

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

12.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 Найти общий интеграл уравнения $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, приходим к уравнению $\operatorname{ctg} y dy = \operatorname{tg} x dx$. Интегрируем: $\int \operatorname{ctg} y dy = \int \operatorname{tg} x dx$, или $\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C$. В данном случае постоянную интегрирования удобнее обозначить через $\ln C$. Из последнего равенства находим: $\sin y = C/\cos x$, или $\sin y \cos x = C$ – общий интеграл заданного уравнения.

12.2.2 Найти частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$, если $y(1) = \pi/2$.

Решение. Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением. Сделаем подстановку $y/x = z$, $y = zx$, $y' = z'x + z$. Приходим к уравнению с разделяющимися переменными $xz' = \sin z$. Разделяем переменные: $\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя уравнение, находим $\ln\left|\operatorname{tg} \frac{z}{2}\right| = \ln|x| + \ln C$, откуда $z = 2\operatorname{arctg} Cx$. Совершая обратную замену, находим общее решение исходного уравнения $y = 2x\operatorname{arctg} Cx$.

Подставляем заданные начальные условия: $\pi/2 = 2\operatorname{arctg} C$, откуда $C = 1$. Искомым частным решением будет функция $y = 2x\operatorname{arctg} x$.

12.2.3 (Спрос и цена товара.) Найти функцию спроса $s = s(p)$ относительно цены p , если известна эластичность $E_p(s) = f(p)$.

Решение. По определению эластичности, $E_p(s) = f(p) = -\frac{p}{s} \frac{ds}{dp}$. Приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными: $\frac{ds}{s} = -\frac{f(p)}{p} dp$.

Его решение $s = Ce^{-\int \frac{f(p)}{p} dp}$ и является функцией спроса.

12.3 Задания для решения на практическом занятии

12.3.1 Найти общий интеграл уравнения $\ln \cos y \, dx + x \operatorname{tg} y \, dy = 0$.

12.3.2 Найти частный интеграл уравнения $yy' + xe^y = 0$, если ...

12.3.3 Найти общее решение уравнения $(x^2 + y^2)dx - xy \, dy = 0$.

12.3.4 Найти частное решение уравнения $xy' = y + xe^{y/x}$, если $y(1) = 0$.

12.3.5 Найти функцию спроса $s = s(p)$ относительно цены p , если известна эластичность $E_p(s) = 10/(p + 10)$. Известно, что при цене 5 д. е. спрос в определённый промежуток времени составил одну у. е.

12.3.6 Найти функцию спроса $s = s(q)$ относительно дохода q , если известна эластичность $E_q(s) = 2q/(2q + 3)$.

12.3.7 Цена товара вначале составляла 36 д. е., а через t дней – $p(t)$. Спрос и предложение определяются уравнениями $s = 120 - 2p + 5p'_t$ и $r = -30 + 3p + 50p'_t$, соответственно. Найти закон изменения цены товара, при котором для каждого значения t сохраняется равновесие.

12.3.8 Полные издержки $C = C(v)$ есть функция объёма производства v . Найдите функцию издержек, если известно, что предельные издержки для всех значений v равны средним издержкам.

12.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

12.4.1 Найти общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения.

12.4.1.1 $(x^2 - y^2) dy = 2 \cdot x \cdot y dx.$

12.4.1.2 $y \cdot (\ln y - \ln x) dx - x dy = 0.$

12.4.1.3 $(x \cdot y' - y) \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x.$

12.4.1.4 $\frac{x}{y} dy = \frac{x}{y} \cdot e^{\frac{y}{x}} dx + dx.$

12.4.1.5 $(y + x) dy = (y - x) dx.$

12.4.1.6 $x dy = y \cdot (1 - \ln x + \ln y) dx.$

12.4.1.7 $x \cdot y' = x \cdot \cos \frac{y}{x} + y.$

12.4.1.8 $x dy = \left(y + x \cdot \sin \frac{y}{x} \right) dx.$

12.4.1.9 $y' = (x + y)/(x - y).$

12.4.1.10 $y = x \cdot (y' - \sqrt[3]{e^y}).$

12.4.1.11 $x \cdot y + y^2 = (2 \cdot x^2 + x \cdot y) \cdot y'.$

12.4.1.12 $(2 \cdot \sqrt{x \cdot y} - y) dx + x dy = 0.$

12.4.1.13 $x \cdot y' + y \cdot \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) = 0.$

