

1 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Определение 1 Высказыванием называется любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Вопросительные и восклицательные предложения, а также определения не являются высказываниями. Истинность или ложность высказывания рассматривается как его истинностное значение. Эти значения обозначаются 1 и 0 для значений «истина» и «ложь». Любое высказывание либо истинно, либо ложно.

Если суждение об истинности высказывания можно получить из самого высказывания, то такое высказывание называется элементарным или простым высказыванием. В противном случае будем иметь сложное высказывание. Из простых высказываний можно образовывать сложные высказывания с помощью логических операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция и другие. Истинностное значение сложного высказывания зависит от истинностного значения элементарных высказываний.

Пусть A и B – произвольные высказывания, относительно которых мы не предполагаем, что известны их истинностные значения.

Определение 2 *Отрицанием* высказывания A называется новое высказывание $\neg A$ (читается «не A » или «неверно, что A »), которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A является ложным.

Определение 3 *Конъюнкцией* высказываний A и B называется новое высказывание $A \wedge B$ (читается « A и B »), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Определение 4 *Дизъюнкцией* высказываний A и B называется новое высказывание $A \vee B$ (читается « A или B »), которое истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A и B истинно.

Определение 5 *Импликацией* с посылкой A и заключением B называется новое высказывание $A \rightarrow B$ (читается «если A , то B », или «из высказывания A следует B », или « A влечёт B »), которое ложно тогда и только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно.

Определение 6 *Эквиваленцией высказываний* A и B называется новое высказывание $A \leftrightarrow B$ (читается « A тогда и только тогда, когда B », или « A эквивалентно B », или « A необходимо и достаточно для высказывания B »), которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A и B принимают одинаковые истинностные значения.

Определения –6 можно записать в таблицы истинности 1.

Таблица 1 – Таблица истинности основных логических операций

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Понятие формулы логики высказываний определим следующим образом:

1) элементарные формулы (атомы) являются формулами логики высказываний;

2) если A и B – формулы, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ тоже являются формулами логики высказываний;

3) только те выражения являются формулами логики высказываний, для которых это следует из первого и второго пунктов.

Число скобок в формулах можно уменьшить, если принять следующие соглашения: 1) будем опускать внешнюю пару скобок; 2) упорядочим знаки логических операций по старшинству: $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg$. При восстановлении скобок сначала расставляются все скобки, относящиеся ко всем вхождением знака $\neg$, затем ко всем вхождением знака $\wedge$ и так далее.

Формулы логики высказываний, которые принимают значение «истинна» при любом распределении элементарных формул, входящих в неё, называются тождественно истинной формулой, тавтологией или законом логики высказываний. Запись $\models X$ означает, что логическая формула A является формулой логики высказываний. Формулы логики высказываний, которые принимают значение «ложь» при любом распределении элементарных формул, входящих в неё, называются тождественно ложной формулой или противоречием. Для доказательства того, что формула является тавтологией, необходимо составить таблицу истинности для этой формулы и показать, что все элементы последнего столбца равны единице.

Пример 1. Составить таблицу истинности для формулы логики высказываний: $A \wedge (B \rightarrow C) \leftrightarrow A \wedge C$.

Решение. Для заданной формулы составляем таблицу истинности.

A	B	C	$A \wedge C$	$B \rightarrow C$	$A \wedge (B \rightarrow C)$	$A \wedge (B \rightarrow C) \leftrightarrow A \wedge C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1

Пример 2. Решить логическое уравнение: $p \vee q \wedge \neg g \rightarrow (q \leftrightarrow g) = 1$.

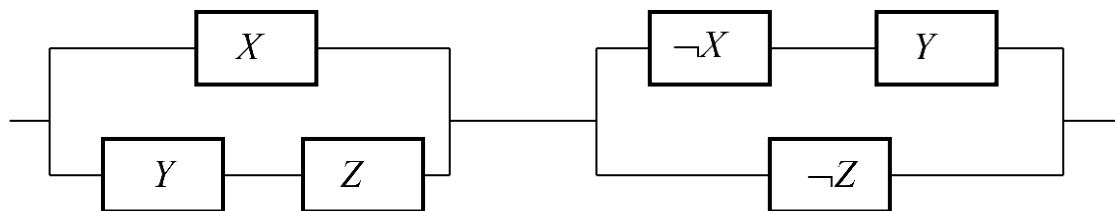
Решение. Составляем таблицу истинности и выбираем элементарные наборы $(p; q; g)$, при которых формула логики высказываний $p \vee q \wedge \neg g \rightarrow (q \leftrightarrow g)$ принимает значение «истина».

