует сила $\vec{F}_m$. Экспериментально по величине и направлению магнитной силы определяют силовую характеристику магнитного поля – вектор **магнитной индукции** $\vec{B}$.

При изменении направления скорости частицы в точке A поля модуль силы $\vec{F}_m$ изменяется от 0 до максимального значения $(F_m)_{\max}$, зависящего от произведения $|q| \cdot u$, а также и от значения в точке A вектора $\vec{B}$.

По определению, модуль вектора $\vec{B}$ равен

$$B = \frac{(F_m)_{\max}}{|q| \cdot u}. \quad (15.1)$$

Отметим, что отношение $F_m/(|q| \cdot u)$ не зависит ни от заряда q частицы, ни от модуля ее скорости.

Таким образом, **магнитная индукция** $\vec{B}$ численно равна отношению си-

лы, действующей на заряженную частицу со стороны магнитного поля, к произведению абсолютного значения заряда и скорости частицы, если направление скорости частицы таково, что эта сила максимальна.

Единица магнитной индукции в СИ – тесла (Тл).

При заполнении всего объема, где имеется магнитное поле (объем ограничен поверхностями, образованными линиями напряженности внешнего поля, см. подтему 16.2), однородной изотропной средой (магнетиком, см. подтему 16.1) величина магнитной индукции $\vec{B}$ изменяется в μ раз:

$$\mu = \frac{B}{B_0},$$

где μ – **магнитная проницаемость среды** (см. подтему 16.3) – безразмерная величина, показывающая во сколько раз магнитная индукция B поля в среде отличается от магнитной индукции B_0 поля в вакууме. Для вакуума $\mu_{\text{вак}} = 1$.

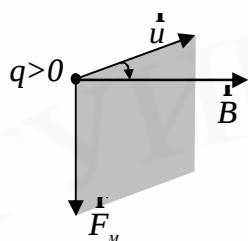


Рис. 15.2. К определению направления вектора силы $\vec{F}_m$

Из опыта следует, что вектор силы $\vec{F}_m$ ортогонален скорости $\vec{u}$ частицы q . По определению вектор магнитной индукции $\vec{B}$ также ортогонален направлению $\vec{F}_m$, рис. 15.2. По **правилу правой руки** ладонь правой руки располагается так, чтобы выпрямленные пальцы указывали направление движения частицы $\vec{u}$, а если их согнуть – направление вектора $\vec{B}$. Тогда большой палец руки будет указывать направление силы, действующей со стороны магнитного поля на положительно заряженную частицу.

Магнитное поле называется **однородным**, если во всех его точках векторы магнитной индукции одинаковы как по модулю, так и по направлению. В противном случае магнитное поле называется **неоднородным**.

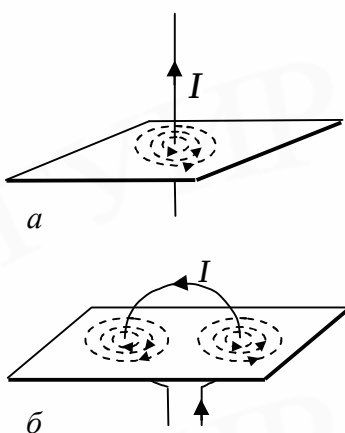


Рис. 15.3. Силовые линии магнитного поля вокруг проводника с током:
а – прямой проводник;
б – круговой виток

Графически стационарное (не изменяющееся со временем) магнитное поле изображают линиями магнитной индукции, рис. 15.3 а, б.

Линиями магнитной индукции (силовыми линиями магнитного поля) называются линии, проведенные в магнитном поле так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной индукции содержит вектор $\vec{B}$ в этой точке поля. Например, в случае проводника с током они имеют вид окружностей. Направление силовых линий прямого тока определяют по **правилу правой руки**: если мысленно обхватить проводник правой рукой так, что большой палец указывает направление тока в проводнике, то остальные пальцы показывают направление силовых линий магнитного поля тока, рис. 15.3, а.

Линии магнитного поля всегда замкнуты, в то время как линии электростатического поля – разомкнуты (они начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах).

Таким образом, опыт показывает, что сила, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу, определяется как

$$\vec{F}_m = q[\vec{u}, \vec{B}]. \quad (15.2)$$

Направление вектора силы $\vec{F}_m$ определяется согласно правилу векторного произведения (правило правой руки), описанному выше. Модуль силы равен

$$F_m = quB \sin a, \quad (15.2a)$$

где a – угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{B}$.

Тогда, если на движущуюся частицу с электрическим зарядом q одновременно действуют магнитное и электрическое поля, то результирующая электромагнитная сила $\vec{F}$, называемая **силой Лоренца**, равна сумме двух составляющих – электрической и магнитной:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{u}, \vec{B}], \quad (15.3)$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля. Электрическая составляющая результирующей силы $\vec{F}$ не зависит от скорости движения заряда. Скорость $\vec{u}$ в формуле (15.3) определяется относительно интересующей нас системы отсчета. Иногда под силой Лоренца понимают только магнитную составляющую силы $\vec{F}$. Необходимо заметить, что разделение полной силы Лоренца на электрическую и магнитную составляющие зависит от выбора системы отсчета.

Важной особенностью магнитной силы является то, что она всегда перпендикулярна вектору скорости заряда, поэтому работы над зарядом не совершает. Следовательно, в постоянном магнитном поле энергия движущейся заряженной частицы остается неизменной, как бы частица не двигалась.

Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Элементарный закон, определяющий поле $\vec{B}$ равномерно движущегося нерелятивистского точечного заряда q , был получен в результате обобщения экспериментальных данных:

$$\vec{B} = \frac{m_0}{4\pi} \frac{q[\vec{u}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (15.4)$$

где $m_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения. Конец радиус-вектора неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью $\vec{u}$. Формула (15.4) справедлива в случае постоянной нерелятивистской скорости $\vec{u}$ движения заряда.

Для магнитных полей справедлив **принцип суперпозиции**:

магнитная индукция поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (15.5)$$

15.2. Закон Био–Савара–Лапласа и его применение к расчету магнитного поля прямого и кругового токов

В 1820 г. французские ученые Ж. Био и Ф. Савар исследовали магнитные поля, создаваемые в воздухе прямолинейным током, круговым током, катушкой с током и т.д. В соавторстве с французским физиком П. Лапласом, который обобщил полученные ими экспериментальные результаты, они получили общий закон, позволяющий вычислять магнитную индукцию в каждой точке поля, создаваемом током, текущим по проводнику любой формы.

Магнитная индукция поля постоянного электрического тока, созданная элементом $d\vec{l}$ линейного проводника с током I в вакууме (рис. 15.4), удовлетворяет **закону Био–Савара–Лапласа**, который в СИ имеет вид:

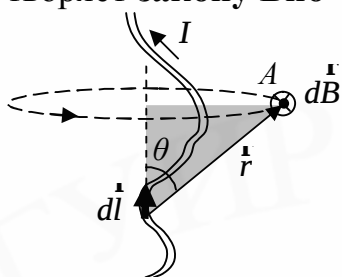


Рис. 15.4. Магнитная индукция элемента тока

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]dV}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (15.6)$$

где $\vec{j}$ – плотность тока; $\vec{j}dV$ и $I d\vec{l}$ – соответственно **объемный** и **линейный элемент тока**; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из элемента $d\vec{l}$ в рассматриваемую точку поля A . Угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ равен θ . Направление $d\vec{B}$ перпендикулярно плоскости векторов $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ и совпадает с касательной к линии магнитной индукции, проходящей через точку A .

Модуль вектора $d\vec{B}$ определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2}. \quad (15.6a)$$

Лаплас – автор гипотезы о том, что при наложении магнитных полей справедлив **принцип суперпозиции**, т.е. принцип независимого действия полей:

$$\vec{B} = \oint_l d\vec{B}, \quad (15.7)$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция магнитного поля малого элемента dl проводника с током, а интегрирование проводится по всей длине проводника.

Таким образом, магнитная индукция поля, создаваемого в вакууме током I , идущим по проводнику конечной длины и любой формы, равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (15.7a)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV. \quad (15.7b)$$

Рассмотрим два примера применения закона Био–Савара–Лапласа.

1. Магнитное поле прямолинейного проводника с током. Пусть ток I течет по прямому проводу бесконечной длины. В качестве постоянной интегрирования выберем угол θ , рис. 15.5, а. По закону Био–Савара–Лапласа (15.6a) модуль вектора $d\vec{B}$ в точке A поля элемента прямолинейного проводника равен

$$dB = \frac{m_0}{4p} \frac{I dl \sin q}{r^2},$$

где $dl = \frac{dS}{\sin q}$ и $dS = r dq$, а $r = \frac{R}{\sin q}$, R – расстояние от провода до точки A . Поэтому $dl = \frac{rdq}{\sin q} = \frac{Rdq}{\sin^2 q}$. Тогда получаем

$$dB = \frac{m_0}{4p} \frac{IR dq}{\sin^2 q} \cdot \frac{\sin^2 q}{R^2} \sin q = \frac{m_0}{4p} \frac{I \sin q}{R} dq.$$

Угол θ для всех элементов провода изменяется от 0 до π . По принципу суперпозиции (15.5) магнитная индукция поля, создаваемого прямым током I , равна

$$B = \frac{m_0 I}{4pR} \int_0^\pi \sin q dq = -\frac{m_0 I}{4pR} \cdot \cos q \Big|_0^\pi = \frac{m_0 I}{4pR} \cdot 2,$$

$$B = \frac{m_0 I}{2pR}.$$

(15.8)

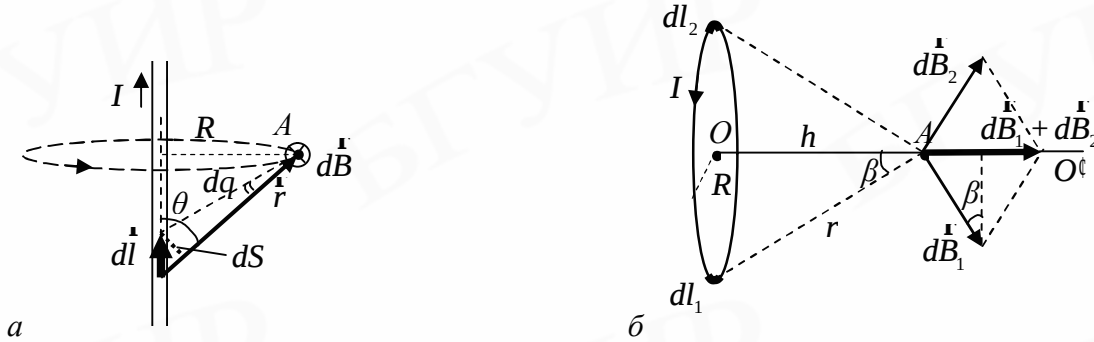


Рис. 15.5. К вычислению магнитного поля:

a – прямолинейного проводника с током; b – кругового витка с током

2. Магнитное поле кругового витка с током. Определим магнитную индукцию поля витка с током I в произвольной точке на оси витка OO' , проходящей через центр витка перпендикулярно его плоскости. На рис. 15.5, б показан круговой виток радиуса R , плоскость которого перпендикулярна плоскости чертежа, а ось OO' лежит в этой плоскости. В точке A на оси OO' векторы

$$d\mathbf{B} = \frac{m_0}{4p} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]$$

для полей различных малых элементов $d\mathbf{l}$ витка с током не совпадают по направлению. Векторы $d\mathbf{B}_1$ и $d\mathbf{B}_2$ для полей двух диаметрально противоположных элементов витка $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$, имеющих одинаковую длину $dl_1 = dl_2 = dl$, равны по модулю: $|d\mathbf{B}_1| = |d\mathbf{B}_2| = dB = m_0 I dl / 4p r^2$, так как $\sin(\angle d\mathbf{l}, \mathbf{r}) = 90^\circ$.

Результирующий вектор $d\mathbf{B}_1 + d\mathbf{B}_2$ направлен в точке A по оси витка, причем

$$|d\mathbf{B}_1 + d\mathbf{B}_2| = 2dB \sin b = \frac{m_0 I}{4p r^2} \frac{2R}{r} dl = \frac{m_0 IR}{2p r^3} dl.$$

Таким образом, поперечные составляющие $d\vec{B}_\perp$ взаимно компенсируют друг друга. Вектор индукции $\vec{B}$ в точке A для магнитного поля всего витка направлен также вдоль оси OO' , а его модуль определяется так:

$$B = \int dB_{\parallel} = \int dB \sin b = \int_0^{2pR} \frac{m_0 I}{4p} \frac{R}{r^3} dl = \frac{m_0 I}{4p} \frac{R}{r^3} \int_0^{2pR} dl = \frac{m_0 I}{4p} \frac{R}{r^3} \cdot 2pR.$$

Учитывая, что $r = \sqrt{R^2 + h^2}$, получаем

$$B = \frac{m_0}{2} \frac{IR^2}{r^3} = \frac{m_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (15.9)$$

15.3. Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$

Магнитным потоком (поток вектора $\vec{B}$ магнитной индукции) через малую поверхность площадью dS называется физическая величина

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_n dS = B dS \cos(\vec{B}, \vec{n}), \quad (15.10)$$

где $d\vec{S} = \vec{n} dS$; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к площадке dS ; B_n – проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали. Малая площадка dS выбирается так, чтобы ее можно было считать плоской, а магнитное поле в ее пределах – однородным.

Поле $\vec{B}$ может быть наглядно представлено с помощью линий вектора $\vec{B}$. Их проводят таким образом, чтобы число линий, пересекающих площадку dS , численно было пропорционально магнитному потоку. Поток вектора $\vec{B}$ может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака $\cos(\vec{B}, \vec{n})$.

Магнитный поток через произвольную поверхность S равен

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_n \cdot dS. \quad (15.11)$$

При вычислении этого интеграла векторы нормалей $\vec{n}$ к площадкам dS нужно направлять в одну и ту же сторону по отношению к поверхности S .

Если магнитное поле однородно, а поверхность S плоская, то

$$\Phi_B = BS \cos(\vec{B}, \vec{n}). \quad (15.12)$$

Единица магнитного потока в СИ – вебер (Вб): $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$.

1 Вб – это магнитный поток, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью 1 м^2 , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл .

Теорема Гаусса для магнитного поля:

магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (15.13)$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$ в дифференциальной форме:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}, \quad (15.14)$$

т.е. дивергенция поля $\vec{B}$ всюду равна нулю.

Данная теорема справедлива и для постоянных, и для переменных магнитных полей. Теорема Гаусса в форме (15.13) отражает экспериментальный факт, что линии вектора $\vec{B}$ замкнуты. Уравнение (15.14) эквивалентно уравнению (15.13) и является математическим выражением того, что в природе нет магнитных «зарядов», на которых начинались бы или заканчивались бы линии магнитной индукции.

Магнитный поток через поверхность, ограниченную *замкнутым контуром*, называется **потокосцеплением** Ψ .

Например, потокосцепление рамки или катушки, состоящей из N витков, магнитные потоки через которые одинаковы и равны Φ_B , будет таково:

$$\Psi = N\Phi_B.$$

Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока в самом этом контуре, называется **потокосцеплением самоиндукции**. Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока, идущего в другом контуре, называется **потокосцеплением взаимной индукции** этих двух контуров.

15.4. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$, ее применение к расчету полей. Поле соленоида

По определению **циркуляцией вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля** по замкнутому контуру называется интеграл, знак которого зависит от направления обхода контура L :

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ (для магнитного поля постоянных токов в вакууме):

циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному контуру L равна произведению m_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых данным контуром:

$$\boxed{\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B_l \cdot dl = m_0 \sum_{k=1}^n I_k}, \quad (15.15)$$

где $d\vec{l} = dl \vec{t}$ – элемент длины контура, направленный вдоль обхода контура;

$\vec{t}$ – вектор касательной в данной точке к контуру; $B_l = B \cos(\vec{B}, d\vec{l})$ – составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной к контуру с учетом выбранного направления обхода; n – число проводников с токами, охватываемых контуром L произвольной формы.

Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного на-

правления считается отрицательным, рис. 15.6.