12.4.1.14 $(x^2 + y^2) dx + 2 \cdot x \cdot y dy = 0.$

12.4.1.15 $(y^2 - 2 \cdot x \cdot y) dx - x^2 dy = 0.$

12.4.1.16 $(x^2 - y^2) dx + 2 \cdot x \cdot y dy = 0.$

12.4.1.17 $(x + 2 \cdot y) dx + x dy = 0.$

12.4.1.18 $(2 \cdot x - y) dx + (x + y) dy = 0.$

12.4.1.19 $2 \cdot x^3 \cdot y' = y \cdot (2 \cdot x^2 - y^2).$

12.4.1.20 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$

12.4.1.21 $x dy = \sqrt{x^2 - y^2} dx + y dx.$

12.4.1.22 $x dy = y dx + x \cdot \cos^2 \frac{y}{x} dx.$

12.4.1.23 $x \cdot y' = y + 2 \cdot \sqrt{y^2 + 9 \cdot x^2}.$

12.4.1.24 $x^2 dy = x \cdot y dx + y^2 \cdot e^{-x/y} dx.$

12.4.1.25 $xyy' = y^2 + 2x^2.$

12.4.1.26 $2 \cdot x^2 dy = (x^2 + y^2) dx.$

12.4.1.27 $x dy - y dx = y dy.$

12.4.1.28 $(2\sqrt{x \cdot y} - y) dx + x dy = 0.$

12.4.1.29 $(y + \sqrt{x \cdot y}) dx = x dy.$

12.4.1.30 $\sqrt{y^2 + x^2} dx = y dx - x dy.$

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

13.2 Примеры решения типовых задач

13.2.1 Найти частное решение уравнения $y' - y \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$, если $y(0) = 1$.

Решение. Задано линейное уравнение. Решим его по методу Бернулли. Положим $y = uv$. Тогда $u'v + v'u - uv \operatorname{th} x = \operatorname{ch}^2 x$ или $u'v + u(v' - v \operatorname{th} x) = \operatorname{ch}^2 x$. Полагаем $v' - v \operatorname{th} x = 0$, откуда $\frac{dv}{v} = \operatorname{th} x dx$; интегрируя, находим: $\ln|v| = \ln|\operatorname{ch} x|$, или $v = \operatorname{ch} x$ (постоянную интегрирования не вводим, так как нам достаточно найти какое-либо решение этого вспомогательного уравнения).

Для определения u решим уравнение $u'v = \operatorname{ch}^2 x$ или $u' \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 x$. Откуда находим $u = \int \operatorname{ch} x dx + C = \operatorname{sh} x + C$. Умножая u на v , записываем общее решение заданного уравнения $y = \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + C)$. По начальному условию $y(0) = 1$ находим произвольную постоянную C : $1 = \operatorname{ch} 0 (\operatorname{sh} 0 + C)$, откуда $C = 1$. Следовательно, искомое частное решение $y = \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + 1)$.

13.2.2 Найти общее решение уравнения $y' - y/x = x$.

Решение. Задано линейное уравнение. Решим его методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Интегрируем соответствующее однородное уравнение $\bar{y}' - \frac{\bar{y}}{x} = 0$, разделив переменные $\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} - \frac{dx}{x} = 0$, $\ln|\bar{y}| - \ln|x| = \ln C$, $\bar{y} = Cx$. Найдём решение исходного неоднородного уравнения в виде $y = C(x)x$, где $C(x)$ – неизвестная функция.

Внося в исходное уравнение $y = C(x)x$ и $y' = C'(x)x + C(x)$, придём к уравнению $C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x$ или $C'(x) = 1$, откуда $C(x) = x + C$. Таким образом, общим решением исходного уравнения будет функция $y = x^2 + Cx$.

13.2.3 Найти общее решение уравнения $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4\sqrt{y} \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Задано уравнение Бернулли. Проинтегрируем его методом Бернулли, для чего положим $y = uv$. Подставляя в исходное уравнение $y = uv$ и $y' = u'v + v'u$, сгруппируем члены, содержащие u в первой степени:

$$u'v + u \left(v' - \frac{2xv}{1+x^2} \right) = \frac{4\sqrt{uv} \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Примем за v какое-либо частное решение уравнения $v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0$. Разделяя в нём переменные, находим: $\frac{dv}{v} = \frac{2x dx}{1+x^2}$, откуда $\ln|v| = \ln(1+x^2)$ или $v = 1+x^2$.

Для нахождения u имеем уравнение $u'v = \frac{4\sqrt{uv} \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$, или (поскольку $v=1+x^2$)

$u'v = \frac{4\sqrt{u} \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx, \quad \sqrt{u} = \operatorname{arctg}^2 x + C, \quad u = (\operatorname{arctg}^2 x + C)^2.$$

Таким образом, $y = (1+x^2)(\operatorname{arctg}^2 x + C)^2$ – общее решение уравнения.

