

1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

(практическое занятие 1)

Содержание: высказывания; операции над высказываниями; контактные схемы; булевы функции; логическое следствие, метод доказательства от противного.

1.1 Примеры решения типовых задач

1.1.1 Составить таблицу истинности для формулы логики высказываний: $A \wedge (B \rightarrow C) \leftrightarrow A \wedge C$.

Решение. Для заданной формулы составляем таблицу истинности.

A	B	C	$A \wedge C$	$B \rightarrow C$	$A \wedge (B \rightarrow C)$	$A \wedge (B \rightarrow C) \leftrightarrow A \wedge C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

1.1.2 Решить логическое уравнение: $p \vee q \wedge \neg g \rightarrow (q \leftrightarrow g) = 1$.

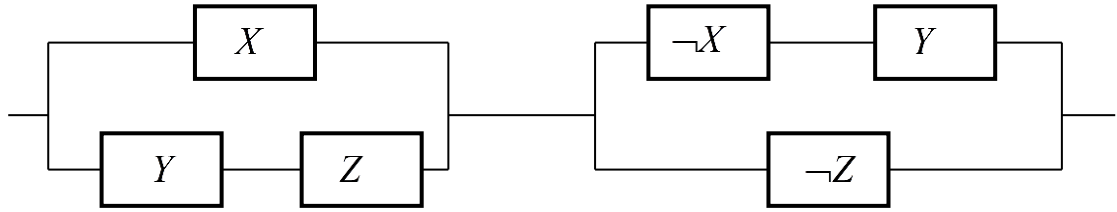
Решение. Составляем таблицу истинности и выбираем элементарные наборы $(p; q; g)$, при которых формула логики высказываний $p \vee q \wedge \neg g \rightarrow (q \leftrightarrow g)$ принимает значение «истина».

p	q	g	$\neg g$	$q \wedge \neg g$	$p \vee q \wedge \neg g$	$q \leftrightarrow g$	$p \vee q \wedge \neg g \rightarrow (q \leftrightarrow g)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1

Таким образом, решением заданного логического уравнения являются значения высказываний: $(1; 1; 1)$, $(0; 1; 1)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(0; 0; 0)$.

1.1.3 Построить контактную схему по заданной функции проводимости $A(X;Y;Z): (X \vee Y \wedge Z) \wedge (\neg X \wedge Y \vee \neg Z)$. Установить, при каких наборах элементов, входящих в данную схему, она будет работоспособна.

Решение. Построим контактную схему по заданной функции проводимости.



Проверим работоспособность полученной контактной схемы, для чего составим таблицу истинности для указанной формулы.

X	Y	Z	$\neg X$	$\neg Z$	$\neg X \wedge Y$	$Y \wedge Z$	$X \vee Y \wedge Z$	$\neg X \wedge Y \vee \neg Z$	$A(X;Y;Z)$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0

Контактная схема работает при замыкании-размыкании контактов $X, Y, Z: (1;1;0), (0;1;1), (1;0;0)$. Во всех остальных случаях контактная схема является неработоспособной.

1.1.4 Представить в явном виде булеву функцию, заданную таблицей.

$F(x_1; x_2; x_3)$	1	1	1	1	0	0	0	1
$(x_1; x_2; x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

Решение. Используя свойства булевых функций, а именно совершенную дизъюнктивную нормальную форму, получаем формулы:

$$F(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \wedge F(1; x_2; x_3)) \vee (\neg x_1 \wedge F(0; x_2; x_3));$$

$$F(1; x_2; x_3) = (x_2 \wedge F(1; 1; x_3)) \vee (\neg x_2 \wedge F(1; 0; x_3));$$

$$F(0; x_2; x_3) = (x_2 \wedge F(0; 1; x_3)) \vee (\neg x_2 \wedge F(0; 0; x_3));$$

$$F(1; 1; x_3) = (x_3 \wedge F(1; 1; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(1; 1; 0));$$

$$F(1; 0; x_3) = (x_3 \wedge F(1; 0; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(1; 0; 0));$$

$$F(0; 1; x_3) = (x_3 \wedge F(0; 1; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(0; 1; 0));$$

$$F(0; 0; x_3) = (x_3 \wedge F(0; 0; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(0; 0; 0)).$$

Подставим в полученные формулы значения из таблицы.

$$F(0;0;x_3) = (x_3 \wedge 0) \vee (\neg x_3 \wedge 1) = \neg x_3;$$

$$F(0;1;x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 0) = x_3;$$

$$F(1;0;x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 0) = x_3;$$

$$F(1;1;x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 1) = 1;$$

$$F(0;x_2;x_3) = (x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3) = x_2 \leftrightarrow x_3;$$

$$F(1;x_2;x_3) = (x_2 \wedge 1) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) = x_2 \vee (\neg x_2 \wedge x_3);$$

$$F(x_1;x_2;x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_2 \wedge x_3) \vee \neg x_1 \wedge (x_2 \leftrightarrow x_3).$$

1.1.5 Методом от противного проверить справедливость логического следствия $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \models \neg A$.