Неравенство нулю циркуляции вектора $\vec{B}$ свидетельствует о том, что поле $\vec{B}$ непотенциально. Такое поле называется **вихревым (соленоидальным)**.

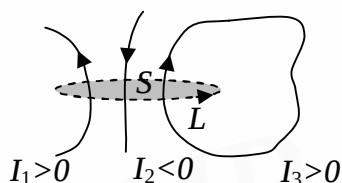


Рис. 15.6. Определение знака тока в теореме о циркуляции вектора $\vec{B}$

Теорема о циркуляции $\vec{B}$ позволяет упростить вычисление магнитной индукции, когда, выбрав простой контур, вычисление циркуляции можно свести к произведению B или B_l на длину контура или его часть. Иначе расчет поля $\vec{B}$ выполняют, используя закон Био-Савара-Лапласа ((15.8а) и (15.8б)).

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = m_0 \vec{j}, \quad (15.16)$$

где $\vec{j}$ – плотность тока в данной точке, $|\vec{\nabla} \times \vec{B}| = m_0 j$. При этом $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot} \vec{B}$. По определению ротор вектора $\vec{B}$ в декартовых координатах выражается как

$$\text{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{r} & \vec{r} \\ i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Применения теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ к расчету магнитного поля прямого тока. Формула (15.8) для индукции магнитного поля тонкого прямолинейного бесконечного проводника с током дает некорректный результат при $r \rightarrow 0$, т.е. на оси проводника получаем $B \rightarrow \infty$. Учтем, что реальный проводник имеет конечное поперечное сечение R и используем теорему о циркуляции вектора магнитной индукции (15.15).

Пусть постоянный ток I течет вдоль бесконечно длинного прямого провода. Замкнутый контур L представим в виде окружности радиуса r . Из симметрии задачи следует, что линии вектора $\vec{B}$ имеют вид окружностей с центром на оси провода. Модуль вектора $\vec{B}$ должен быть одинаков во всех точках на расстоянии r от оси провода. Вектор $\vec{B}$ направлен по касательной к окружности:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B_l \cdot dl = B_l \oint_L dl = B 2\pi r = m_0 I',$$

где I' – ток, охватываемый контуром L .

Отсюда следует, что внутри проводника, так как через поперечное сечение радиуса $r < R$ течет ток $I' = j\pi r^2$, магнитная индукция равна

$$B = \frac{m_0 j \pi r^2}{2\pi r} = \frac{m_0 j r}{2} = \frac{m_0 I r}{2\pi R^2}. \quad (15.17)$$

Вне проводника с током ($r > R$) получаем результат, совпадающий с ранее полученной формулой (15.8), так как $I' = I$ и

$$B = \frac{m_0 I}{2\pi r}.$$

Таким образом, на оси проводника с током $B = 0$. Магнитное поле имеет наибольшую индукцию на поверхности проводника.

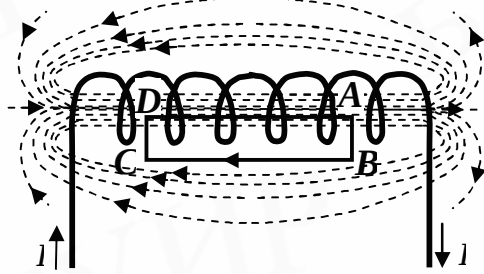


Рис. 15.7. Соленоид

Магнитное поле соленоида. *Соленоидом* называется свернутый в спираль изолированный проводник, по которому течет электрический ток, рис. 15.7.

Рассмотрим соленоид длиной l , имеющий N витков. На единицу длины соленоида приходится $n = N/l$ витков проводника. Если шаг винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближенно заменить замкнутым витком. Будем также предполагать, что сечение проводника настолько мало, что ток в соленоиде можно считать текущим по его поверхности.

Из соображений симметрии следует, что линии вектора $\vec{B}$ направлены вдоль его оси, причем вектор $\vec{B}$ составляет с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему. Поэтому выберем замкнутый прямоугольный контур $ABCD$, рис. 15.7. Циркуляция вектора $\vec{B}$ по данному контуру равна

$$\oint_{ABCD} \vec{B}_l d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B}_l d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B}_l d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B}_l d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B}_l d\vec{l} = m_0 N I.$$

На участках AB и CD контур перпендикулярен линиям магнитной индукции: $B_l = 0$. Можно показать, что вне бесконечного соленоида магнитное поле $B = 0$, удалив участок CB на бесконечность, где магнитное поле соленоида равно нулю, так как магнитное поле каждого витка соленоида уменьшается с расстоянием $\sim r^{-3}$.

На участке DA контур совпадает с линией магнитной индукции, внутри соленоида поле однородно ($B_l = B$). Поэтому имеем

$$\int_{DA} \vec{B}_l d\vec{l} = B l = m_0 N I.$$

Следовательно, внутри длинного соленоида поле однородно (за исключением областей, прилегающих к торцам соленоида):

$$B = m_0 n I, \quad (15.18)$$

где nI называют **числом ампервитков**.

15.5. Сила Ампера

На каждый носитель тока в проводнике действует магнитная сила. В результате магнитное поле действует на сам проводник с током с определенной силой, называемой **силой Ампера**.

А. М. Ампер установил, что сила $d\vec{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент тока $I d\vec{l}$, помещенный во внешнее магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, равна

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (15.19)$$

Формула (15.19) выражает **закон Ампера**:

сила, действующая на элемент проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на векторное произведение элемента длины проводника на магнитную индукцию поля.

Интегрируя выражение (15.19) по элементам тока (объемным или линейным), можно найти магнитную силу $\vec{F}$:

$$\vec{F} = I \int_l [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (15.19a)$$

В частности, если магнитное поле однородно, а проводник линейный, то

$$F = IlB \sin(\vec{l}, \vec{B}). \quad (15.19b)$$

Направление силы Ампера определяют **по правилу левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор $\vec{B}$, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы Ампера.

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов. Два параллельных проводника с током I_1 и I_2 находятся на расстоянии R друг от друга. Направление сил $d\vec{F}_1$ и $d\vec{F}_2$, с которыми поля $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ действуют на проводники с токами I_1 и I_2 , определяются по правилу левой руки, рис. 15.8. Если длина проводников во много раз больше расстояния R между ними, то можно считать проводники бесконечно длинными.

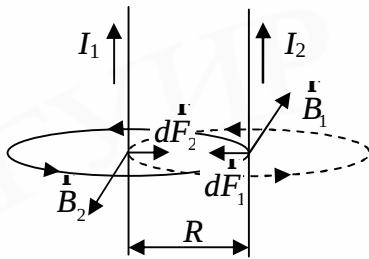


Рис. 15.8. Взаимодействие двух параллельных проводников с током

Используем полученное выражение (15.8) для магнитного поля прямого тока, чтобы найти поле в любой точке проводника с током I_i ($i = \overline{1, 2}$):

$$B_i = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi R}.$$

Тогда согласно закону Ампера (15.19) можно найти силу, которая действует на элемент dl_2 проводника с током I_2 со стороны поля B_1 :

$$dF_2 = I_2 dl_2 B_1 \sin(\vec{dl}_2, \vec{B}_1) = [dl_2 \perp \vec{B}_1] = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} dl_2.$$

Соответственно на участок dl_1 первого проводника с током I_1 действует сила

$$dF_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} dl_1.$$

Необходимо отметить, что $d\vec{F}_2 \uparrow \downarrow d\vec{F}_1$ и $dF_2 = |d\vec{F}_1|$.

Таким образом, для модулей сил можно написать общую формулу

$$dF = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} dl. \quad (15.20)$$

Когда провода находятся в среде с магнитной проницаемостью μ (см. тему 16), закон (15.20) представляется в виде

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} dl. \quad (15.20a)$$

Формула (15.20) позволяет установить одну из основных единиц СИ: Ампер – это единица силы тока, равная силе неизменяющегося тока, который, протекая по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу взаимодействия, равную 2×10^{-7} Н на каждый метр длины проводника:

$$\frac{F}{l} = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \frac{\text{М}}{\text{А}}) \cdot (1\text{А}) \cdot (1\text{А})}{(2\pi) \cdot (1\text{м})} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Длинные прямолинейные и параллельные проводники с токами одинакового направления притягиваются, с токами разного направления – отталкиваются.

15.6. Магнитный момент контура с током. Сила, действующая на контур с током. Работа при перемещении контура с током

Магнитным моментом плоского замкнутого контура с током I называется вектор

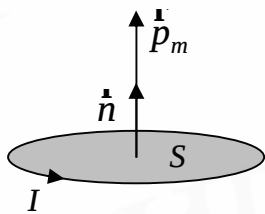


Рис. 15.9. Виток с током

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (15.21)$$

где S – площадь поверхности, ограниченной контуром, которую называют обычно поверхностью контура (или поверхностью, натянутой на контур); $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура, рис. 15.9. Векторы $\vec{n}$ и $\vec{p}_m$ направлены перпендикулярно плоскости контура по правилу правого винта (см. рис. 15.1).

На ребра a рамки с током во внешнем однородном магнитном поле, показанной на рис. 15.10, действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, которые стремятся только растянуть (или сжать) виток. Поскольку ребра b перпендикулярны линиям $\vec{B}$, то на каждое из них действует сила, стремящаяся повернуть рамку так, чтобы ее плоскость была перпендикулярна к $\vec{B}$. Следовательно, со стороны внешнего магнитного поля на контур с током действует вращающий момент пары сил, который, как можно показать, определяется векторным произведением

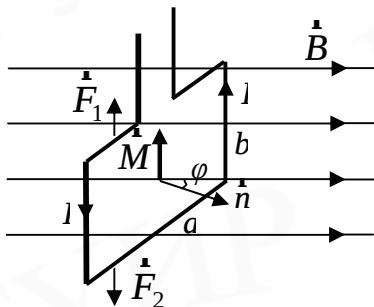


Рис. 15.10. Прямоугольная рамка с током в магнитном поле

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (15.22)$$

где $\vec{p}_m$ – вектор магнитного момента контура с током; $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции.

По определению векторного произведения скалярная величина момента равна

$$M = p_m B \sin j, \quad (15.22a)$$

где j – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

Можно доказать, что формула (15.22) справедлива для контура с током, находящегося

в однородном магнитном поле, независимо от формы этого контура.

При повороте контура с током в магнитном поле на угол dj , момент сил совершает работу, которую определяют как $dA = \dot{\mathbf{M}} \cdot d\mathbf{j} = -p_m B \sin j \, dj = -dE_p$. Работа идет на изменение потенциальной энергии контура с током в магнитном поле. Тогда потенциальная энергия будет равна

$$E_p = \int p_m B \sin j \, dj = -p_m B \cos j + \text{const} \quad \text{или} \\ E_p = -\dot{\mathbf{p}}_m \cdot \dot{\mathbf{B}} + \text{const}. \quad (15.23)$$

Сила, действующая на контур с током. Силы Ампера, действующие на замкнутый проводник с током со стороны магнитного поля (внешнего и собственного поля тока в проводнике), вызывают деформацию проводника.

Если контур находится в неоднородном магнитном поле $\dot{\mathbf{B}}$, не перпендикулярном к плоскости контура, то формула (15.22) справедлива, если размеры контура достаточно малы и поле можно считать в пределах контура приблизительно однородным. Тогда будут действовать и пара сил, стремящаяся повернуть контур с током, и результирующая сила, вызывающая поступательное перемещение контура, вычисляемая согласно уравнению (4.19) как:

$$\dot{\mathbf{F}}_{\text{рез}} = -\dot{\nabla} E_p = \dot{\nabla} (\dot{\mathbf{p}}_m \cdot \dot{\mathbf{B}}), \quad (15.24)$$

где $\dot{\mathbf{B}}$ – магнитная индукция внешнего магнитного поля.

Под действием силы $\dot{\mathbf{F}}_{\text{рез}}$ незакрепленный замкнутый контур с током в неоднородном магнитном поле будет перемещаться подобно **магнитному диполю**. Силы Ампера, действующие на отдельные участки витка, как и в случае однородного поля, перпендикулярны к току и к магнитному полю. Однако поскольку линии магнитной индукции теперь не параллельны, эти силы составляют некоторый угол с плоскостью витка. Поэтому он будет втягиваться в область более сильного магнитного поля, если угол φ между векторами $\dot{\mathbf{p}}_m$ и $\dot{\mathbf{B}}$ острый ($j < \pi/2$, рис. 15.11, а). Если же этот угол тупой ($j > \pi/2$, рис. 15.11, б), то контур с током будет выталкиваться в область более слабого поля. Отметим, что положение контура, при котором $\dot{\mathbf{p}}_m \updownarrow \dot{\mathbf{B}}$ является неустойчивым. Положение устойчивого равновесия контура соответствует случаю, когда $\dot{\mathbf{p}}_m \upuparrows \dot{\mathbf{B}}$.

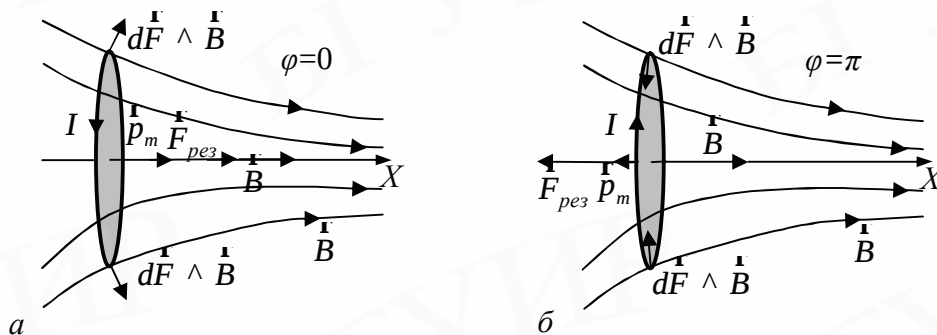


Рис. 15.11. Виток с током в неоднородном магнитном поле:

- а – виток втягивается в область более сильного поля;
- б – виток выталкивается в область более слабого поля

Если внешнее поле однородно ($\dot{\vec{B}} = \text{const}$ и тогда $\dot{\vec{p}}_m = \text{const}$), то результирующая сила (15.24) отсутствует и на контур действует только вращающий момент (15.22).

Работа при перемещении контура с током. Поскольку на проводник с током в магнитном поле действуют силы Ампера, то при движении проводника за счет источника тока совершается работа.

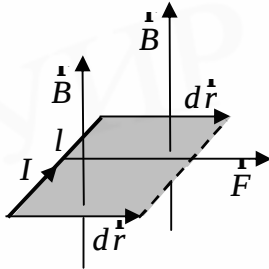


Рис. 15.12. К вычислению работы при поступательном движении проводника с током

Рассмотрим прямолинейный участок проводника длиной l с постоянным током I , который движется поступательно параллельно самому себе. Пусть магнитное поле $\vec{B}$ направлено перпендикулярно к плоскости, в которой движется проводник, рис. 15.12. Работа dA силы Ампера $\vec{F} = I[\vec{l}, \vec{B}]$ при перемещении проводника на расстояние $d\vec{r}$ определяется формулой

$$dA = \vec{F} \times d\vec{r} = IBl dr = IB dS, \quad (15.25)$$

где dS – площадь, описанная проводником при движении. Из определения магнитного потока (15.10) уравнение (15.25) можно представить в виде

$$dA = Id\Phi, \quad (15.25a)$$

где dA – работа при перемещении проводника с током, совершаемая силами магнитного поля; $d\Phi$ – увеличение магнитного потока через поверхность dS .

Можно показать, что формула (15.25a) справедлива и в случае произвольного перемещения проводника любой формы во внешнем постоянном неоднородном магнитном поле. Поэтому, если рассматривать контур с током произвольной формы, который движется в магнитном поле, то, разбивая проводник на элементарные участки, можно применять уравнение (15.25a). Тогда работа по перемещению контура с током будет равна

$$A = \int_0^1 I d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (15.26)$$

где Φ_1 и Φ_2 – магнитный поток через площадь контура соответственно в начальном и конечном положениях. Таким образом, работа по перемещению в постоянном магнитном поле замкнутого контура с током равна произведению силы тока в контуре на изменение его потокосцепления. Формула (15.26) выполняется, если ток в контуре постоянен.