p	q	g	$\neg g$	$q \wedge \neg g$	$p \vee q \wedge \neg g$	$q \leftrightarrow g$	$p \vee q \wedge \neg g \rightarrow (q \leftrightarrow g)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1

Таким образом, решением заданного логического уравнения являются значения высказываний: $(1;1;1)$, $(0;1;1)$, $(1;0;0)$, $(0;0;1)$, $(0;0;0)$.

Пример 3. Построить контактную схему по заданной функции проводимости $A(X;Y;Z): (X \vee Y \wedge Z) \wedge (\neg X \wedge Y \vee \neg Z)$. Установить, при каких наборах элементов, входящих в данную схему, она будет работоспособна.

Решение. Построим контактную схему по заданной функции проводимости.



Проверим работоспособность полученной контактной схемы, для чего составим таблицу истинности для указанной формулы.

X	Y	Z	$\neg X$	$\neg Z$	$\neg X \wedge Y$	$Y \wedge Z$	$X \vee Y \wedge Z$	$\neg X \wedge Y \vee \neg Z$	$A(X;Y;Z)$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0

Контактная схема работает при замыкании-размыкании контактов X, Y, Z : $(1;1;0)$, $(0;1;1)$, $(1;0;0)$. Во всех остальных случаях контактная схема является неработоспособной.

Функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая может принять одно из двух значений 0 или 1, от n переменных, каждая из которых принимает эти же значения 0 или 1, называют булевой функцией от n переменных. Для построения булевой функции применяют конъюнктивную и дизъюнктивную нормальную форму

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{F(x_1, x_2, \dots, x_n)=1} (x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}),$$

где $x^\alpha = x$, если $\alpha = 1$, $x^\alpha = \neg x$, если $\alpha = 0$.

Пример 4. Представить в явном виде булеву функцию, заданную таблицей.

$F(x_1; x_2; x_3)$	1	1	1	1	0	0	0	1
$(x_1; x_2; x_3)$	(1;1;1)	(1;1;0)	(1;0;1)	(0;1;1)	(1;0;0)	(0;1;0)	(0;0;1)	(0;0;0)

Решение. Используя свойства булевых функций, а именно совершенную дизъюнктивную нормальную форму, получаем формулы:

$$F(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \wedge F(1; x_2; x_3)) \vee (\neg x_1 \wedge F(0; x_2; x_3));$$

$$F(1; x_2; x_3) = (x_2 \wedge F(1; 1; x_3)) \vee (\neg x_2 \wedge F(1; 0; x_3));$$

$$F(0; x_2; x_3) = (x_2 \wedge F(0; 1; x_3)) \vee (\neg x_2 \wedge F(0; 0; x_3));$$

$$F(1; 1; x_3) = (x_3 \wedge F(1; 1; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(1; 1; 0));$$

$$F(1; 0; x_3) = (x_3 \wedge F(1; 0; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(1; 0; 0));$$

$$F(0; 1; x_3) = (x_3 \wedge F(0; 1; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(0; 1; 0));$$

$$F(0; 0; x_3) = (x_3 \wedge F(0; 0; 1)) \vee (\neg x_3 \wedge F(0; 0; 0)).$$

Подставим в полученные формулы значения из таблицы.

$$F(0; 0; x_3) = (x_3 \wedge 0) \vee (\neg x_3 \wedge 1) = \neg x_3;$$

$$F(0; 1; x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 0) = x_3;$$

$$F(1; 0; x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 0) = x_3;$$

$$F(1; 1; x_3) = (x_3 \wedge 1) \vee (\neg x_3 \wedge 1) = 1;$$

$$F(0; x_2; x_3) = (x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3) = x_2 \leftrightarrow x_3;$$

$$F(1; x_2; x_3) = (x_2 \wedge 1) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) = x_2 \vee (\neg x_2 \wedge x_3);$$

$$F(x_1; x_2; x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_2 \wedge x_3) \vee \neg x_1 \wedge (x_2 \leftrightarrow x_3).$$

Формула B называется логическим следствием формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, если для любого набора истинностных значений элементарных формул, входящих в формулы $A_1, A_2, \dots, A_n$, формула B получает значение «истина» каждый раз, когда каждая из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ получает значение «истина».