Решение. Предположим от противное, то есть $\neg A = 0$, $A \rightarrow B = 1$ и $A \rightarrow \neg B = 1$. Решаем полученную систему.

$$\begin{cases} A=1, \\ 1 \rightarrow B=1, \\ 1 \rightarrow \neg B=1. \end{cases} \quad \begin{cases} A=1, \\ B=1, \\ \neg B=1. \end{cases} \quad \begin{cases} A=1, \\ B=1, \\ B=0. \end{cases}$$

Высказывание B не может быть одновременно истинным и ложным, то есть система не имеет решения. Следовательно, логическое следование верно.

1.2 Задания для решения на практическом занятии

1.2.1. Составить таблицы истинности для указанных формул:

а) $X \wedge Y \rightarrow \neg X \leftrightarrow \neg Y \vee (X \rightarrow Y)$;

б) $A \vee (B \leftrightarrow C) \rightarrow \neg(B \wedge C \vee A)$;

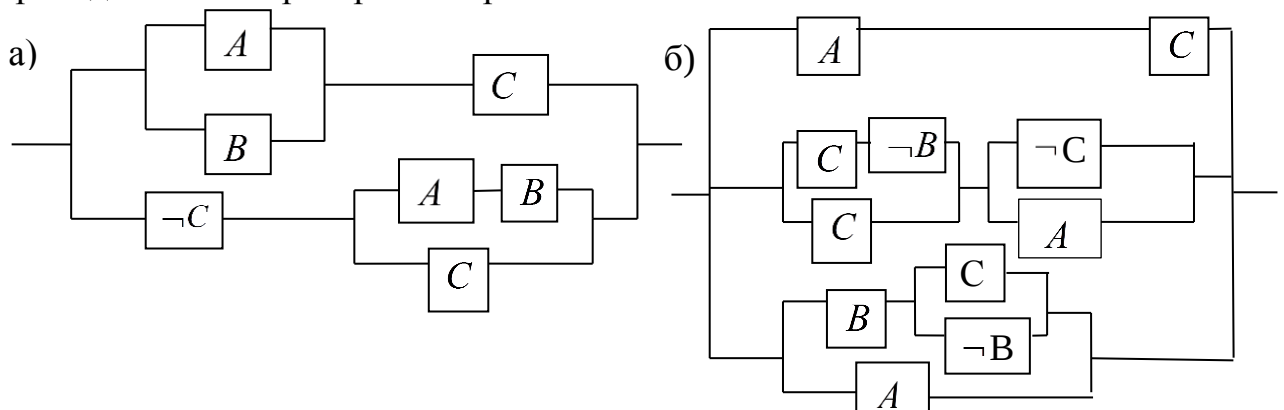
в) $(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge \neg B \rightarrow A \vee C)$.

1.2.2. Решить логические уравнения:

а) $(A \leftrightarrow B \wedge \neg C) \leftrightarrow (A \rightarrow B \vee C) = 1$;

б) $\neg(A \vee C \rightarrow B \wedge A) \leftrightarrow (\neg A \wedge C) = 0$.

1.2.3. Записать логические формулы для контактных схем функций проводимости и проверить их работоспособность.



1.2.4. Построить контактные схемы по заданным функциям проводимости. При каком замыкании-размыкании контактов X, Y и Z , которые входят в функцию проводимости, представленной логической формулой, электрическая цепь будет проводить ток, если логическая формула схемы имеет вид:

а) $((\neg X \vee Y) \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$; б) $Y \wedge (\neg X \vee (X \wedge (Y \vee Z)))$.

1.2.5. Представить в явном виде булевы функции F , которые заданы в виде таблиц. Построить контактные схемы, которые отражают формулу логики высказываний, соответствующей явному виду булевой функции.

а)

$F(x_1; x_2)$	0	1	1	0
$(x_1; x_2)$	(1;1)	(1;0)	(0;1)	(0;0)

б)

$F(x_1; x_2; x_3)$	0	1	1	1	0	0	0	1
$(x_1; x_2; x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

1.2.6. Методом от противного проверить справедливость логических следствий:

1.2.7.