Тема 16. Магнитное поле в веществе

16.1. Намагниченность. Токи намагничивания

При внесении того или иного вещества в магнитное поле $\vec{B}_0$, например образованное токами в проводах, поле изменяется. Причиной является то, что ряд веществ является **магнетиками**, т.е. они способны под действием магнитного поля намагничиваться – приобретать магнитный момент. Намагниченное вещество создает свое магнитное поле $\vec{B}'$. Результирующее поле $\vec{B}$ будет равно $\vec{B} = \vec{B}' + \vec{B}_0$,

где $\vec{B}'$ и $\vec{B}_0$ – поля, усредненные по физически бесконечно малому объему.

Как и поле $\vec{B}_0$, поле $\vec{B}'$ не имеет точечных источников (магнитных зарядов). Следовательно, **теорема Гаусса для результирующего поля при присутствии магнетика** записывается так:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (16.1)$$

т.е. линии вектора $\vec{B}$ и при наличии вещества в магнитном поле непрерывны.

Механизм намагничивания. Известно, что молекулы многих веществ обладают *собственным магнитным моментом* из-за движения электронов по замкнутым микроскопическим орбитам в пределах каждой молекулы (атома). Каждому магнитному моменту соответствует **молекулярный ток** – элементарный круговой ток, создающий в окружающем пространстве магнитное поле. При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул ориентированы беспорядочно. Тогда равны нулю и поле $\vec{B}'$, и суммарный магнитный момент вещества. Во внешнем поле $\vec{B}_0$ магнитные моменты молекул приобретают преимущественную ориентацию и вещество намагничивается, возникает поле $\vec{B}'$. Суммарный магнитный момент вещества будет отличен от нуля.

При внесении во внешнее поле веществ, молекулы которых не имеют при отсутствии поля $\vec{B}_0$ магнитного момента, в молекулах индуцируются молекулярные токи. Следовательно, вещество приобретает магнитный момент, что и приводит к возникновению поля $\vec{B}'$.

Таким образом, намагничивание вещества обусловлено преимущественной ориентацией или индуцированием микроскопических молекулярных токов во внешнем магнитном поле. Такое поведение молекулярных токов приводит к появлению макроскопических токов, называемых **токами намагничивания** $I^{\text{с}}$. Токи намагничивания создают дополнительное магнитное поле $\vec{B}'$. **Токами проводимости** называют текущие по проводникам токи, связанные с перемещением в веществе носителей тока. Отметим, что в отличие от токов проводимости токи намагничивания не приводят к перемещению заряда по магнетик.

Степень намагничивания магнетика характеризуется **намагниченностью** $\vec{J}$ – магнитным моментом единицы объема:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m, \quad (16.2)$$

где ΔV – физически бесконечно малый объем в окрестности данной точки; $\vec{p}_m$ – магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование проводится по всем молекулам в объеме ΔV . Намагниченность можно также определить как

$$\vec{J} = n \langle \vec{p}_m \rangle, \quad (16.3)$$

где n – концентрация молекул; $\langle \vec{p}_m \rangle$ – средний магнитный момент молекулы.

Если вещество намагничено однородно, то вектор $\vec{J}$ во всех точках магнетика одинаков.

16.2. Циркуляция намагниченности. Вектор $\vec{H}$ (напряженность магнитного поля)

Теорема о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$:

циркуляция вектора $\vec{J}$ по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов намагничивания, охватываемых контуром L :

$$\oint_L \vec{J} \cdot d\vec{l} = I', \quad (16.4)$$

где $I' = \oint \vec{j} \times d\vec{S}$, причем интегрирование проводится по произвольной поверхности контура L . Поле вектора $\vec{J}$ ограничено областью пространства, заполненной магнетиком, и зависит от всех токов – намагничивания и проводимости.

Дифференциальная форма уравнения (16.4) имеет вид:

$$\nabla \times \vec{J} = \vec{j}', \quad (16.5)$$

т.е. ротор вектора намагниченности равен плотности тока намагничивания в той же точке пространства.

Поскольку в магнетиках, помещенных во внешнее магнитное поле, возникают токи намагничивания, то циркуляция вектора $\vec{B}$ будет определяться не только токами проводимости, но и токами намагничивания:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0(I + I'), \quad (16.6)$$

где I и I' – соответственно токи проводимости и намагничивания, охватываемые контуром L . Формулу (16.6) сложно использовать из-за трудности определения токов I' в общем случае. Для упрощения изучения поля в магнетиках вводят вспомогательный вектор. Пусть в уравнениях (16.6) и (16.4) циркуляция векторов $\vec{B}$ и $\vec{J}$ берется по одному контуру L . Преобразуем уравнение (16.6):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0(I + \oint_L \vec{J} \cdot d\vec{l}), \quad \oint_L \left(\frac{\vec{B}}{m_0} - \vec{J} \right) \cdot d\vec{l} = I.$$

Напряженностью магнитного поля называется вектор $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{m_0} - \vec{J}. \quad (16.7)$$

Единица напряженности магнитного поля в СИ – ампер на метр (1 А/м).

16.3. Теорема о циркуляции вектора $\dot{\mathbf{H}}$

Обобщим теорему о циркуляции вектора $\dot{\mathbf{B}}$ (15.15), полученную для магнитного поля в вакууме. Используем выражение (16.7) и запишем **теорему о циркуляции вектора $\dot{\mathbf{H}}$** (**закон полного тока** для магнитного поля в среде):

$$\oint_L \dot{\mathbf{H}} \times d\dot{\mathbf{l}} = I, \quad (16.8)$$

т.е. циркуляция вектора $\dot{\mathbf{H}}$ по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора $\dot{\mathbf{H}}$:

ротор вектора $\dot{\mathbf{H}}$ равен плотности тока проводимости в той же точке вещества

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{j}}. \quad (16.9)$$

Данная теорема выражает определенное *свойство* поля вектора $\dot{\mathbf{H}}$, само же поле этого вектора она не определяет. Поле $\dot{\mathbf{H}}$ в общем случае зависит от всех токов – и от токов проводимости, и от токов намагничивания.

Связь между векторами $\dot{\mathbf{J}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. В несильных полях намагниченность $\dot{\mathbf{J}}$ пропорциональна напряженности $\dot{\mathbf{H}}$ поля, вызывающего намагничивание. Поэтому можно ввести понятие магнитной восприимчивости χ вещества:

$$\dot{\mathbf{J}} = c\dot{\mathbf{H}}, \quad (16.10)$$

где χ – безразмерная величина, характерная для каждого данного магнетика.

В отличие от диэлектрической восприимчивости ϵ , которая всегда положительна, **магнитная восприимчивость** χ бывает как положительной, так и отрицательной. Слабомагнитные вещества – магнетики, для которых $|c| \ll 1$, – подразделяются на **парамагнетики** ($\chi > 0$) и **диамагнетики** ($\chi < 0$). У парамагнетиков $\dot{\mathbf{J}} \uparrow \uparrow \dot{\mathbf{H}}$, у диамагнетиков $\dot{\mathbf{J}} \uparrow \downarrow \dot{\mathbf{H}}$.

Связь между векторами $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Слабомагнитные вещества подчиняются зависимости (16.10). Для них выражение (16.7) для вектора напряженности магнитного поля принимает вид

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{\mathbf{B}}}{m_0} - c\dot{\mathbf{H}} \Rightarrow (1+c)\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{\mathbf{B}}}{m_0}.$$

Поэтому получаем в случае однородной изотропной среды

$$\dot{\mathbf{B}} = m_0(1+c)\dot{\mathbf{H}} = m_0 m \dot{\mathbf{H}}, \quad (16.11)$$

где $m = 1 + c$ – **магнитная проницаемость среды** – величина, характеризующая реакцию среды на воздействие внешнего магнитного поля напряженностью H (см. подтему 15.1). Магнитные свойства диамагнетиков ($m < 1$) и парамагнетиков ($m > 1$) выражены очень слабо. Например, у диамагнетиков водорода, воды и висмута магнитная восприимчивость χ равна соответственно $-0,063 \cdot 10^{-6}$, $-9,0 \cdot 10^{-6}$ и $-284 \cdot 10^{-6}$. Для таких парамагнетиков, как воздух, платина и жидкий кислород, величина χ составляет соответственно $0,38 \cdot 10^{-6}$,

$360 \cdot 10^{-6}$ и $3400 \cdot 10^{-6}$.

Теорему о циркуляции вектора $\dot{\mathbf{B}}$ (16.6) при заполнении магнетиком всего пространства, где имеется магнитное поле, часто записывают так:

$$\oint_L \dot{\mathbf{B}} \cdot d\dot{\mathbf{l}} = m_0 m I. \quad (16.12)$$

Граничные условия для векторов $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Рассмотрим границу двух достаточно протяженных (бесконечных) слабомагнитных веществ 1 и 2 с магнитными проницаемостями m_1 и m_2 соответственно. Пусть на границе раздела магнетиков нет токов проводимости. Линии индукции $\dot{\mathbf{B}}$ и напряженности $\dot{\mathbf{H}}$ магнитного поля испытывают излом на границе раздела. Нормальные составляющие векторов $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в средах будем обозначать соответственно B_{in} и H_{in} ($i=1,2$). Тангенциальные составляющие векторов – касательные к поверхности раздела – соответственно B_{it} и H_{it} . С помощью теоремы Гаусса для вектора $\dot{\mathbf{B}}$ (16.1) и теоремы о циркуляции вектора $\dot{\mathbf{H}}$ (16.8) можно получить следующие условия для векторов $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на границе раздела двух магнетиков:

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad \frac{B_{2t}}{B_{1t}} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (16.13)$$

$$H_{2t} = H_{1t}, \quad \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (16.13a)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух однородных магнетиков, когда на границе раздела нет токов проводимости, нормальная составляющая вектора магнитной индукции $\dot{\mathbf{B}}$ и тангенциальная составляющая вектора напряженности $\dot{\mathbf{H}}$ непрерывны, т.е. не изменяются. При этом тангенциальные составляющие вектора $\dot{\mathbf{B}}$ и нормальные составляющие вектора $\dot{\mathbf{H}}$ претерпевают скачок.

В результате получаем закон преломления линий вектора $\dot{\mathbf{B}}$, который также выполняется в изотропных магнетиках для линий вектора $\dot{\mathbf{H}}$ поля:

$$\frac{\operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} a_2} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (16.14)$$

где a_1 и a_2 – углы между линией индукции $\dot{\mathbf{B}}$ (напряженности $\dot{\mathbf{H}}$) и нормалью к поверхности раздела магнетиков.

В заключение отметим, что линии вектора $\dot{\mathbf{B}}$ всегда замкнуты, в то время как на границе двух магнетиков линии вектора $\dot{\mathbf{H}}$ могут возникать или обрываться (из-за поверхностных токов намагничивания).

Ферромагнетизм. Ферромагнетиками называются твердые вещества, обладающие при не слишком высоких температурах самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий – магнитного поля, деформации, изменения температуры.

Ферромагнетики в отличие от слабомагнитных диа- и парамагнетиков являются сильномагнитными средами: внутреннее магнитное поле в них может в

сотни и тысячи раз превосходить внешнее поле. Такими свойствами обладают, например, переходные металлы (железо Fe , кобальт Co , никель Ni), некоторые редкоземельные элементы и ряд сплавов. Большой вклад в экспериментальное изучение свойств ферромагнетиков внес А. Г. Столетов (конец XIX в.).

Основная кривая намагничивания ферромагнетика – это кривая намагничивания $J = J(H)$, рис. 16.1. На рис. 16.1 предполагается, что в исходном состоянии тело не намагничено. Магнитная индукция $\vec{B}$ ферромагнетиков зависит от $\vec{H}$, подобно намагниченности $\vec{J}$, нелинейно. Поэтому магнитная проницаемость μ зависит от напряженности H поля также нелинейно, рис. 16.2.

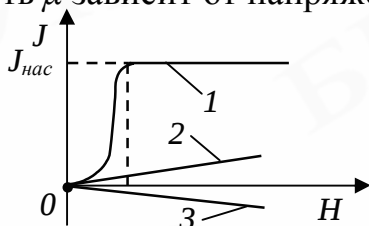


Рис. 16.1. Кривые намагничивания магнетиков:
1 – ферромагнетики ($\mu \gg 1$);
2 – парамагнетики ($\mu > 1$); 3 – диамагнетики ($\mu < 1$)

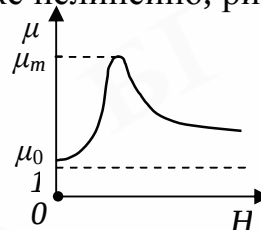


Рис. 16.2. Зависимость магнитной проницаемости μ ферромагнетиков от напряженности поля

Магнитным гистерезисом называется явление, когда предыстория намагничивания определяет зависимость намагниченности J от напряженности магнитного поля H (или B от H) в ферромагнетике, рис. 16.3. Если ферромагнетик намагнитить до насыщения (кривая 0–1), а затем уменьшать H (кривая 1–2), то при $H = 0$ в ферромагнетике останется **остаточная намагниченность** $J_{ост}$. Это явление используют при изготовлении постоянных магнитов. Для того чтобы уменьшить намагниченность до нуля, надо приложить противоположно направленное поле (точка 3), с напряженностью H_c , которая называется **коэрцитивной силой**. При

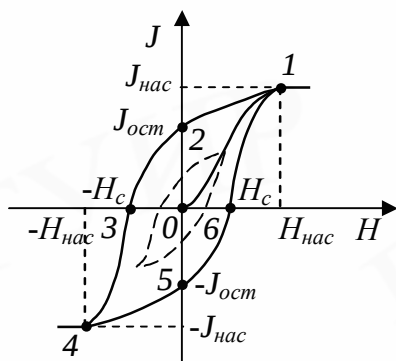


Рис. 16.3. Магнитный гистерезис в ферромагнетиках

увеличении противоположного поля ферромагнетик перемагничивается (кривая 3–4), достигая насыщения (точка 4). Затем его можно опять размагнитить (кривая 4–5–6) и вновь перемагнищить до насыщения (кривая 6–1). Изменение намагниченности описывается **петлей гистерезиса** – кривой 1–2–3–4–5–6–1.

Когда в точках 1 и 4 достигается **магнитное насыщение** ($J_{нас}$ – **намагниченность насыщения**), получается максимальная петля гистерезиса. Иначе получаются подобные петли гистерезиса, но как бы вписанные в нее, рис. 16.3.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая **точкой Кюри** T_C , при которой он теряет свои ферромагнитные свойства. При нагревании выше точки Кюри ферромагнетик превращается в обычный парамагнетик, рис. 16.1. Отметим, что физическую природу ферромагнетизма удалось понять только с помощью квантовой физики.

Тема 17. Явление электромагнитной индукции

17.1. Опыты Фарадея. Правило Ленца

Рассмотрим опыты М. Фарадея (1831), в которых было открыто **явление электромагнитной индукции**. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при *изменении потока магнитной индукции*, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, получивший название **индукционного**.

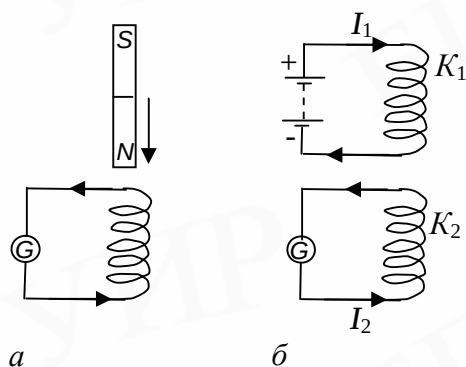


Рис. 17.1. Опыты М. Фарадея:
а – в соленоиде индуцируется ЭДС при относительном движении магнита и соленоида; б – в катушке K_2 возникает ток при изменении тока в катушке K_1 или при перемещении катушек относительно друг друга

Опыт 1. Соленоид подключен к гальванометру. Если в соленоид вдвигать (или выдвигать) постоянный магнит, то в моменты вдвигания (или выдвигания) наблюдается отклонение стрелки гальванометра, т.е. в соленоиде индуцируется электродвижущая сила (ЭДС), рис. 17.1, а. Направления отклонения стрелки при вдвигании и выдвигании противоположны. Если постоянный магнит развернуть так, чтобы полюса поменялись местами, то и направление отклонения стрелки изменится на противоположное. Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно соленоида.