Запись $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ означает, что формула B – логическое следствие формул $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Метод доказательства от противного. Требуется доказать следствие $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$. Предположим $\begin{cases} B = 0, \\ A_i = 1, i = \overline{1, n} \end{cases}$. Если система имеет хотя бы одно решение, то следствие неверно, если решений нет, то следствие верно.

Пример 5. Методом от противного проверить справедливость логического следствия $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \models \neg A$.

Решение. Предположим от противное, то есть $\neg A = 0, A \rightarrow B = 1$ и $A \rightarrow \neg B = 1$. Решаем полученную систему.

$$\begin{cases} A = 1, \\ 1 \rightarrow B = 1, \\ 1 \rightarrow \neg B = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1, \\ \neg B = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1, \\ B = 0. \end{cases}$$

Высказывание B не может быть одновременно истинным и ложным, то есть система не имеет решения. Следовательно, логическое следование верно.

Предложения с переменными, дающие высказывания в результате замены свободных переменных их допустимыми значениями, называются предикатами. По числу переменных, входящих в предикат, различают одноместные, двухместные и так далее предикаты. Для записи предикатов и высказываний вводятся два квантора: квантор общности и квантор существования. Для квантора существования употребляется символ $\exists$, для квантора общности символ $\forall$.

2 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.

Понятие множества является первоначальным и неопределяемым. Под *множеством* понимают совокупность объектов или предметов, которые объединены некоторым общим признаком. Эти объекты или предметы, из которых состоит множество, называются *элементами множества*.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается символом $\emptyset$.

Все множества делятся на конечные и бесконечные множества.

Множества, которые состоят из конечного числа элементов, называются *конечными*. Множества, которые состоят из бесконечного числа элементов, называются *бесконечными*. Если A является конечным множеством, то число его элементов называется мощностью множества и обозначается $|A|$.

Определение 1 Множества A и B называются *равными*, если любой элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества.

Равенство двух множеств A и B обозначают $A=B$. Равные множества, по определению, состоят из одних и тех же элементов. Для доказательства равенства множеств необходимо взять любой элемент одного множества и доказать, что он принадлежит второму множеству, и обратно.

Определение 2 Множество A называется *подмножеством* множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B .

Если множество A является подмножеством множества B , то записывают $A \subseteq B$ и читают «множество A является подмножеством множества B », или «множество A содержится во множестве B », или « A включено в множество B » и т. д.

Рассмотрим операции над множествами. Будем рассматривать всевозможные подмножества одного и того же множества, которое называется универсальным и обозначается буквой U или Ω .

Определение 3. *Объединением* множества A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (в частности, одновременно обоим множествам): $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

Объединением множеств $A_i, i \in N$ называется множество $\bigcup_i A_i$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_i . В частном случае, объединение конечного числа множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ будем обозначать $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Определение 4. *Пересечением* множества A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно множеству A и B : $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

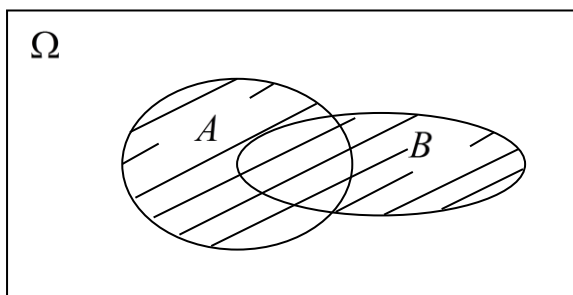
Пересечением множеств $A_i, i \in N$, называется множество $\bigcap_i A_i$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно всем множествам A_i . В частном случае, пересечение конечного числа множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ будем обозначать $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

Определение 5. Разностью множества A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B : $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.

Определение 6. Дополнением множества A до универсального множества Ω называется множество $\bar{A} = \Omega \setminus A$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат универсальному множеству и не принадлежат множеству A : $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{x | x \in \Omega \wedge x \notin A\}$.