а) $A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \wedge C \models A$;

б) $A \rightarrow B, C \rightarrow B, A \wedge C \models B$;

в) $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$;

г) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$.

1.2.8. Проанализировать справедливость следующих рассуждений:

а) если число дробное, то оно рационально. Если число рациональное, то оно действительное. Следовательно, если число дробное, то оно действительное;

б) если число четное, то оно делится на два. Число делится на два. Следовательно, число четное;

в) если корни $ax^2 + bx + c$ не являются комплексными, то не верно, что для любого действительного x имеет место неравенство $a \cdot (ax^2 + bx + c) > 0$.
Корни $ax^2 + bx + c$ комплексные тогда и только тогда, когда $D = b^2 - 4ac < 0$.
Если $ac < 0$, то не верно, что $D = b^2 - 4ac < 0$. Следовательно, если $ac < 0$, то не верно, что для любого действительного x имеет место неравенство $a \cdot (ax^2 + bx + c) > 0$;

г) если $x + 3 = \sqrt{3 - x}$, то $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$, но $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$ тогда и только тогда, когда $(x + 6)(x + 1) = 0$, что имеет место в том и только в том случае, когда $x = -6$ или $x = -1$. Следовательно, $x + 3 = \sqrt{3 - x}$ влечет $x = -6$ или $x = -1$.

2 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. (практическое занятие № 2)

Содержание: множество; пустое и универсальное множество; равенство множеств; операции над множествами.

2.1 Примеры решения типовых задач

2.1.1 Описать перечислением всех элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если $A = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 - x - 2 = 0\}$.

Решение. Запишем множества A и B перечислением их элементов, предварительно решив квадратные уравнения: $A = \{2; 3\}$, $B = \{-1; 2\}$.

$$A \cup B = \{-1; 2; 3\}, A \cap B = \{2\}, A \setminus B = \{3\}, B \setminus A = \{-1\}.$$

2.1.2 Используя определение равенства множеств и операции над множествами, проверить равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и проиллюстрировать решение с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

Решение. Рассмотрим два множества $M = A \cup (B \cap C)$ и $N = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Надо доказать, что $M = N$. Для того чтобы эти множества были равны необходимо выполнение двух условий:

- 1) если $\forall x \in M$, то $x \in N$;
- 2) если $\forall x \in N$, то $x \in M$.

Проверим выполнимость условия 1): пусть $x \in M = A \cup (B \cap C)$. Тогда возможны два случая $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = N$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Но тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а это означает, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = N$. Таким образом, в обоих случаях справедливо утверждение: если $x \in M$, то $x \in N$.

Проверим выполнимость условия 2): пусть $x \in N = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C) = M$. Если $x \notin A$, то $x \in B \cap C$, а, следовательно, $x \in A \cup (B \cap C) = M$.

Из выполнимости условий 1) и 2) следует справедливость заданного равенства $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Проиллюстрируем решение с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