Такой же эффект будет, если постоянный магнит оставить неподвижным, а относительно него перемещать соленоид.

Опыт 2. Один соленоид (K_1) подключен к источнику тока. Другой соленоид (K_2) подключен к гальванометру, рис. 17.1, б. Отклонение стрелки гальванометра наблюдается в моменты *включения* или *выключения* тока, в моменты его *увеличения* или *уменьшения* в катушке K_1 или при *перемещении* катушек друг относительно друга. При включении и выключении стрелка отклоняется в разные стороны, т.е. знак индуцированной ЭДС в этих случаях различен.

Возникновение индукционного тока в опытах Фарадея указывает на наличие в цепи электродвижущей силы. Эта ЭДС называется **электродвижущей силой электромагнитной индукции (ЭДС индукции)** e_i .

Основные свойства индукционного тока:

1. Возникает всегда, когда происходит *изменение* магнитного потока через площадь, ограниченную контуром.
2. Не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь *скоростью его изменения*.

Открытие явления электромагнитной индукции показало:

- взаимосвязь между электрическим и магнитным полем;
- возможность получения электрических токов с помощью магнитного поля.

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в *энергию электрического тока*. В основе принципа работы электродвигателей лежит данное явление.

Направление индукционного тока (а значит, и знак e_i) определяется **по правилу Ленца**: при всяком *изменении* магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в контуре возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающего ЭДС индукции.

Правило Ленца выражает существенный физический факт — стремление системы противодействовать изменению ее состояния (*электромагнитная инерция*).

17.2. Закон электромагнитной индукции.

Полный магнитный поток (потокосцепление). Токи Фуко

Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея):

ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром:

$$e_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (17.1)$$

Для замкнутого контура суммарный магнитный поток Φ сквозь поверхность, натянутую на такой контур, – это *потокосцепление* Ψ данного контура (**полный магнитный поток**). Поэтому в электротехнике закон Фарадея часто записывают в форме

$$e_i = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (17.1a)$$

Единица ЭДС электромагнитной индукции в СИ – вольт (В).

При скорости изменения магнитного потока 1 Вб/с в контуре индуцируется ЭДС, равная 1 В.

Знак минус в законе Фарадея (17.1) связан с определенным правилом знаков:

- знак магнитного потока Φ определяется выбором нормали к поверхности S , ограниченной рассматриваемым контуром;
- знак ЭДС индукции e_i – выбором положительного направления обхода по контуру. Направление нормали n к поверхности S и положительное направление обхода контура связаны друг с другом *правилом правого винта*, рис. 17.2.

Поэтому, произвольно выбирая направление нормали, мы определяем

знак потока Φ и знак ЭДС, а также направление индукционного тока.

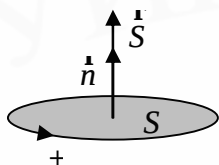


Рис. 17.2. Правило правого винта, связывающее направление нормали $\vec{n}$ и положительное направление обхода контура

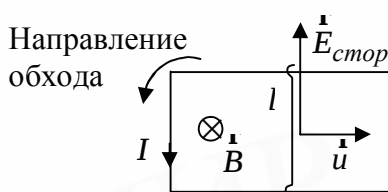


Рис. 17.3. К определению e_i в случае, когда контур движется в постоянном магнитном поле $\vec{B}$

Контур движется в постоянном магнитном поле. Рассмотрим контур с подвижной перемычкой длиной l , рис. 17.3. Пусть он находится в однородном стационарном магнитном поле, перпендикулярном плоскости контура и направленном за плоскость рисунка. Начнем двигать перемычку вправо со скоростью $\vec{u}$. Вместе с перемычкой начнут двигаться и все находящиеся в ней свободные электроны.

В результате на электроны действует вдоль перемычки магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F} = -e[\vec{u}, \vec{B}]$, и электроны начнут перемещаться по перемычке вниз – потечет ток I , направленный вверх. Это и есть индукционный ток. Перераспределившиеся заряды (на поверхности проводников) создадут электрическое поле, которое возбудит ток и в остальных участках контура. Сила $\vec{F}$ неэлектростатической природы является сторонней силой (см. подтему 14.3). Ей соответствует поле $\vec{E}_{стор} = \vec{F}/(-e)$.

Циркуляция вектора $\vec{E}_{стор}$ по контуру дает по определению величину ЭДС индукции, и получаем в данном случае, что

$$e_i = \oint \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l} = uBl. \quad (17.2)$$

Контур неподвижен (наведение вихревого электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ переменным магнитным полем $\vec{B}(\vec{r}, t)$). Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в случае неподвижного контура, находящегося в переменном магнитном поле. Опыты показывают, что ЭДС индукции не зависит от рода вещества проводника, от состояния проводника, в частности, от его температуры, которая может быть неодинаковой вдоль проводника.

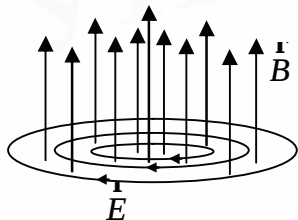


Рис. 17.4. Пример вихревого электрического поля

Дж. Максвелл для объяснения ЭДС индукции в неподвижных проводниках предположил, что *переменное магнитное поле* возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. На рис. 17.4 приведен пример вихревого электрического поля, возникающего при *возрастании* магнитного поля.

Электрическое поле, возбуждаемое изменениями магнитного поля, имеет *замкнутые силовые линии*, т.е. представляет собой вихревое поле. **Вихревое электрическое поле $\vec{E}$** не является электростатическим. Такое поле вызывает в

проводнике движение электронов по замкнутым траекториям и приводит к возникновению ЭДС в неподвижном контуре при изменении во времени магнитного поля – *сторонними силами* являются силы вихревого электрического поля.

Циркуляция $\dot{\mathbf{E}}$ этого вихревого поля по любому неподвижному контуру L проводника представляет собой ЭДС электромагнитной индукции

$$e_i = \oint_L \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (17.3)$$

В выражении (17.3) операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами, так как контур L и поверхность S неподвижны. Поскольку контур и натянутая на него поверхность неподвижны, то в уравнении используется символ частной производной по времени $(\partial/\partial t)$.

Рассмотрев выше два принципиально разных случая возникновения индукционных токов в проводнике, можно доказать, что закон Фарадея (17.1) для твердых тел с электронной (или дырочной) проводимостью возможно представить в виде

$$e_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_L (\dot{\mathbf{E}} + [\mathbf{u}, \mathbf{B}]) \cdot d\mathbf{l}. \quad (17.4)$$

В отличие от закона (17.1) выражение (17.4) справедливо только в квазистационарном приближении при достаточно медленных изменениях во времени переменного электромагнитного поля. Полная производная по времени от магнитного потока в (17.4) учитывает его изменения, связанные как с изменением поля $\dot{\mathbf{B}}$ во времени, так и с движением (деформацией) проводящего контура.

Токи Фуко. Индукционные токи возникают не только в линейных проводниках, но и в *массивных сплошных проводниках*, помещенных в переменное магнитное поле, или при движении тел в неоднородном магнитном поле. Эти токи замкнуты в толще проводника и называются **токами Фуко**.

Токи Фуко также подчиняются правилу Ленца: их магнитное поле направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующему вихревые токи. Значительное число машин и приборов основано на действии сил Ампера на токи Фуко. Эти токи могут достигать очень большой силы, что и используют, например, в некоторых тормозных системах, поскольку массивные проводники тормозятся в магнитном поле. Отметим, что вихревые токи вызывают сильное нагревание проводников.

Взаимодействие вихревых токов с высокочастотным магнитным полем приводит к неравномерному распределению магнитного потока по сечению магнитопроводов – вытеснение магнитного потока из объема в приповерхностные области проводника. Это явление называется **магнитным скин-эффектом**.

Вихревые токи возникают и в самом проводнике, по которому течет переменный ток, что приводит к неравномерному распределению тока по сечению проводника – вытеснение токов высокой частоты в приповерхностные области проводника. Это явление называется **электрическим скин-эффектом**.

17.3. Явление самоиндукции. Индуктивность. ЭДС самоиндукции. Индуктивность соленоида

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда изменяется магнитный поток сквозь контур. При этом не имеет значения, чем вызывается это изменение потока.

Самоиндукция – это явление наведения вихревых электрических полей в проводящих телах при изменении токов в этих же телах или их деформациях. В случае самоиндукции ЭДС e_s – электродвижущая сила самоиндукции – в контуре (электрической цепи) наводится магнитным полем, создаваемым переменным током в той же цепи. При этом магнитное поле всегда существенно изменяется от точки к точке нормального сечения провода.

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает магнитное поле, индукция которого по закону Био-Савара-Лапласа пропорциональна току. Поэтому сцепленный с контуром магнитный поток пропорционален току в контуре

$$\Psi = LI, \quad (17.5)$$

где коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью контура.

Формула (17.5) справедлива только для достаточно тонких проводников. Отметим, что магнитный поток Ψ создается самим током I . Поэтому по правилу правого винта векторы $\vec{B}$ и $\vec{S}$ всегда направлены в одну сторону и, следовательно, $\Psi > 0$. Поэтому индуктивность L является положительной величиной.

Индуктивностью (собственной индуктивностью) замкнутого проводящего контура называется скалярная величина L , равная отношению потоко-сцепления контура к силе тока в этом контуре.

Индуктивность контура в общем случае зависит только от формы и размеров контура и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится. Если контур жесткий и поблизости нет ферромагнетиков, индуктивность – постоянная величина, не зависящая от силы тока I .

Единица индуктивности в СИ – генри (Гн).

Согласно выражению (17.5) индуктивностью 1 Гн обладает контур, магнитный поток сквозь который при токе 1 А равен 1 Вб, значит $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А}$.

Индуктивность соленоида, содержащего N витков, пренебрегая краевыми эффектами, записывается как

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi_1}{I} = \frac{nl \times BS}{I} = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (17.6)$$

где Φ_1 – магнитный поток через один виток соленоида; V – объем соленоида; n – число витков на единицу его длины; μ – магнитная проницаемость вещества внутри соленоида.

При изменении силы тока в контуре согласно закону Фарадея (17.1а) возникает **ЭДС самоиндукции** e_s :

$$e_s = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d}{dt}(LI). \quad (17.7)$$

Если при изменении тока индуктивность L остается постоянной (не меняется конфигурация контура и нет ферромагнетиков), то

$$e_s = -L \frac{dI}{dt} \quad (17.8)$$

В формуле (17.8) знак минус показывает, что e_s всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока в соответствии с правилом Ленца. В явлениях самоиндукции ток обладает «инерцией», потому что эффекты индукции стремятся сохранить магнитный поток постоянным, точно так же, как механическая инерция стремится сохранить скорость тела неизменной.

17.4. Ток при замыкании и размыкании цепи

При всяком изменении силы тока в проводящем контуре возникает ЭДС самоиндукции, в результате чего в контуре появляются дополнительные токи, называемые *экстратоками самоиндукции*. Установление тока при замыкании цепи, а также убывание тока при размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно и зависит от индуктивности цепи, рис. 17.5.

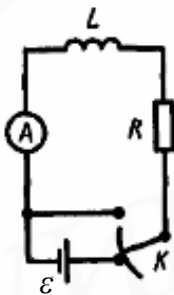


Рис. 17.5. Схема опыта, позволяющего наблюдать явление самоиндукции при замыкании и размыкания постоянного тока

Пусть в цепи сопротивлением R и индуктивностью L под действием внешней ЭДС ε (внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало) течет постоянный ток $I_0 = \varepsilon/R$, рис. 17.5. В момент времени $t = 0$ выключим источник тока. Возникает ЭДС самоиндукции. Экстраток размыкания будет препятствовать уменьшению тока. Согласно уравнению (17.8) $e_s = -L \frac{dI}{dt}$. Ток в цепи определяется законом Ома $IR = e_s$, т.е.

$$IR = -L \frac{dI}{dt}$$

Разделяем переменные последнего уравнения

$$\frac{dI}{I} = - \frac{Rdt}{L}$$

и интегрируем по I (от I_0 до I) и по t (от 0 до t):

$$\ln \frac{I}{I_0} = - \frac{Rt}{L} \quad \text{или} \quad \boxed{I = I_0 \cdot e^{-t/\tau}}, \quad (17.9)$$

где $\tau = L/R$ – постоянная, называемая **временем релаксации** – время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз.

Таким образом, при выключении источника тока сила тока убывает по экспоненциальному закону. Чем больше значение τ , тем медленнее спадает ток. На рис. 17.6 показан график убывания силы тока $I(t)$ со временем (кривая 1).

Оценим значение ЭДС самоиндукции при мгновенном увеличении сопротивления от R_0 до R :

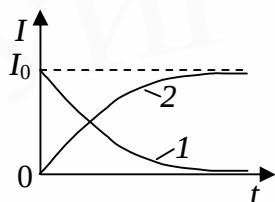


Рис. 17.6. График зависимости силы тока I от времени t в цепи, изображенной на рис. 17.5. Кривые 1 и 2 соответствуют случаям размыкания и замыкания цепи

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) = \frac{e}{R_0} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right),$$

откуда

$$e_S = -L \frac{dI}{dt} = \frac{R}{R_0} e \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right).$$

Поэтому при резком размыкании контура ($R \gg R_0$) ЭДС самоиндукции может во много раз превысить ε батареи, что может привести к *пробою изоляции* и выводу из строя измерительных приборов.

При замыкании цепи кроме внешней ЭДС ε возникает ЭДС самоиндукции $e_S = -L \frac{dI}{dt}$ и соответствующий экстраток замыкания, препятствующий возрастанию тока, рис. 17.5. Используем закон Ома и запишем дифференциальное уравнение

$$IR = e + e_S = e - L \frac{dI}{dt}.$$

Можно показать, что решение этого уравнения имеет вид

$$I = I_0 (1 - \exp(-t/\tau)), \quad (17.10)$$

где $I_0 = e/R$ — установившийся ток в цепи (при $t \rightarrow \infty$); $\tau = L/R$ — **время установления тока**. Таким образом, при включении источника тока сила тока возрастает по экспоненциальному закону, рис. 17.6, кривая 2.

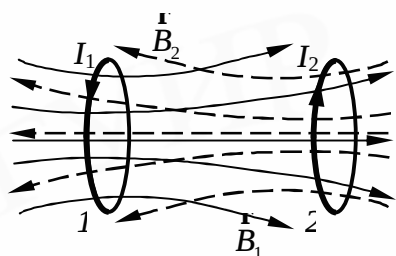


Рис. 17.7. Явление взаимной индукции

Взаимной индукцией называется явление возбуждения ЭДС электромагнитной индукции в одной электрической цепи при изменении электрического тока в другой цепи или при изменении взаимного расположения этих двух цепей.

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2 с токами I_1 и I_2 , расположенных достаточно близко друг от друга, рис. 17.7. Пусть вблизи контуров нет ферромагнетиков (см. подтему 16.3).

При изменении силы тока в одном из контуров в другом индуцируется **ЭДС взаимной индукции**

$$e_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad \text{и} \quad e_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad (17.11)$$

где Φ_{21} — магнитный поток, который создает ток I_1 через контур 2; Φ_{12} — магнитный поток, который создает ток I_2 через контур 1; L_{21} и L_{12} — **взаимные индуктивности** контуров. При отсутствии ферромагнетиков $L_{12} = L_{21} = L$ (**теорема взаимности**). Коэффициенты L_{12} и L_{21} не зависят от токов, а зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Выражаются эти коэффициенты в тех же единицах, что и индуктивность L .

17.5. Энергия контура с током. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля

Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружен магнитным полем. Магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока. Магнитное поле, подобно электрическому, является носителем энергии. *Энергия магнитного поля* равна работе, которую затрачивает ток на создание этого поля.