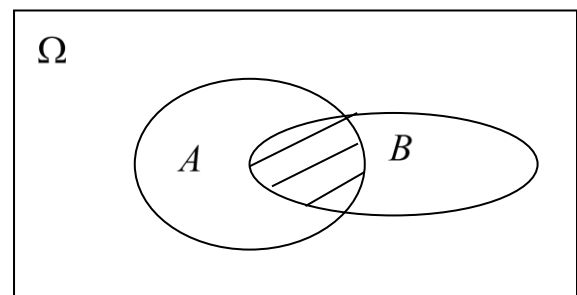
Геометрически операции над множествами интерпретируются с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

На рисунках 1-4 заштрихованные области изображают объединение, пересечение, разность и дополнение двух множеств, соответственно.



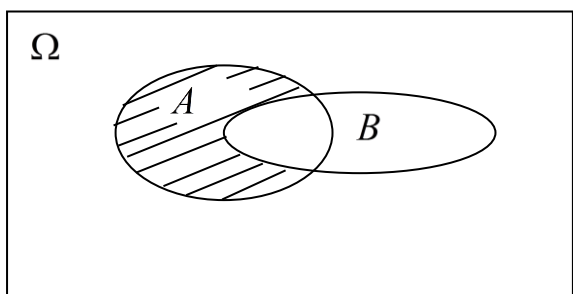
$$A \cup B$$

Рисунок 1 – Объединение



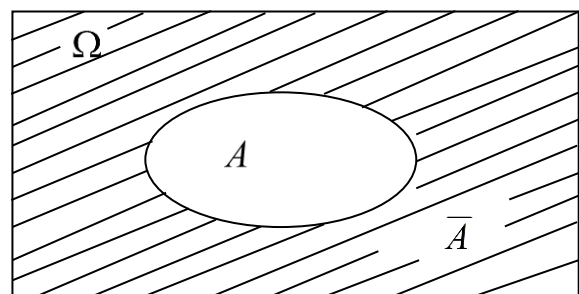
$$A \cap B$$

Рисунок 2 – Пересечение



$$A / B$$

Рисунок 3 – Разность



$$\bar{A} = \Omega / A$$

Рисунок 4 – Дополнение

Рассмотрим основные свойства операций над множествами.

$$\emptyset \subset A$$

– пустое множество содержится в любом множестве;

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\overline{\bar{A}} = A$$

– закон инволюции;

$$A \cup A = A$$

– закон идемпотентности объединения;

$$A \cap A = A$$

– идемпотентность пересечения;

$$A \cup B = B \cup A$$

– коммутативность объединения;

$$A \cap B = B \cap A$$

– коммутативность пересечения;

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

– ассоциативность объединения;

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

– ассоциативность пересечения;

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

– дистрибутивность объединения относительно пересечения;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

– дистрибутивность пересечения относительно объединения;

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

– законы де Моргана для множеств.

Пример 1 Описать перечислением всех элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если $A = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 - x - 2 = 0\}$.

Решение. Запишем множества A и B перечислением их элементов, предварительно решив квадратные уравнения: $A = \{2; 3\}$, $B = \{-1; 2\}$.

$$A \cup B = \{-1; 2; 3\}, A \cap B = \{2\}, A \setminus B = \{3\}, B \setminus A = \{-1\}.$$

Пример 2 Используя определение равенства множеств и операции над множествами, проверить равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и проиллюстрировать решение с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

Решение. Рассмотрим два множества $M = A \cup (B \cap C)$ и $N = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Надо доказать, что $M = N$. Для того чтобы эти множества были равны, необходимо выполнение двух условий:

1) если $\forall x \in M$, то $x \in N$;

2) если $\forall x \in N$, то $x \in M$.

Проверим выполнимость условия 1): пусть $x \in M = A \cup (B \cap C)$. Тогда возможны два случая $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = N$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Но тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а это означает, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = N$. Таким образом, в обоих случаях справедливо утверждение: если $x \in M$, то $x \in N$.

Проверим выполнимость условия 2): пусть $x \in N = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C) = M$. Если $x \notin A$, то $x \in B \cap C$, а, следовательно, $x \in A \cup (B \cap C) = M$.