13.2.4 Найти общий интеграл уравнения $(x+y-1)dx + (e^y+x)dy = 0$.

Решение. Здесь $P(x,y) = x+y-1$, $Q(x,y) = e^y+x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, таким

образом, условие полного дифференциала выполнено, то есть данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдём общий интеграл по формуле (13.1.9), положив в ней $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

$$\int_0^x (x+y-1)dx + \int_0^y e^y dy = C_0, \quad \left(\frac{1}{2}x^2 + xy - x \right) \Big|_0^x + e^y \Big|_0^y = C_0.$$

Подставляя пределы интегрирования, находим общий интеграл уравнения $x^2/2 + xy - x + e^y = C$, где $C = C_0 + 1$.

13.3 Задания для решения на практическом занятии

13.3.1 Найти общее решение уравнения $xy' - y = x^2 \cos x$.

13.3.2 Найти общее решение уравнения $y' \cos x + y = 1 - \sin x$.

13.3.3 Найти частное решение уравнения $y' - \frac{4y}{x} = \frac{6}{x^4}$, если $y(1) = 0$.

13.3.4 Найти общее решение уравнения $y' = \frac{y}{y^4 + 2x}$.

13.3.5 Найти общее решение уравнения $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$.

13.3.6 Найти частное решение уравнения $y' + y = e^{x/2} \sqrt{y}$, если $y(0) = \frac{9}{4}$.

13.3.7 Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + \sin y)dx + (x \cos y + 1)dy = 0$.

13.3.8 Найти частный интеграл уравнения $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$, при заданном начальном условии $y(0) = 2$.

13.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

13.4.1 Найти общее решение дифференциального уравнения.

13.4.1.1 $y' \sin x - y \cos x = \sin^2 x.$

13.4.1.2 $(x+1)y' + y = x^2.$

13.4.1.3 $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x.$

13.4.1.4 $y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x.$

13.4.1.5 $y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}.$

13.4.1.6 $y' + \frac{x \cdot y}{1-x^2} = x + \arcsin x.$

13.4.1.7 $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = 4 \cdot x^3 \cdot \sec x.$

13.4.1.8 $x \cdot y' + y - 3 \cdot \sin x = 0.$

13.4.1.9 $xy' + y - 2x^2 = 0.$

13.4.1.10 $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}.$

13.4.1.11 $x \cdot y' - 2 \cdot y + x^2 = 0.$

13.4.1.12 $(x+1) \cdot y' + y = x^3 + x^2.$

13.4.1.13 $(x^2-1) \cdot y' - x \cdot y = x^3 - x.$

13.4.1.14 $x \cdot y' + y = \sin x.$

13.4.1.15 $y' \cdot \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} x.$

13.4.1.16 $(1-x^2) \cdot y' + x \cdot y = 1.$

13.4.1.17 $y' - 2 \cdot x \cdot y = x \cdot e^{-x^2}.$

13.4.1.18 $x^2 \cdot y' = 2 \cdot x \cdot y + 3.$

13.4.1.19 $x \cdot y' + y = \ln x + 1.$

13.4.1.20 $y' - 3 \cdot x^2 \cdot y - x^2 \cdot e^{x^3} = 0.$

13.4.1.21 $(1+x^2)y' - 2xy = 3x^2(1+x^2)^2.$

13.4.1.22 $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \sec x.$

13.4.1.23 $y' = 2 \cdot y \cdot \sin^2 x + 2 \cdot x \cdot e^{x - \frac{1}{2}x^2}.$

13.4.1.24 $\sin 2x \, dy = 2 \cdot (y + \cos x) \, dx.$

13.4.1.25 $x \cdot y' + y - e^x = 0.$

13.4.1.26 $x \cdot (x-1) \cdot y' + y = x^2 \cdot (2x-1).$

13.4.1.27 $y' + 2 \cdot y \cdot \operatorname{tg} x = x \cdot \cos^3 x.$

13.4.1.28 $y' - 2 \cdot y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin^3 x.$

13.4.1.29 $x \cdot y' - y + \ln x = 0.$

13.4.1.30 $y' - y \cdot \cos x = -\sin 2x.$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

14.2 Примеры решения типовых задач

14.2.1 Найти частное решение уравнения $y''' = 24x - 16\cos 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$, $y''(0) = 6$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению первого типа. Найдём его решение путём трёхкратного интегрирования.