Рассмотрим контур индуктивностью L , по которому течет ток I . С данным контуром сцеплен магнитный поток $\Psi = LI$. Будем считать, что ферромагнетики отсутствуют. Пусть ток в цепи увеличивается с быстротой $\frac{dI}{dt}$.

При изменении тока в замкнутой цепи в ней возникает ЭДС самоиндукции. Работа по перемещению заряда dq против этой ЭДС идет на изменение энергии тока

$$dA = -e_s dq = L \frac{dI}{dt} dq = L \frac{dq}{dt} dI = LI dI = dW,$$

где dW – работа, которая необходима для увеличения силы тока в цепи от значения I до $I+dI$. Полная работа, необходимая для установления тока I , равна

$$W = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (17.12)$$

Выражение (17.12) определяет энергию, запасаемую контуром с током. Поэтому W называется **энергией контура с током** (*собственной энергией тока*). Эта энергия также является энергией магнитного поля, созданного током I , текущим по проводнику с индуктивностью L .

На примере однородного магнитного поля внутри длинного *соленоида* выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие это поле в окружающем пространстве. Искажением поля на торцах соленоида будем пренебрегать. Индуктивность соленоида согласно уравнению (17.6) вычисляется как $L = m_0 m \frac{N^2 S}{l}$. Отсюда

$$W = \frac{1}{2} m_0 m \frac{N^2 I^2}{l} S. \quad (17.13)$$

Магнитная индукция поля соленоида, как было получено ранее (см. формулу (15.18)), равна $B = \frac{m_0 m N I}{l}$. Следовательно, $I = \frac{Bl}{m_0 m N}$.

По определению вектора напряженности магнитного поля (16.11)

$$B = m_0 m H.$$

Используем эти последние соотношения и получим

$$W = \frac{B^2}{2m_0 m} V = \frac{BH}{2} V, \quad (17.14)$$

где $Sl = V$ – объем соленоида. Эта формула справедлива для однородного поля, заполняющего объем V .

Можно доказать, что в случае отсутствия ферромагнетика энергию W можно выразить определить как

$$W = \int \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} dV. \quad (17.15)$$

Подынтегральное выражение в формуле (17.15) – это энергия, заключенная в элементе объемом dV . Отсюда следует, что магнитная энергия локализована в пространстве, занимаемом магнитным полем.

Полную **энергию** любого **магнитного поля**, заключенного в произвольном объеме V , определяют по формуле

$$W = \int_V w_m dV, \quad (17.16)$$

где $w_m = \int \vec{H} d\vec{B}$ – **плотность энергии магнитного поля**, т.е. энергия единицы объема ($\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$). Это выражение справедливо в случае неферромагнитной среды.

Магнитное поле длинного соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия заключена в объеме соленоида и распределена в нем с постоянной **объемной плотностью энергии магнитного поля**

$$w_m = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 m H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (17.17)$$

Отметим, что формула (17.17), как и выражение (17.16), справедлива, когда μ не зависит от H , т.е. в случае неферромагнитных сред.

Можно доказать, что энергия N связанных друг с другом контуров (в отсутствие ферромагнетиков) определяется так:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N L_{ik} I_i I_k, \quad (17.18)$$

где $L_{ik} = L_{ki}$ – взаимная индуктивность i -го и k -го контуров; $L_{ii} = L_i$ – индуктивность i -го контура.

Тема 18. Электромагнитные колебания

18.1. Квазистационарные токи. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления

Когда происходят электрические колебания, ток в цепи изменяется во времени и, вообще говоря, в каждый момент ток оказывается не одинаковым на разных участках цепи (из-за того, что электромагнитные возмущения распространяются хотя и с очень большой, но конечной скоростью).

Однако имеется много случаев, когда мгновенные значения тока оказываются практически одинаковыми на всех участках цепи. Такой переменный ток называют **квазистационарным**. Для этого все изменения во времени должны происходить настолько медленно, чтобы распространение электромагнитных возмущений можно было считать *мгновенным*.

Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью, равной скорости света. Если l – длина цепи, то на прохождение длины l электромагнитное возмущение затрачивает время порядка $\tau = l/c$.

Для периодически изменяющихся токов **условие квазистационарности** будет выполнено, если

$$t = l/c \ll T,$$

где T – период изменений. Например, для цепи длиной $l = 3$ м время $\tau = 10^{-8}$ с и токи можно считать квазистационарными вплоть до частот 10^6 Гц ($T = 10^{-6}$ с).

В данной теме будем предполагать, что условие квазистационарности выполняется, и токи будем считать квазистационарными. Это позволит использовать формулы, полученные в статических полях. Например, тот факт, что мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома.

Электрическим колебательным контуром называется электрическая цепь, содержащая конденсатор емкости C , катушку индуктивности L и резистор с сопротивлением R , в которой могут возбуждаться электрические колебания, рис. 18.1.

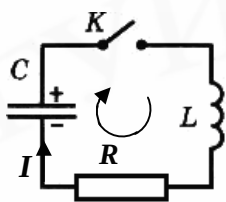


Рис. 18.1. Пример электрического колебательного контура

Сопротивление проводников цепи R принято называть **активным сопротивлением**.

Если к электрическому контуру не подключены никакие внешние источники переменной ЭДС, то при замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора емкости C в контуре возникают **собственные колебания**. В ходе процесса периодически изменяются *заряд* на обкладках конденсатора, величины *напряжения* и *тока* в цепи.

Применим правило Кирхгофа для контура на рис. 18.1:

$$IR + U_C = e_s, \quad (18.1)$$

где $U_C = q/C$ и q – соответственно напряжение на конденсаторе и заряд кон-

денсатора; $e_S = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$ – ЭДС самоиндукции в катушке.

Знак силы квазистационарного тока I ($I = \frac{dq}{dt}$) совпадает со знаком dq , выбранное положительное направление тока соответствует уменьшению (положительного) заряда конденсатора. Колебательный контур на рис. 18.1 описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка вида

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (18.2)$$

В контуре при отсутствии сопротивления проводников ($R = 0$) будут совершаться строго периодические колебания – **свободные незатухающие колебания**. *Дифференциальное уравнение свободных гармонических электрических колебаний:*

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (18.2a)$$

Циклическая частота ω_0 (**собственная частота** контура) и **период** T_0 колебаний определяются параметрами контура и удовлетворяют формулам

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (18.3)$$

Уравнение (18.3) для T_0 называется **формулой Томсона**.

Заряд q конденсатора и сила тока I в контуре изменяются по законам

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + j_0), \quad (18.4)$$

$$I = -I_m \sin(\omega_0 t + j_0) = I_m \cos(\omega_0 t + j_0 + \pi/2), \quad (18.5)$$

где q_m – амплитуда заряда; $I_m = \omega_0 q_m = q_m/\sqrt{LC}$ – амплитуда силы тока; φ_0 – начальная фаза колебаний заряда q . Значения q_m и φ_0 определяются начальными условиями.

Ток в контуре отстает по фазе от заряда конденсатора на $\pi/2$. Напряжение на конденсаторе $U_C = j_2 - j_1$, определяемое как разность потенциалов обкладок конденсатора, также изменяется по гармоническому закону и совпадает по фазе с зарядом q :

$$U_C = U_m \cos(\omega_0 t + j_0), \quad (18.6)$$

где $U_m = q_m/C$ – амплитуда напряжения, равная начальному напряжению на конденсаторе. Амплитуда тока может быть записана как

$$I_m = \frac{q_m}{\sqrt{LC}} = \frac{U_m}{\sqrt{L/C}}. \quad (18.7)$$

Соотношение (18.7) между I_m и U_m по форме подобно закону Ома (14.11) для однородного участка цепи постоянного тока, поэтому величину $\sqrt{L/C}$ называют **волновым сопротивлением** колебательного контура.

Гармонические (незатухающие) свободные колебания сопровождаются взаимными превращениями энергии W_e электрического поля конденсатора и энергии W_m магнитного поля катушки индуктивности:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + j_0), \quad (18.8)$$

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + j_0). \quad (18.9)$$

Колебания, происходящие в электрическом колебательном контуре, часто называют **электромагнитными колебаниями** в контуре.

Значения W_e и W_m изменяются при гармонических колебаниях в пределах от 0 до максимальных значений, соответственно равных $q_m^2/(2C)$ и $LI_m^2/2$. Колебания W_e и W_m сдвинуты по фазе: в те моменты времени, когда $W_e = 0$, $W_m = LI_m^2/2$ и, наоборот, когда $W_m = 0$, то $W_e = q_m^2/(2C)$. Полная энергия электромагнитных колебаний в контуре не изменяется с течением времени

$$W(t) = W_e(t) + W_m(t) = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} = \text{const}. \quad (18.10)$$

18.2. Свободные затухающие электрические колебания

Когда колебательный контур содержит последовательно соединенные конденсатор C , катушку индуктивности L и активное сопротивление R , рис. 18.1, то его уравнение (18.2) может быть записано как

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (18.11)$$

где $2b = R/L$. Величину β называют **коэффициентом затухания**. В этом случае, поскольку $R \neq 0$, свободные колебания в контуре будут **затухающими**.

При затухающих свободных колебаниях кроме *взаимных превращений* энергии электрического и магнитного полей будет происходить *преобразование* части энергии в джоулево тепло на активном сопротивлении R . Поэтому энергия, запасенная в реальном контуре, постепенно расходуется на нагревание.

Можно показать, что при $\beta < \omega_0$ решение однородного дифференциального уравнения (18.11) имеет вид

$$q = q_m e^{-bt} \cos(\omega t + j_0), \quad (18.12)$$

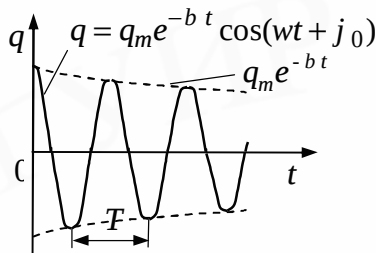


Рис. 18.2. График свободных затухающих электрических колебаний

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ — частота затухающих колебаний; q_m и φ_0 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. График функции (18.12) показан на рис. 18.2. Эта функция определяет затухающие колебания и является непериодической.

Множитель $q_m e^{-bt}$ в уравнении (18.12) называют **амплитудой затухающих колебаний**, см. штриховую линию на рис. 18.2.

Величину $T = 2\pi/\omega$ называют **периодом затухающих колебаний**:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (b/\omega_0)^2}}, \quad (18.13)$$

где T_0 – период свободных незатухающих колебаний (см. формулу (18.3)).

Зная зависимость $q(t)$, можно найти напряжение на конденсаторе и ток в контуре. Напряжение на конденсаторе определяется как

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-b t} \cos(\omega t + j_0). \quad (18.14)$$

Ток в контуре

$$I = \omega q_m e^{-b t} \cos(\omega t + j_0 + d), \quad (18.15)$$

где угол d ($p/2 < d < p$) такой, что

$$-b/\omega_0 = \cos d \text{ и } \omega/\omega_0 = \sin d.$$

Это означает, что при наличии активного сопротивления R колебания тока в контуре опережают по фазе колебания заряда на конденсаторе (18.12) (или напряжения (18.14) конденсатора) более чем на $\pi/2$. Заметим, что при $R = 0$ опережение $\delta = \pi/2$.

Графики функций $U_C(t)$ и $I(t)$ аналогичны зависимости $q(t)$ на рис. 18.2.

Рассмотрим величины, характеризующие затухание:

1. **Время релаксации** τ – это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз, определяется коэффициентом затухания b :

$$\tau = 1/b. \quad (18.16)$$

2. **Логарифмический декремент затухания** λ определяется как натуральный логарифм отношения двух значений амплитуд, взятых через период колебания T :

$$l = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = bT = \frac{1}{N_e}, \quad (18.17)$$

где A – амплитуда соответствующей величины (q, U, I); N_e – число колебаний за время τ . Если затухание мало ($b \ll \omega_0$), то $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и

$$l \gg b \frac{2p}{\omega_0} = p R \sqrt{C/L}. \quad (18.17a)$$

3. По определению (7.28) **добротность** Q колебательного контура равна

$$Q = \frac{p}{l} = p N_e.$$

Чем меньше затухание, тем больше Q . При малых затуханиях ($b \ll \omega_0$) согласно формуле (18.17a) добротность вычисляется так:

$$Q \gg \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (18.18)$$

Также в случае слабого затухания справедлива следующая формула для Q :

$$Q \gg 2p \frac{W}{dW}, \quad (18.18a)$$

где W – энергия, запасенная в контуре; δW – уменьшение этой энергии за период колебания T ; dW/W – относительное уменьшение энергии за период.

При $b \approx \omega_0$ вместо колебаний будет происходить **апериодический разряд конденсатора**. Активное сопротивление контура, при котором наступает апе-

риодический процесс, называют **критическим**

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (18.19)$$

18.3. Вынужденные электрические колебания

Для осуществления **вынужденных колебаний** в электрическом колебательном контуре в него нужно включить источник электрической энергии, рис. 18.3, ЭДС которого изменяется с течением времени по гармоническому закону:

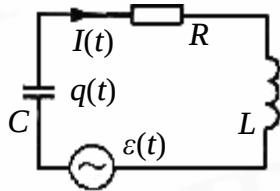


Рис. 18.3. Колебательный контур с внешней переменной ЭДС ε

$$e = e_m \cos \omega t. \quad (18.20)$$

В электротехнике источник электрической энергии, характеризующийся ЭДС и внутренним электрическим сопротивлением r , называется **источником ЭДС (источником напряжения)**.

Если внутреннее сопротивление r источника ЭДС считается пренебрежимо малым по сравнению с R , то такой источник ЭДС называется **идеальным**.

Уравнение колебательного контура, содержащего последовательно соединенные конденсатор C , активное сопротивление R , катушку индуктивности L и внешнюю переменную ЭДС ε , в сравнении с формулой (18.1) имеет вид

$$RI + U_C = e + e_s.$$

Тогда **уравнение вынужденных колебаний** записывается так:

$$L \ddot{q} + 2b\dot{q} + w_0^2 q = e/L = (e_m/L) \cos \omega t, \quad (18.21)$$

где β – коэффициент затухания; w_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний (при $R = 0$).

Решением этого дифференциального уравнения, как известно, является сумма общего решения однородного уравнения (без правой части), которое экспоненциально затухает, и частного решения неоднородного уравнения.

Рассмотрим только установившиеся вынужденные колебания, т.е. частное решение уравнения (18.21), имеющее вид

$$q = q_m \cos(\omega t - y), \quad (18.22)$$

где q_m – амплитуда заряда на конденсаторе; y – разность фаз между колебаниями заряда и внешней ЭДС ε (18.20):

$$q_m = \frac{e_m/L}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4b^2 w^2}}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{2bw}{w_0^2 - w^2}. \quad (18.23)$$

В уравнениях (18.23) $w = \sqrt{w_0^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, так как $w_0^2 = \frac{1}{LC}$ и $b = \frac{R}{2L}$. С учетом последних равенств запишем

$$q_m = \frac{e_m}{w \sqrt{\left(wL - \frac{1}{wC} \right)^2 + R^2}}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{R}{\frac{1}{wC} - wL}. \quad (18.23a)$$

Величины q_m и ψ определяются только свойствами самого контура и вынуждающей ЭДС ε , причем $\psi > 0$. Поэтому q всегда отстает по фазе от ε .

Для силы тока в контуре при установившихся колебаниях запишем

$$I = -w q_m \sin(wt - y) = w q_m \cos(wt - y + p/2) = I_m \cos(wt - j), \quad (18.24)$$

где амплитуда тока $I_m = w q_m = e_m / Z$; $j = y - p/2$ – сдвиг по фазе между током и внешней ЭДС e . Величина Z называется **полным электрическим сопротивлением** (импедансом) цепи:

$$Z = \sqrt{\left(wL - \frac{1}{wC} \right)^2 + R^2} = \sqrt{X^2 + R^2},$$

где X – реактивное сопротивление цепи; $X_C = 1/(wC)$ – емкостное сопротивление цепи; $X_L = wL$ – индуктивное сопротивление цепи.