Из выполнимости условий 1) и 2) следует справедливость заданного равенства $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Проиллюстрируем решение с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

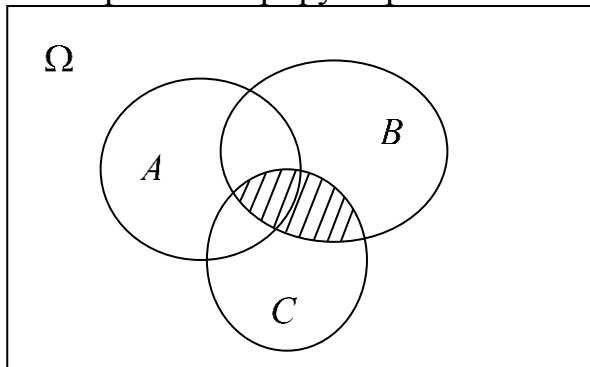


Диаграмма 1 – $B \cap C$

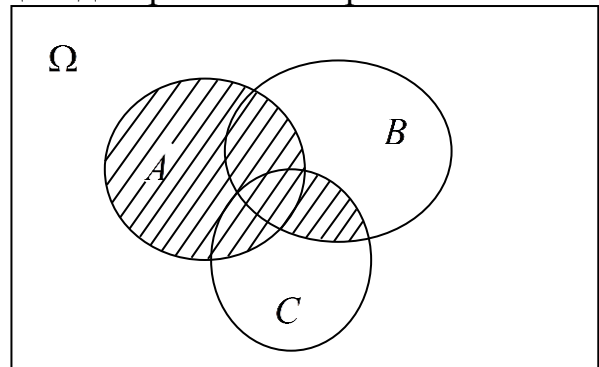


Диаграмма 2. – $A \cup (B \cap C)$

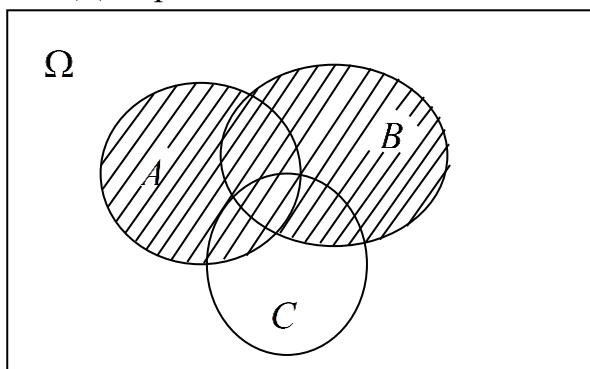


Диаграмма 3 – $A \cup B$

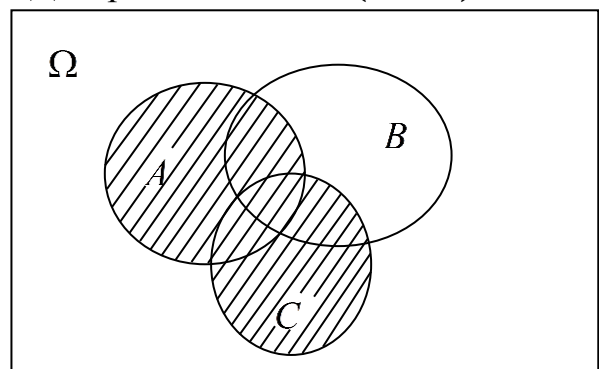


Диаграмма 4. – $A \cup C$

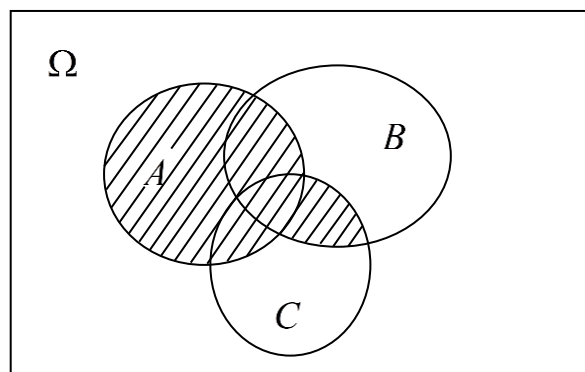


Диаграмма 5. – $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

На диаграмме 2 Эйлера-Венна заштрихованная область представляет собой левую часть заданного равенства: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. На диаграмме 5 Эйлера-Венна заштрихованная область представляет собой правую часть заданного равенства: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Заштрихованные области на обеих диаграммах Эйлера-Венна совпадают. Следовательно, указанное равенство справедливо.