Интегрируем уравнение: $y'' = \int (24x - 16\cos 2x) dx + C_1 = 12x^2 - 8\sin 2x + C_1$. Используя начальное условие $y''(0) = 6$, получаем, что $C_1 = 6$, а, следовательно, $y'' = 12x^2 - 8\sin 2x + 6$. Интегрируем полученное дифференциальное уравнение: $y' = \int (12x^2 - 8\sin 2x + 6) dx = 4x^3 + 4\cos 2x + 6x + C_2$. Используя начальное условие $y'(0) = 8$, получаем, что $C_2 = 4$, а, следовательно, $y' = 4x^3 + 4\cos 2x + 6x + 4$. Интегрируем полученное уравнение: $y = \int (4x^3 + 4\cos 2x + 6x + 4) dx + C_3 = x^4 + 2\sin 2x + 3x^2 + 4x + C_3$. Используя начальное условие $y(0) = 3$, получаем, что $C_3 = 3$, а, следовательно, $y = x^4 + 2\sin 2x + 3x^2 + 4x + 3$ – частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

14.2.2 Найти общее решение уравнения $y'' = y'/x$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к уравнению второго типа. Сделаем замену $y' = z$, тогда $y'' = z'$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $z' = z/x$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Записав это уравнение в дифференциальной форме и разделив переменные, получаем равносильное уравнение $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируем последнее уравнение: $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C_1$, $\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$, $z = C_1 x$. Возвращаясь к переменной y , приходим к уравнению $y' = C_1 x$. Из него находим общее решение исходного уравнения: $y = \int C_1 x dx = C_1 x^2 / 2 + C_2$.

14.2.3 Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{y'^2}{y}$.

Решение. Данное уравнение, которое является дифференциальным уравнением высшего порядка, допускающее понижение порядка, относится к

уравнению третьего типа. Выполнив замену $y' = p(y)$, с учётом того, что $y'' = p \frac{dp}{dy}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка $p \frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y}$, которое равносильно совокупности двух уравнений $p = 0$ и $\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}$. Первое уравнение, после обратной замены, принимает вид $y' = 0$, а его решение $y = C$. Разделив переменные во втором уравнении $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, и интегрируя его, находим решение уравнения: $p = C_1 y$. Учитывая, что $p = y'$, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка $y' = C_1 y$ или $\frac{dy}{y} = C_1 dx$. Интегрируем последнее уравнение: $\int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx + \ln C_2$, $\ln|y| = C_1 x + \ln C_2$, $y = C_2 e^{C_1 x}$. Функции $y = C$ и $y = C_2 e^{C_1 x}$ являются общими решениями исходного уравнения.

14.3 Задания для решения на практическом занятии

14.3.1 Найти общее решение уравнения $y''' \sin^4 x = \sin 2x$.

14.3.2 Найти частное решение уравнения $y''' = xe^{-x}$, при заданных начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

14.3.3 Найти частное решение уравнения $y^{IV} = \cos^2 x$, при заданных начальных условиях $y(0) = 1/32$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1/8$, $y'''(0) = 0$.

14.3.4 Найти общее решение уравнения $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$.

14.3.5 Найти частное решение уравнения $(x - 1)y'' - y' = x(x - 1)^2$, при заданных начальных условиях $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

14.3.6 Найти общее решение уравнения $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.

14.3.7 Найти частное решение уравнения $yy'' - y'^2 = 0$, при заданных начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

14.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

14.4.1 Найти общее решение дифференциального уравнения.