В контуре с внешней ЭДС возможны резонансы напряжений, токов и зарядов. Резонансные кривые для силы тока $I_m(w)$ и для заряда на конденсаторе $q_m(w)$ показаны на рис. 18.4, где $w_{\text{рез}} = w_0 = 1/\sqrt{LC}$. Как видно на рис. 18.4, а, чем меньше R , тем меньше β и больше Q , и при прочих равных условиях тем больше и «острее» максимум при резонансе. Чем больше добротность осциллятора, тем уже резонансная кривая.

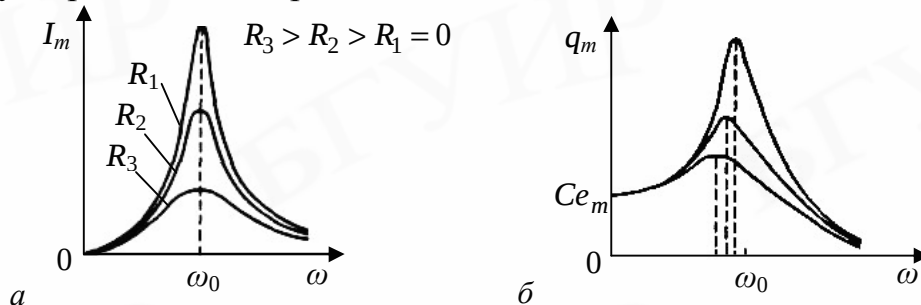


Рис. 18.4. Резонансные кривые:

a – зависимость силы тока I_m в колебательном контуре от частоты ω ;

б – зависимость заряда q_m на обкладках конденсатора от частоты ω

Переменным током называются вынужденные колебания тока в цепи, совпадающие с частотой вынуждающей ЭДС. Описанные выше установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание переменного тока в цепи с C , L , R , обусловленное **переменным напряжением**:

$$U = U_m \cos w t. \quad (18.25)$$

Протекающий ток изменяется по закону (18.24) и, следовательно, он отстает по фазе от напряжения на φ . Исходное уравнение (18.21) можно записать иначе:

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos w t, \quad (18.26)$$

где $U_R = RI$, $U_C = \frac{q}{C}$, $U_L = L \frac{dI}{dt}$. Таким образом, сумма падений напряжения на отдельных элементах контура в каждый момент времени равна напряжению, приложенному извне.

Рассмотрим, как соотносятся U и I на элементах контура для сопротивления R (U_R), конденсатора C (U_C) и катушки L (U_L):

$$U_R = RI_m \cos(\omega t - j) = U_{Rm} \cos(\omega t - j), \quad (18.27)$$

$$U_C = I_m / (\omega C) \cos(\omega t - j - p/2) = U_{Cm} \cos(\omega t - j - p/2), \quad (18.28)$$

$$U_L = \omega LI_m \sin(\omega t - j) = U_{Lm} \cos(\omega t - j + p/2). \quad (18.29)$$

Сопоставив формулы (18.27) – (18.29), можно сделать вывод:

напряжение на емкости U_C отстает по фазе от силы тока на $p/2$, напряжение на индуктивности U_L – опережает на $p/2$, а напряжение на активном сопротивлении U_R совпадает по фазе с током.

Следовательно, понятие *добротности* показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе может превысить приложенное извне напряжение:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{(U_{Cm})_{рез}}{U_m}. \quad (18.30)$$

Это свойство контуров настраиваться на резонансное напряжение используют для выделения из сложного напряжения нужной составляющей подбором C и L . Так делается при настройке радиоприемников, когда необходимо добиться совпадения собственной частоты колебательного контура приемника с частотой электромагнитных волн, излучаемых радиостанцией. Отметим, что, например, обычные радиоконтуров обладают добротностью $Q \sim 10 - 10^2$, для пьезоэлектрической пластинки $Q \sim 2 \cdot 10^4$ на частоте 20 кГц.

Тема 19. Уравнения Максвелла

19.1. Вихревое электрическое поле. Электромагнитное поле. Ток смещения

Для объяснения возникновения индукционного тока в неподвижных проводниках Дж. К. Максвелл предположил, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре (**первое основное положение теории Максвелла**).

Циркуляция вектора напряженности $\vec{E}$ вихревого поля, как было ранее получено в подтеме 17.2 (см. формулу (17.3)), не равна нулю, т.е. электрическое поле $\vec{E}$, возбуждаемое переменным магнитным полем, как и само *магнитное поле*, является **вихревым**:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (19.1)$$

В общем случае суммарное электрическое поле складывается из электрического поля, создаваемого неподвижными зарядами, и вихревого электрического поля. Поскольку циркуляция электростатического поля равна нулю, то циркуляция суммарного поля определяется как

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (19.2)$$

Уравнение Максвелла (19.2) для электромагнитного поля (обобщение закона электромагнитной индукции для неподвижного замкнутого проводящего контура в переменном магнитном поле) формулируется так:

циркуляция вектора $\vec{E}$ напряженности электрического поля по произвольно-му неподвижному замкнутому контуру L равна взятой с обратным знаком *скорости изменения магнитного потока* через поверхность S , натянутую на этот контур (или, что тоже самое, равна взятому с обратным знаком потоку вектора $\partial \vec{B} / \partial t$ через вышеуказанную поверхность S).

Из векторного анализа согласно **теореме Стокса** можно записать, что

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (19.3)$$

Из сопоставления уравнений (19.2) и (19.3) следует, что

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (19.3a)$$

Выражение (19.3a) является **уравнением Максвелла** (19.2) в **дифференциальной форме**.

Ток смещения. Максвелл предположил, что аналогично магнитному полю всякое изменение электрического поля вызывает в окружающем пространстве вихревое магнитное поле (**второе основное положение теории Максвелла**).

Известно, что *ток проводимости* $I = \int_S \dot{\mathbf{j}} \cdot d\mathbf{S}$ (14.4) обусловлен движением

заряженных частиц. Для количественной характеристики «магнитного действия» переменного электрического поля Максвелл ввел понятие тока смещения (1865), равнозначного по своему магнитному действию обычному электрическому току. Токи смещения существуют лишь там, где меняется со временем электрическое поле. Как и переменный ток проводимости, ток смещения создает переменное магнитное поле.

Вектор **плотности тока смещения** в данной точке пространства равен скорости изменения во времени вектора электрического смещения в этой точке

$$\mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (19.4)$$

где $\mathbf{D}$ – вектор электрического смещения ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ в диэлектриках (13.12)).

Током смещения через произвольную поверхность S называется физическая величина, численно равная потоку вектора плотности тока смещения сквозь эту поверхность:

$$I_{см} = \int_S \mathbf{j}_{см} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (19.5)$$

Следует подчеркнуть, что ток смещения определяется производной вектора $\mathbf{D}$, но не самим вектором $\mathbf{D}$.

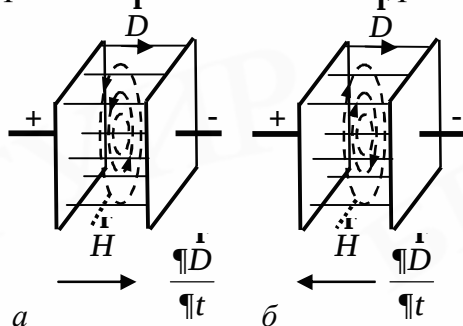


Рис. 19.1. Направление тока смещения в случае плоского конденсатора:
а – конденсатор заряжается;
б – конденсатор разряжается

Так, например, в поле плоского конденсатора вектор $\mathbf{D}$ всегда направлен от «положительной» пластины к «отрицательной». Но в случае если электрическое поле возрастает, то $\partial \mathbf{D} / \partial t$, а следовательно, и ток смещения направлены так, как показано на рис. 19.1, а. Если же электрическое поле убывает, то $\partial \mathbf{D} / \partial t$ направлено от «отрицательной» пластины к «положительной», и магнитное поле противоположно по сравнению с первым случаем, рис. 19.1, б.

Если в каком-либо проводнике имеется *переменный ток*, то внутри проводника существует *переменное электрическое поле*. Поэтому внутри проводника имеется и ток проводимости, и ток смещения, и магнитное поле проводника определяется суммой этих двух токов.

Максвелл ввел понятие **полного тока**, равного сумме токов проводимости и смещения. Вектор плотности полного тока равен

$$\mathbf{j}_{полн} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (19.6)$$

Линии переменного тока всюду замкнуты, как и линии постоянного тока. На концах проводников (цепей) обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (или в вакууме) между концами проводника «протекает» ток смеще-

ния, который замыкает ток проводимости, например между обкладками конденсатора в процессе его зарядки или разрядки.

Ток смещения обладает лишь одним физическим свойством: подобно обычным токам проводимости, он является источником вихревого магнитного поля, т.е. такого поля, циркуляция напряженности $\vec{H}$ которого по замкнутому контуру не равна нулю.

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ (16.8), используя понятие полного тока:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (19.7)$$

Уравнение Максвелла (19.7) для электромагнитного поля (обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$) формулируется так:

циркуляция вектора $\vec{H}$ напряженности магнитного поля по произвольному неподвижному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме макроточков и тока смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур.

Дифференциальная форма уравнения (19.7) имеет вид

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (19.7a)$$

т.е. ротор вектора $\vec{H}$ определяется плотностью тока проводимости $\vec{j}$ и тока смещения $\partial \vec{D} / \partial t$ в той же точке.

19.2. Уравнения Максвелла.

Относительность электрического и магнитного полей

В 60-х гг. XIX в. Дж. К. Максвелл, основываясь на идеях Фарадея об электрическом и магнитном полях, обобщил законы, установленные экспериментальным путем, и разработал **законченную теорию единого электромагнитного поля**. Впервые об уравнениях Максвелла было доложено на заседании Лондонского Королевского общества в 1864 г. Уравнения Максвелла функционально связывают электрические и магнитные поля с зарядами и токами в вакууме и сплошных средах и охватывают собой все известные закономерности макроэлектромагнетизма (классической макроскопической **электродинамики**).

Теория Максвелла представляет собой феноменологическую теорию электромагнитного поля. Это означает, что в ней не рассматриваются *молекулярное строение среды* и *внутренний механизм процессов*, происходящих в среде в электромагнитном поле. Электрические и магнитные свойства среды характеризуются тремя величинами: диэлектрической проницаемостью ϵ , магнитной проницаемостью μ и удельной электрической проводимостью σ .

Максвелл обобщил теорему Гаусса для электростатического поля (12.11). Он предположил, что она справедлива для любого электрического поля, как стационарного, так и переменного. Соответствующее уравнение Максвелла для электромагнитного поля (теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$ (13.14)) имеет вид

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V r dV, \quad (19.8)$$

где r – объемная плотность стороннего электрического заряда, непрерывно распределенного внутри замкнутой поверхности S .

Уравнение Максвелла (19.8) формулируется так:

поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ через произвольную неподвижную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Согласно теореме Остроградского (12.12) из векторного анализа **уравнение Максвелла (19.8) в дифференциальной форме** записывается как

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = r. \quad (19.8a)$$

Следующее **уравнение Максвелла** (теорема Гаусса для магнитного поля $\vec{B}$ (15.13)) показывает, что магнитный поток через произвольную неподвижную замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (19.9)$$

Уравнение Максвелла (19.9) в дифференциальной форме имеет вид

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (19.9a)$$

Таким образом, **полная система уравнений Максвелла** в неподвижных средах в интегральной форме включает четыре уравнения (19.2), (19.7), (19.8) и (19.9), связывающие векторные поля $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ между собой, с плотностью электрического заряда r и плотностью электрического тока $\vec{j}$:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, & \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \int_V r dV, & \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0. \end{aligned}$$

Эту систему необходимо дополнить **материальными уравнениями**, характеризующими электрические и магнитные свойства среды. В случае однородных изотропных несегнетоэлектрических и неферромагнитных сред и макротоков, подчиняющихся закону Ома, эти уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{стор}), \quad (19.10)$$

где ϵ_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные; ϵ и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости; σ – удельная электрическая проводимость вещества; $\vec{E}$ и $\vec{E}_{стор}$ – соответственно напряженности электрического поля и поля сторонних сил.

Из уравнений Максвелла следует:

- источниками электрического поля являются электрические заряды или изменяющиеся во времени магнитные поля;
- магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями;

— *переменное магнитное поле* всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а *переменное электрическое поле* всегда связано с порождаемым им магнитным, т.е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом — они образуют **единое электромагнитное поле**.

Для стационарных полей ($\dot{\vec{E}} = \text{const}$ и $\dot{\vec{B}} = \text{const}$) уравнения Максвелла имеют вид

$$\oint_L \dot{\vec{E}} d\vec{l} = 0, \quad \oint_S \dot{\vec{D}} d\vec{S} = q, \quad \oint_L \dot{\vec{H}} d\vec{l} = I, \quad \oint_S \dot{\vec{B}} d\vec{S} = 0. \quad (19.11)$$

В этом случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что позволяет изучать отдельно постоянное электрическое и магнитное поле.

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме состоит из уравнений (19.3а), (19.7а), (19.8а) и (19.9а), характеризующих поле в каждой точке пространства:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{D} &= r, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Данные уравнения не симметричны относительно электрического и магнитного полей, так как в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

В случае если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла — интегральная и дифференциальная — эквивалентны. Однако если имеются поверхности разрыва, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей. Отметим, что в отношении физических пределов применимости обе системы равнозначны.

Для того чтобы данные *уравнения Максвелла в дифференциальной форме* были справедливы и на границах сред, необходимо дополнить эти уравнения **граничными условиями** — соотношениями (13.17), (13.20), (16.13) и (16.13а), которые справедливы для постоянных и переменных полей

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t}$$

(уравнения (13.20) и (16.13а) выведены для случая, когда на границе раздела отсутствуют как свободные заряды, так и токи проводимости).

Все экспериментально регистрируемые электродинамические явления удовлетворяют принципу относительности. Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета и являются инвариантными относительно преобразований Лоренца. Отметим, что входящие в уравнения величины преобразуются по определенным правилам при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное имеет относительный характер и зависит от системы отсчета, в которой рассматриваются явления. Однако заряд любой частицы — релятивистски инвариантная величина, не зависящая от скорости частицы и выбора системы отсчета.

Тема 20. Электромагнитные волны

20.1. Волновое уравнение для электромагнитной волны. Основные свойства электромагнитной волны:

скорость, поперечность, связь между $\vec{E}$ и $\vec{H}$

Из уравнений Максвелла следует, что *электромагнитное поле* способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов. Взаимосвязанные колебания (изменения) электрического и магнитного полей, составляющих единое электромагнитное поле, называются *электромагнитными колебаниями*.

Электромагнитные волны – это электромагнитные колебания, распространяющиеся в пространстве с конечной скоростью. В вакууме они всегда распространяются со скоростью, равной скорости света c .

Именно присутствие *тока смещения* $\partial \vec{D} / \partial t$ наряду с величиной $\partial \vec{B} / \partial t$ и означает возможность появления электромагнитных волн. Всякое изменение во времени магнитного поля возбуждает поле электрическое, изменение же поля электрического в свою очередь возбуждает магнитное поле. За счет непрерывного взаимопревращения электромагнитное возмущение будет распространяться в пространстве.

Рассмотрим однородную изотропную нейтральную непроводящую среду

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (20.1)$$

где ϵ_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные; ϵ и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Используя уравнения Максвелла, можно показать, что **волновые уравнения** для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеют вид

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (20.2)$$

где $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Перечислим основные свойства электромагнитных волн, распространяющихся в изотропной нейтральной непроводящей неферромагнитной среде:

1) **скоростью распространения** u электромагнитной волны в среде называется **фазовая скорость** (скорость распространения фазы колебаний). По *закону Максвелла* она равна

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (20.3)$$

где $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ – скорость распространения электромагнитной волны в вакууме. Поскольку $\epsilon \mu > 1$, то $u < c$;

2) векторы напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электрического и магнитного полей волны и вектор скорости распространения волны $\vec{u}$ взаимно перпендикулярны

и образуют правовинтовую систему, рис. 20.1. Это свойство электромагнитной волны не зависит от выбора координатной системы;

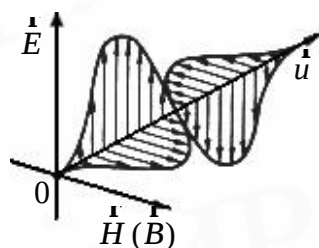


Рис. 20.1. Распределение электрического и магнитного полей в распространяющейся волне

3) в распространяющейся электромагнитной волне колебания электрического и магнитного полей происходят в фазе. На рис. 20.1 показано изменение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в пространстве в фиксированный момент времени, причем между мгновенными значениями E и H (E и B) в любой точке существует определенная связь, а именно:

$$E = u B \quad \text{или} \quad \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (20.4)$$

Это значит, что E и H (или B) одновременно в одних и тех же точках достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т.д.