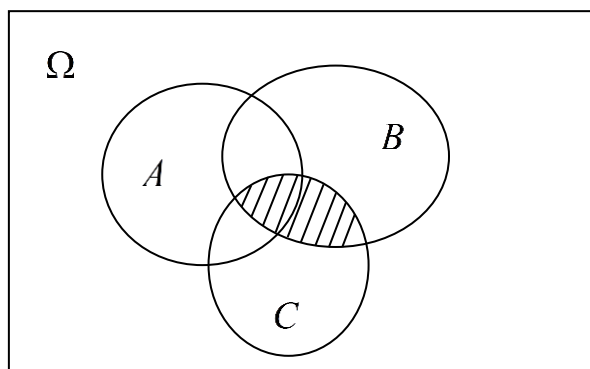


Диаграмма 2.1.1 – $B \cap C$

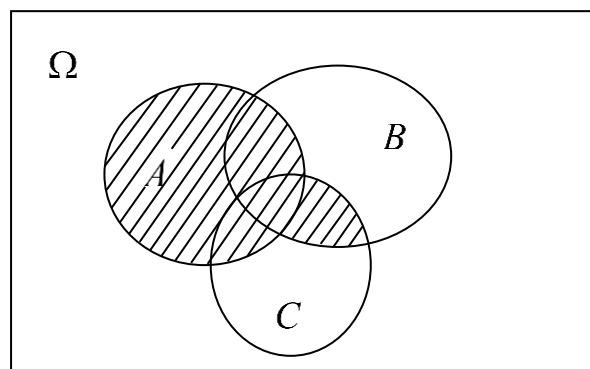


Диаграмма 2.1.2. – $A \cup (B \cap C)$

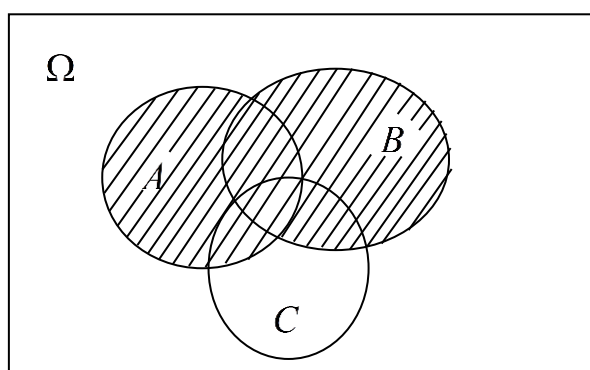


Диаграмма 2.1.3 – $A \cup B$

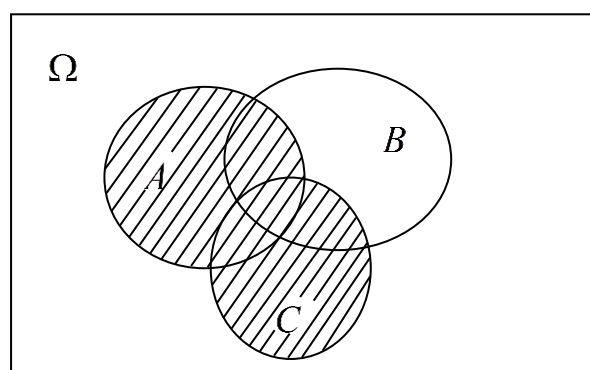


Диаграмма 2.1.4. – $A \cup C$

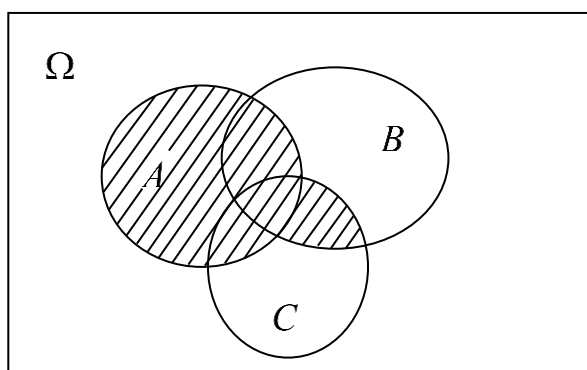


Диаграмма 2.1.5. – $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

На диаграмме 2.1.2 Эйлера-Венна заштрихованная область представляет собой левую часть заданного равенства: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. На диаграмме 2.1.5 Эйлера-Венна заштрихованная область представляет собой правую часть заданного равенства: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Заштрихованные области на обеих диаграммах Эйлера-Венна совпадают. Следовательно, указанное равенство справедливо.

2.2 Задания для решения на практическом занятии

2.2.1 Описать заданные множества перечислением своих элементов.

2.2.1.1 $A = \{x \in R \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$; 2.2.1.2 $A = \{x \in R \mid x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = 0\}$;

2.2.1.3 $A = \{x \in R \mid x^2 - 9x + 8 \leq 0\}$; 2.2.1.4 $A = \left\{x \in R \mid \log_{1/3} \frac{1}{x} \leq 2\right\}$;

2.2.1.5 $A = \{x \in R \mid \cos^2 3x = 0\}$; 2.2.1.6 $A = \{x \in R \mid \sqrt{2-x} = -x\}$.

2.2.2 Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

2.2.2.1 $x - y \leq 5$; 2.2.2.2 $y \leq x^2$; 2.2.2.3 $\sin 2x \geq 0,5$.

2.2.3 Описать перечислением всех элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если $A = \{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 + x - 2 = 0\}$.

2.2.4 Пусть задано некоторое множество $A = \{x \in R \mid x^2 - 4 \leq 0\}$ и множество $B = \{x \in R \mid |x| > 1\}$. Заштриховать на числовой прямой пересечение, объединение и разность этих множеств.

2.2.5 Пусть A и B — конечные множества. Доказать, что $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, где $n(M)$ — число элементов множества M .

2.2.6 Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, проверить тождества и проиллюстрировать решение с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

а) $A \setminus B = (A \setminus (A \cap B))$;

б) $A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

г) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

д) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

е) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$.