Волновые уравнения (20.2) описывают, в частности, распространение наиболее простых электромагнитных волн строго определенной частоты – **плоских гармонических (монохроматических) электромагнитных волн**. Амплитуда колебаний векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ плоской гармонической электромагнитной волны в любой точке наблюдения постоянна. Можно показать, что уравнения плоской гармонической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси X декартовой системы координат, имеют вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (20.5)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (20.5a)$$

где $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$ – амплитуды колебаний электрического и магнитного полей волны; $\omega = 2\pi n$ – круговая (циклическая) частота этих колебаний; $k = \omega/u$ – волновое число; α – начальная фаза колебаний волны при $t = 0$ и $x = 0$. Знак минус в скобках уравнений (20.5) и (20.5a) означает, что волна распространяется в положительном направлении оси X . Отметим, что амплитуды электрического и магнитного полей E_m и H_m связаны соотношением (20.4).

Расстояние, на которое распространяется электромагнитная волна в среде за время одного периода колебаний T , называется длиной волны и определяется как

$$l = uT. \quad (20.6)$$

Связь длины электромагнитной волны с периодом T и частотой n колебаний в вакууме

$$l = cT, \quad \text{или} \quad l = c/n. \quad (20.6a)$$

Волновые уравнения плоской гармонической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси X , записываются как

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (20.7)$$

20.2. Опыты Герца. Плотность энергии электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга. Опыт Лебедева

Опыты Герца. Чтобы получить свободные электромагнитные волны, необходимо создать в пространстве достаточно быстро изменяющееся электрическое поле или соответственно быстро изменяющееся магнитное поле. Г. Р. Герц в 1888 г. использовал *прибор с искровым промежутком* (вibrator Герца), в котором на короткое время возникали колебания заряда; при этом генерировались электромагнитные волны с частотой порядка 10^9 Гц. Отметим, что многие современные вибраторные антенны сохранили конструктивные особенности вибратора Герца.

Герц зарегистрировал электромагнитные волны на некотором расстоянии от вибратора с помощью резонатора – второго вибратора с гораздо меньшей длиной искрового промежутка (доли миллиметра вместо 7,5 мм в излучающем вибраторе). Также дополнительно в качестве резонатора использовался прямоугольный (или круговой) проволочный виток с искровым промежутком. Искрение вибратора вызывало появление искр в резонаторе. Герц установил, что электромагнитные волны распространяются со скоростью света c . Они невидимы, однако обладают всеми свойствами света. Исследованные им волны относят к радиоволнам: с их помощью передаются радио- и телевизионные сигналы.

Электромагнитные волны условно делятся на несколько **видов** (λ указаны в вакууме): **радиоволны** ($10^{-4} \text{ м} < l < 10^3 \text{ м}$), **световые** волны (*инфракрасные* волны ($760 \text{ нм} < \lambda < 1 \text{ мм}$), *видимый свет* ($400 \text{ нм} < \lambda < 760 \text{ нм}$), *ультрафиолетовое* излучение ($1 \text{ нм} < \lambda < 400 \text{ нм}$)), **рентгеновское** излучение ($6 \cdot 10^{-3} \text{ нм} < \lambda < 1 \text{ нм}$) и **γ -излучение** ($\lambda < 6 \cdot 10^{-3} \text{ нм}$).

Соответствующие частоты можно найти из формулы (20.6а). Например, частоты видимого света лежат в интервале от $4,0 \cdot 10^{14}$ до $7,5 \cdot 10^{14}$ Гц.

Радиоволны и микроволны генерируются с помощью электронных устройств; волны с более высокими частотами при помощи электроники получить крайне трудно.

Плотность энергии электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга. Электромагнитные волны переносят в пространстве энергию. **Энергия электромагнитного поля** W – это количественная характеристика электромагнитного взаимодействия:

$$W = \int w dV ,$$

где w – объемная плотность энергии поля. **Объемная плотность w энергии электромагнитного поля** складывается из *объемных плотностей* w_e и w_m электрического и магнитного полей и равна, если среда не содержит сегнетоэлектриков и ферромагнетиков:

$$w = w_e + w_m = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} , \quad (20.8)$$

где E и H – соответственно напряженности электрического и магнитного полей волны в произвольный момент времени в данной точке пространства.

Так как $\sqrt{e_0 e} E = \sqrt{m_0 m} H$ из выражения (20.4), то

$$w = \sqrt{e_0 m_0} \sqrt{em} EH. \quad (20.9)$$

Формулы (20.8) и (20.9) характеризуют плотность энергии электромагнитной волны в любой момент времени в любой точке пространства.

Вектор $\dot{\Pi}$ **плотности потока энергии электромагнитной волны** называется **вектором Пойнтинга (Умова-Пойнтинга)**

$$\dot{\Pi} = [\dot{E}, \dot{H}]. \quad (20.10)$$

По модулю вектор $\dot{\Pi}$ определяет энергию, переносимую волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны:

$$\Pi = EH = wu = \sqrt{\frac{ee_0}{mm_0}} E_m^2 \cos^2(wt - kx + a), \quad (20.11)$$

где u – фазовая скорость волны, равная скорости переноса энергии (при отсутствии дисперсии). Направление вектора $\dot{\Pi}$ совпадает с направлением переноса энергии, т.е. с направлением распространения электромагнитной волны.

Единица плотности потока энергии электромагнитной волны в СИ – ватт на метр в квадрате (Вт/м²).

Если исходить из представлений о локализации электромагнитной энергии в пространстве, то можно заключить, что она будет изменяться в данном объеме V как за счет ее вытекания из объема через поверхность S , так и за счет того, что поле передает свою энергию веществу (заряженным частицам), т.е. производит работу над веществом.

Согласно **теореме Пойнтинга** убыль энергии W электромагнитного поля, заключенного в объеме V , за единицу времени определяется как:

$$-\frac{dW}{dt} = \oint_S \dot{\Pi} \cdot \dot{n} dS + \int_V \dot{j} \cdot \dot{E} dV, \quad (20.12)$$

где $\dot{\Pi}$ – вектор Пойнтинга; $\dot{j}$ – плотность тока; $\dot{E}$ – напряженность электрического поля; $\dot{n}$ – наружная нормаль к поверхности S ; dS и dV – элементы поверхности и объема соответственно. Интеграл $\oint_S \dot{\Pi} \cdot \dot{n} dS$ определяет поток энергии,

переносимый электромагнитным полем сквозь замкнутую поверхность S , ограничивающую рассматриваемый объем V . Интеграл $\int_V \dot{j} \cdot \dot{E} dV$ описывает ра-

боту, совершаемую сторонними ЭДС над токами проводимости, и джоулевы потери – потери энергии электромагнитного поля за счет ее преобразования в энергию теплового движения среды.

Скалярная величина I , равная модулю среднего значения вектора Пойнтинга, называется **интенсивностью электромагнитной волны**:

$$I = \left\langle \dot{\Pi} \right\rangle. \quad (20.13)$$

Из (20.11) следует, что интенсивность плоской гармонической электро-

магнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды ее электрической составляющей:

$$I = \sqrt{\frac{ee_0}{mm_0}} \frac{E_m^2}{2}. \quad (20.14)$$

Опыт Лебедева. Максвелл теоретически показал, что электромагнитные волны, отражаясь или поглощаясь в телах, на которые они падают, оказывают на них давление. Это давление возникает в результате воздействия магнитного поля волны на электрические токи, возбуждаемые электрическим полем той же волны. *Давление электромагнитной волны* на тело определяется выражением

$$p = (1 + r) \langle w \rangle, \quad (20.15)$$

где ρ – *коэффициент отражения электромагнитной волны* – отношение интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей (при полном отражении $r = 1$, при полном поглощении $r = 0$); $\langle w \rangle$ – среднее за период волны значение объемной плотности энергии электромагнитного поля. Если волна падает на поверхность тела наклонно, под углом q к нормали, то $\langle w \rangle = (I \cos q) / c$.

Давление электромагнитного излучения обычно очень мало. Например, давление солнечного излучения на Земле составляет около 10^{-6} Па, что в 10^{10} раз меньше атмосферного давления. Экспериментальное доказательство существования давления электромагнитных волн, подтвердившее теорию Максвелла, было получено П. Н. Лебедевым. В 1899 г. он обнаружил и измерил *давление света* на твердые тела, а в 1910 г. – на газы. В эксперименте, выполненном в 1899 г., объект исследования имел вид подвижного крылышка. Лебедев обнаружил поворот этого крылышка под действием падающего на него света. Величина светового давления оказалась соответствующей формуле (20.15).

Давление света играет большую роль в астрофизике и атомных явлениях. Например, наряду с давлением газа давление света обеспечивает стабильность звезд, противодействуя силам гравитации.

Литература

28. Иродов, И. Е. Электромагнетизм. Основные законы / И. Е. Иродов. – М. : Лаборатория Базовых знаний, 2001.
29. Савельев, И. В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 2 / И. В. Савельев. Электричество и магнетизм. – М. : Астрель, АСТ, 2004.
30. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Академия, 2003.
31. Джанколи, Д. Физика: в 2 т. Т. 2 / Д. Джанколи. – М. : Мир, 1989.
32. Физическая энциклопедия: в 5 т. Т. 1 – 5 / гл. ред. А. М. Прохоров. – М. : Сов. Энциклопедия, 1988–1998.
33. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, МФТИ, 2002.
34. Калашников, С. Г. Электричество / С. Г. Калашников. – М. : Наука, 1964.
35. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1999.
36. Аленицын, А. Г. Краткий физико-математический справочник / А. Г. Аленицын, Е. И. Бутиков, А. С. Кондратьев. – М. : Наука, 1990.
37. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М. : Физматлит, 1963.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Греческий алфавит

Пропис- ные	Строч- ные	Назва- ние	Пропис- ные	Строч- ные	Назва- ние	Пропис- ные	Строч- ные	Назва- ние
Α	α	Альфа	Ι	ι	Йота	Ρ	ρ	Ро
Β	β	Бэта	Κ	κ	Каппа	Σ	σ, ζ	Сигма
Γ	γ	Гамма	Λ	λ	Лямбда	Τ	τ	Тау
Δ	δ	Дэльта	Μ	μ	Мю	Υ	υ	И- псилон
Ε	ε	Э- псилон	Ν	ν	Ню	Φ	φ	Фи
Ζ	ζ	Дзэта	Ξ	ξ	Кси	Χ	χ	Хи
Η	η	Эта	Ο	ο	О- микрон	Ψ	ψ	Пси
Θ	θ, ϑ	Тэта	Π	π	Пи	Ω	ω	О-мега

2. Некоторые физические константы

Скорость света в вакууме	$c = 2,998 \times 10^8 \text{ м/с}$
Магнитная постоянная	$m_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 12,566 \times 10^{-7} \text{ Н/А}^2$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = (m_0 c^2)^{-1} = 8,854 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$ $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9 \text{ м/Ф}$
Гравитационная постоянная	$G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Ускорение свободного падения	$g = 9,807 \text{ м/с}^2$
Элементарный заряд	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ Кл}$
Масса покоя электрона	$m_e = 0,911 \times 10^{-30} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Постоянная Фарадея	$F = 96,458 \times 10^3 \text{ Кл/моль}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,314 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$
Постоянная Больцмана	$k = R/N_A = 1,381 \times 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Связь между скоростью света и постоянными ϵ_0 и m_0	$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 m_0}$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абсолютно неупругое тело 14

— твердое тело 14

— упругое тело 14

Адиабата 119

Ампер 169, 189

Амплитуда колебаний гармонических 66

— — затухающих 74

Б

Базис ортонормированный декартовой системы координат 15

В

Ватт 36

Вебер 184

Вектор 15

— главной нормали 19

— касательной 19

— перемещения 16

— плотности потока энергии волны упругой 86

— — — — — электромагнитной 221

— Умова 86

— Пойнтинга 221

— элементарного поворота
твердого тела 21

Векторное произведение векторов 16

Векторы аксиальные 21

Вероятность 120

— состояния термодинамическая 129

Волна 80

— гармоническая 80

— плоская 81

— —, уравнение 82

— сферическая 81

— —, уравнение 83

— упругая гармоническая 80

— — поперечная 80

— — продольная 80

Волновая поверхность 81

Волновой фронт 81

Волны бегущие 81

— когерентные 84

— стоячие 84

— —, уравнение 84

— —, пучности 84

— —, узлы 84

— упругие 80

— электромагнитные 218

— —, скорость фазовая 218

— —, энергия 220

Вольт 145

Восприимчивость диэлектрическая
вещества 158

— магнитная 194

Впадины 80

Вращение тела вокруг неподвижной оси 20

— — равноускоренное 22

Времени однородность 32

Время релаксации 74

Г

Газ идеальный 107

— реальный 132

— — Ван-дер-Ваальса 133

Генри 201

Герц 67

Гироскоп 63

— на кардановом подвесе 63

Гистерезис диэлектрический 165

— магнитный 196

Градиент скалярной функции
координат 39

Д

Давление 106

— внутреннее 133

— света 222

— электромагнитных волн 222

Двигатель вечный второго рода 125

— тепловой 126

Движение абсолютное 59

— аperiодическое 75

— механическое 14

— относительное 59

— твердого тела вращательное 20

— — — плоское 56

— — — поступательное 20

— точки замедленное 18

— — криволинейное 18

— — неравномерное 17

— — плоское 18

— — прямолинейное 18

— — равнозамедленное 19

— — равномерное 18

— — равнопеременное 19

— — равноускоренное 19

— — ускоренное 18
Декремент затухания
 логарифмический 75
Деформации пластические 30
Деформация 30
— упругая 30
— продольная 30
Джоуль 36
Диамagnetики 194
Дивергенция вектора 142
Динамика 14
Диполь электрический 148
— — жесткий 157
— — — в электрическом поле 149
— — упругий 157
Диссипация энергии 40
Диэлектрики 156, 157
— неполярные 156
— полярные 156
— ионные 156
—, условия на границе раздела 161
Длина волны 81
— приведенная физического маятника 71
— пути точки 16
— стоячей волны 84
Добротность колебательной системы 75
Домены 164

Е

Емкость взаимная двух проводников 154
— конденсатора 154
— уединенного проводника 154
— — проводящего шара 154

З

Закон Авогадро 108
— Ампера 188
— Био-Савара-Лапласа 182
— Больцмана 113
— взаимосвязи массы и энергии 103
— всемирного тяготения 28-29
— Гука 30-31
— движения центра масс 34
— Джоуля-Ленца 177
— — в дифференциальной форме 178
— динамики материальной точки
 основной 26
— — твердого тела, вращающегося
 вокруг фиксированной оси 55
— — момента импульса системы 51
— инерции 24

— Кулона 136
— Максвелла (распределение молекул
 по скоростям) 121
— Максвелла-Больцмана 125
— Ньютона динамики первый 24
— — — второй 25-26
— — — третий 26
— Ома для однородного участка цепи 171
— — обобщенный 175
— полного тока для магнитного поля
 в среде 194
— преломления линий напряженности
 электростатического поля 164
— равномерного распределения энергии 113
— преобразования скорости точки
 классический 28
— — скоростей релятивистский 100
— сохранения электрического заряда 135
— — импульса системы 33
— — момента импульса 51
— — энергии (в его общем физическом
 смысле) 41
— — механической энергии системы 41
— — — — частицы 40
— электромагнитной индукции
 (Фарадея) 198
Замедление хода времени
 релятивистское 94
Заряд электрический пробный 136
— — точечный 135
— — элементарный 135
Заряды связанные
 объемные 159
— сторонние 157
— связанные 157
Затухающие колебания 73

И

Изобара 109
Изопроцессы 117
Изотерма 107
Изотропность пространства 32
Изохора 108
Импульс материальной точки 25
— — — релятивистский 100
— силы 33
— системы 33
— —, теорема об изменении 33
Индуктивность 201
— взаимная 203
— соленоида 201

Индукция магнитная 179
— электростатическая 151
Инертность тела 24
Интенсивность электромагнитной
волны 221

Интервал между событиями 96
— времениподобный 97
— пространственноподобный 97
— светоподобный 97
Интерференция волн 84

К

Кинематика 14
Кинематические уравнения движения
точки 16
Когерентность 84
Колебания 66
— вынужденные 66, 76
— —, дифференциальное уравнение 76
— — — электрические 210
— — —, уравнение 210
— — — установившиеся 210
— гармонические 66
— —, дифференциальное уравнение 68
— —, метод векторных диаграмм 67
— —, сложение 72
— —, экспоненциальная форма записи 67
— — математического маятника 70
— — —, уравнение движения 70
— — пружинного маятника 69
— — —, уравнение движения 69
— — физического маятника 70
— — —, уравнение вращательного
движения 71
— свободные электрические 207
— — —, дифференциальное
уравнение 207
— затухающие 73
— —, дифференциальное уравнение 74
— — электрические 208
— — —, уравнение 208
Количество движения 25
Конденсатор 154
— плоский 154
Консервативная сила 37
Контур колебательный электрический 206
Контур с током в магнитном поле 189-190
Координаты вектора декартовы 15
Коэффициент затухания 74, 208
— отражения электромагнитной
волны 221

— теплопроводности 178
— трения скольжения 31
КПД теплового двигателя 126
— цикла Карно 131

Л

Линии магнитной индукции 180
— напряженности электростатического
поля 138
— силовые электростатического поля 138
Линия действия силы 24

М

Магнетики 192
— условия на границе раздела 195
Молекулярный ток 192
Масса 25, 103-104
— гравитационная 29
— молярная 108
Материальная точка 14
Маятник математический 70
— пружинный 69
— физический 70
— —, приведенная длина 71
Механика 14
— нерелятивистская (ньютоновская) 14
— релятивистская 89
Модуль Юнга 30
Молекулы неполярные 156
— полярные 156
Моль 107
Момент главный системы сил 49
— диполя электрический 148
— импульса механической системы
относительно неподвижной оси 51
— — — — — точки 50
— — — — —, закон сохранения 51
— — частицы относительно неподвижной
оси 49
— — — — — точки 47
— магнитный плоского контура
с током 189
— силы относительно неподвижной оси 49
— — — — — точки 47-48
— инерции тела 52
— — — главный 53
Мощность 36
— постоянного тока 178

Н

Нагреватель 130

Намагниченность 192
 — насыщения 196
 — остаточная 196
 Напряжение нормальное 30
 — электрическое 174
 Напряженность поля гравитационного 42
 — — магнитного 193
 — — электростатического 137
 — электростатического поля заряженной сферы 143
 — — —, связь с потенциалом поля 146
 — — — системы точечных зарядов 139
 — — — точечного заряда 138
 — — — электрического диполя 148
 — сторонних сил 172
 Насыщение магнитное ферромагнетика 196
 Начало термодинамики первое 115
 — — второе 125, 126, 129
 — — третье 128
 Невесомость 30
 Неравенство Клаузиуса 127
 Нормаль внешняя 140
 Носители тока 169
 Ньютона первый закон 24
 — второй закон 25
 — третий закон 26

О

Обкладки конденсатора 154
 Объем 107
 — молярный 108
 — удельный 107
 Однородность времени 32
 — пространства 32
 Ом 171
 Операция сложения векторов 15
 — скалярного произведения векторов 15
 — векторного произведения векторов 16
 Опыт Майкельсона–Морли 87
 Оператор Лапласа 83
 — набла 39
 Опыт Лебедева 221
 Опыты Фарадея 197
 Осциллятор 66
 — гармонический 69
 Ось вращения тела 20
 — — — мгновенная 56
 — подвеса маятника 70

П

Падение свободное 30
 Парамагнетики 194
 Параметр термодинамический 105
 Перемещения вектор 16
 Период вращения 22
 — колебаний 66
 — — затухающих 74
 Плечо диполя 148
 — силы 48
 Плотность электрических зарядов
 линейная 137
 — — — поверхностная 137
 — — — объемная 137
 — электрического тока 169
 — тока смещения 214
 — объемная кинетической энергии среды 85
 — объемная потенциальной энергии среды 85
 — — энергии упругих волн 85
 — — — магнитного поля 205
 — — — поляризованного диэлектрика 168
 — — — электростатического поля 167
 — — — электромагнитной волны 220
 — сил поверхностная 153
 — энергии магнитного поля 205
 Поверхность волновая 81
 — эквипотенциальная 39
 Показатель адиабаты 114
 — политропы 119
 Поле физическое 24
 — вихревое 186
 — гравитационное 42
 — магнитное 179
 — — равномерно движущегося заряда 181
 — — кругового витка с током 183-184
 — — неоднородное 180
 — — однородное 180
 — — прямолинейного проводника с током 182
 — — соленоида 187
 — —, энергия 205
 — потенциальное 37
 — стационарное 25
 — электрическое 135
 — —, энергия 167
 — — однородное 139
 — электромагнитное 215-216
 — —, граничные условия 217
 — —, теория Максвелла 215

- —, энергия 220
- электростатическое 136
- —, потенциальность 145
- Поляризация диэлектрика 156
- — электронная (деформационная) 156
- — ионная 157
- — ориентационная (дипольная) 157
- Поляризованность 158
- остаточная 165
- Постоянная Больцмана 110
- молярная газовая (универсальная газовая постоянная) 109
- гравитационная 42
- магнитная 181
- электрическая 136
- Потенциал электростатического поля 145, 146, 166
- — —, связь с напряженностью 146
- — — системы точечных зарядов 147
- — — электрического диполя 148
- гравитационного поля 42
- Поток вектора магнитной индукции 184
- вектора напряженности электростатического поля 139-140
- энергии 85
- Потокоцепление 185
- взаимной индукции 185
- самоиндукции 185
- Правила Кирхгофа для разветвленных цепей 176
- Правило буравчика 21, 179
- Ленца 198
- левой руки 188
- правой руки 16, 180
- Преобразования Галилея 28
- Лоренца 91
- Прецессия гироскопа 64
- Принцип постоянства скорости света 88
- относительности Галилея 27
- — Эйнштейна 88
- суперпозиции для потенциала системы неподвижных точечных зарядов 147
- — полей магнитных 181
- — — электрических 138
- эквивалентности 62
- Проводимость электрическая удельная вещества 171
- Проводник уединенный 153
- Проводники в электрическом поле 150
- Проницаемость среды

- диэлектрическая 136, 160
- — магнитная 180, 194
- Пространства изотропность 32
- однородность 32
- Протон 135
- Процесс адиабатический 119
- изобарный 118
- изотермический 118
- изохорный 117
- квазистатический 126
- круговой 127
- политропный 119
- термодинамический 105
- — необратимый 126
- — обратимый 126
- Пьезоэлектрики 165
- Пьезоэффект прямой 165
- обратный 165
- Пучности 80
- стоячей волны 84

Р

- Работа 35
- в магнитном поле 190-191
- газа при расширении 115-116
- за цикл 130
- внешних сил при вращении тела 56
- силы 36
- Равновесность термодинамического процесса 126
- Радиус кривизны траектории 19
- Радиус-вектор точки 15
- —, составляющие 15
- Размеры тела собственные 93
- Разность потенциалов 145
- Распределение Больцмана 124
- Максвелла по абсолютным значениям скоростей 121
- Максвелла-Больцмана 125
- Резонанс 77
- параметрический 79
- Ротор вектора 186

С

- Самоиндукция 201
- Сегнетоэлектрики 164
- Сила 24
- Ампера 187
- вынуждающая 76
- инерции кориолисова 61
- — поступательная 60

- — центробежная 61
- консервативная 37
- коэрцитивная 165, 196
- Лоренца 181
- тока 169
- тяжести 29
- упругости 30
- электродвижущая 173
- — взаимной индукции 203
- — самоиндукции 201
- — электромагнитной индукции 197
- Силы Ван-дер-Ваальса 132
- внешние 25
- внутренние 25
- диссипативные 37
- кулоновские 136
- межмолекулярного взаимодействия 132
- пондеромоторные 168
- сторонние 172
- центральные 40
- электростатические 136
- Система единиц Международная (СИ) 17
- замкнутая (в механике) 32
- изолированная электрически 135
- колебательная 66
- механическая 24-25
- отсчета 15
- — гелиоцентрическая 24
- — инерциальная 24
- — неинерциальная 58
- — лабораторная 56
- термодинамическая 105
- — замкнутая 105
- — изолированная 105
- центра масс 35
- уравнений Максвелла 216, 217
- Скалярное произведение векторов 15-16
- Скин-эффект 200
- Скорости релятивистские 89
- Скорость 17
- абсолютная 28, 60
- фазовая 82
- космическая первая 46
- — вторая 46
- — третья 46
- линейная 23
- мгновенная 17
- молекул газа наиболее вероятная 122
- — — средняя арифметическая 123
- — — квадратичная 122
- относительная 28, 60
- переносная 59
- поперечных упругих волн 83
- — — — в струне 83
- продольных упругих волн 83
- средняя 17
- —, вектор 17
- угловая 21
- центра масс 34
- электромагнитной волны 218
- Сложение гармонических колебаний одного направления и одной частоты 72-73
- Смещение электрическое 160
- Сокращение лоренцево 93
- Соленоид 187
- , индуктивность 201
- Сопротивление проводника 171
- цепи активное 206
- — емкостное 211
- — индуктивное 211
- — критическое 209
- — реактивное 211
- — полное (импеданс) 211
- электрическое удельное 171
- Состояние равновесное 105
- Среда изотропная 80
- линейная 80
- однородная 80
- сплошная 80
- Т**
- Тело абсолютно неупругое 14
- — твердое 14
- — упругое 14
- внешнее 25
- отсчета 14
- рабочее теплового двигателя 130
- Температура 106
- Теорема Гаусса для магнитного поля 184-185, 192
- — — поля вектора поляризации 158
- — — электростатического поля в диэлектрике 161
- — — электростатического поля 141-142, 160
- Карно 132
- Кёнига 57
- о циркуляции вектора намагниченности 193
- — — — напряженности магнитного поля 194

- — — — — электростатического поля 145
- — — — — индукции магнитного поля 185-186, 195
- об изменении импульса системы 33
- Стокса 213
- Штейнера 53
- Теория классическая электропроводности металлов 178
- Максвелла электромагнитного поля 215
- относительности специальная 88
- — —, постулаты 88-89
- молекулярно-кинетическая 107
- Теплоемкость молярная 114
- удельная 114
- Теплота 114
- Термодинамика 105-106
- Ток индукционный 197
- — при замыкании и размыкании цепи 202-203
- переменный квазистационарный 206
- смещения 214
- электрический 169
- — квазистационарный 206
- —, направление 169
- — переменный 169
- — постоянный 169
- Токи вихревые (Фуко) 200
- Точка Кюри 165, 196
- материальная 14
- Траектория 16
- Трение внешнее 31
- внутреннее 31
- жидкое 31
- сухое 31

у

- Удар 43
- абсолютно неупругий 44
- — упругий 43
- центральный 43
- Узел стоячей волны 84
- электрической цепи 176
- Уравнение Ван-дер-Ваальса 133
- волновое 83
- волны плоской 82
- — стоячей 84
- — сферической 83
- движения в неинерциальных системах отсчета 58

- — материальной точки 26
- динамики вращательного движения твердого тела вокруг фиксированной оси 55
- кинетической теории газов основное 112
- Клапейрона 109
- Майера 116
- Менделеева-Клапейрона 110
- моментов 48, 51
- непрерывности электрического заряда 170-171
- состояния идеального газа 109
- Уравнения движения материальной точки кинематические 16
- Максвелла, граничные условия 217
- материальные в теории Максвелла 216
- Ускорение 18
- мгновенное 18
- нормальное 19
- свободного падения 29
- тангенциальное 19
- угловое 21
- Условие нормировки вероятностей 121
- Условия граничные для векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ 195
- — — — $\vec{E}$ и $\vec{D}$ 162-163
- Участок электрической цепи однородный 173
- неоднородный 173

Ф

- Фаза волны плоской 82
- колебаний 66
- Ферромагнетики 195
- Физика молекулярная 105
- статистическая 119-120
- Флуктуации 120
- Формула барометрическая 124
- Больцмана 129
- Томсона 207
- Фронт волны 81
- Функция распределения 120-121
- распределения Максвелла по абсолютным значениям скоростей 121
- — — — проекциям скоростей молекул 122

Х

- Холодильник (теплоприемник) 130

Ц

Центр волны 81

— качания физического маятника 71

— кривизны траектории 19

— масс системы 34

Цикл Карно 131

Циркуляция вектора напряженности
электростатического поля 144-145

— — индукции магнитного поля 185

Ч

Частота волны 81

— — циклическая 82

— вращения 22

— затухающих колебаний циклическая 74

— колебаний 66-67

— — циклическая 66

— резонансная 77

Число Авогадро 108

— степеней свободы молекулы 113

— — — твердого тела 20

Ш

Шкала Кельвина 106

— Цельсия 106

Э

Электродинамика 215

Электрон 135

Электростатика 135

Энергия 35

— внутренняя 112

— — газа идеального 112

— взаимодействия системы неподвижных
точечных зарядов 165

— заряженного конденсатора 166-167

— — уединенного проводника 165

— кинетическая 36

— — вращающегося тела 55

— — молекулы газа 112, 113

— — релятивистская 102

— — твердого тела при плоском
движении 57

— контура с током 204

— механическая полная системы 41

— механическая полная частицы 39

— — системы 40

— покоя 103

— поля магнитного, объемная

плотность 205

— — электромагнитного, объемная
плотность 220

— — электростатического, объемная
плотность 167

— поляризованного диэлектрика,
объемная плотность 167-168

— потенциальная 37-38

— — упруго деформированного тела
(стержня) 38

— системы заряженных проводников 166

— — — тел 166

— упругих волн, объемная плотность 85

Энтропия 127

— системы 128

—, статистический смысл 129

Эффект Доплера для звуковых волн 86

Я

Явление электромагнитной индукции 197

— электростатической индукции 151

Учебное издание

Ташлыкова-Бушкевич Ия Игоревна

ФИЗИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

В 2-х частях

Часть 1

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Редактор *Т. П. Андрейченко*

Корректор *М. В. Тезина*

Компьютерная верстка и дизайн обложки *И. И. Ташлыкова-Бушкевич*

Подписано в печать

Печать ризографическая. Усл. печ. л.

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Уч.-изд. л. 14,0. Тираж 200 экз. Заказ 19.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.

220013, Минск, П. Бровки, 6



Об авторе

Ташлыкова-Бушкевич Ия Игоревна – кандидат физико-математических наук, доцент. Специалист в области физики твердого тела, доцент кафедры физики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Лауреат премии Президента Республики Беларусь 1998 г., стипендиат Президента Республики Беларусь по итогам конкурса 2002 г. среди талантливых молодых ученых, член Белорусского физического общества.

Биография включена в справочник Marquis «Who's Who in the World» (2007 г., США). Автор 66 научных работ.

О книге

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей вузов. Его основу составили лекции общего курса «Физика», читаемые в БГУИР автором. В книге доступно и наглядно изложены основы классической и современной физики, в том числе указаны современные приложения физики в науке и технике. Излагается нерелятивистская (ньютоновская) и релятивистская механика, включая колебательные и волновые процессы, а также молекулярная физика и термодинамика, электричество и магнетизм.

В пособии использованы результаты научных исследований, выполненных автором в области физики конденсированного состояния и физики взаимодействия заряженных частиц с поверхностью кристаллов.