14.4.1.1 $xy'' = y' \ln(y'/x).$

14.4.1.2 $xy'' + y' = \ln(y'/x).$

14.4.1.3 $y'' \operatorname{tg} x - y' = 1.$

14.4.1.4 $xy'' - y' = x^2 e^x.$

14.4.1.5 $x^2 y'' + xy' = 1.$

14.4.1.6 $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$

14.4.1.7 $xy''' + y'' = 1/\sqrt{x}.$

14.4.1.8 $xy'' + y' = \ln x.$

14.4.1.9 $y'' \ln x - y'/x = 0.$

14.4.1.10 $xy''' - 2y'' = -2/x^2.$

14.4.1.11 $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3.$

14.4.1.12 $x^4 y'' + x^3 y' = 4.$

14.4.1.13 $(x+1)y''' + y'' = (x+1).$

14.4.1.14 $xy''' + y'' = \sqrt{x}.$

14.4.1.15 $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x.$

14.4.1.16 $y''' + y''/x = 1/\sqrt{x^5}.$

14.4.1.17 $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = x^3.$

14.4.1.18 $xy''' - y'' + 1/x = 0.$

14.4.1.19 $y'' - y'/(x-1) = x^2 - x.$

14.4.1.20 $2xy'y'' - y'^2 = 1.$

14.4.1.21 $y'' + 2xy'/(x^2 + 1) = 2x.$

14.4.1.22 $xy''' - y'' = 0.$

14.4.1.23 $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0.$

14.4.1.24 $xy'' - y' = x^2.$

14.4.1.25 $y''(e^x + 1) + y' = 0.$

14.4.1.26 $y'' + y' = \sin x.$

14.4.1.27 $xy'' + xy'^2 - y' = 0.$

14.4.1.28 $y'' - y'/x = x^2/y'.$

14.4.1.29 $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

14.4.1.30 $y'' = y' + x.$

ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

15.2 Примеры решения типовых задач

15.2.1 Найти решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$, если $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda = 2$ или $\lambda = 3$. Корни характеристического уравнения действительны и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$. Тогда, согласно формуле (15.1.2), находим общее решение $y_{o.o} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Воспользуемся начальными условиями: $C_1 + C_2 = 3$, $2C_1 + 3C_2 = 8$. Откуда $C_1 = 1$, а $C_2 = 2$. Следовательно, искомое решение будет $y_{o.o} = e^{2x} + 2e^{3x}$.

15.2.2 Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2,3} = 1$ – корень кратности $k = 3$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2 e^x$. Тогда, согласно формуле (15.1.2), находим общее решение $y_{o.o} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$.

15.2.3 Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. Корни характеристического уравнения комплексные и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^{3x} \cos 2x$, $y_2 = e^{3x} \sin 2x$. Тогда, согласно формуле (15.1.2), находим общее решение $y_{o.o} = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$.

15.2.4 Найти общее решение уравнения $y'' - y' = e^{2x} \sin e^x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y' = 0$. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda = 0$. Находим корни этого уравнения: $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Корни характеристического уравнения действительны и различные, а, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид: $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$, $y_2 = e^x$. Тогда, согласно формуле (15.1.2),

находим общее решение $y_{o.o} = C_1 + C_2 e^x$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{ч.н} = C_1(x) + C_2(x)e^x$.

Для определения произвольных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему уравнений вида (15.1.7):

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0, \\ C_2'(x)e^x = e^{2x} \sin e^x. \end{cases}$$

Решая систему, имеем $C_2(x) = -\cos e^x$, $C_1(x) = e^x \cos e^x - \sin e^x$. Следовательно, частное решение заданного неоднородного уравнения может быть записано в виде $y_{ч.н} = -\sin e^x$.

Согласно формуле (15.1.5), получаем общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения: $y_{o.н} = C_1 + C_2 e^x - \sin e^x$.

15.3 Задания для решения на практическом занятии

15.3.1 В задачах 15.3.1.1 – 15.3.1.9 найти фундаментальную систему решений и общее решение для линейных однородных дифференциальных уравнений.

15.3.1.1 $y'' - 6y' + 8y = 0$. **15.3.1.2** $y'' + y' - 2y = 0$. **15.3.1.3** $y'' - 4y' = 0$.

15.3.1.4 $y'' + 4y' + 4y = 0$. **15.3.1.5** $y'' + 6y' + 9y = 0$. **15.3.1.6** $y'' - 2y' + y = 0$.

15.3.1.7 $y'' + 6y' + 25y = 0$. **15.3.1.8** $y'' - 4y' + 5y = 0$. **15.3.1.9** $y'' + 4y = 0$.

15.3.2 В задачах 15.3.2.1 – 15.3.2.4 найти фундаментальную систему решений и общее решение для линейных однородных дифференциальных уравнений.

15.3.2.1 $y''' + 6y'' + 12y' + 8 = 0$.

15.3.2.2 $y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0$.

15.3.2.3 $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$.

15.3.2.4 $y^{\text{IV}} + 5y''' + 4y = 0$.

15.3.3 Найти решение уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

15.3.4 Решить задачу Коши: $y''' - 2y'' = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = 8$.

15.3.5 Найти общее решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = 1/(1 + e^{2x})$.

15.3.6 Решить задачу Коши: $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

15.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

15.4.1 Найти общее решение дифференциальных уравнений

15.4.2

- 15.4.1.1 а) $y'' + 3y' - 18y = 0$; б) $y'' + 4y' + 4y = 0$; в) $y'' + 4y' + 5y = 0$.
- 15.4.1.2 а) $y'' - 11y' + 18y = 0$; б) $y'' - 28y' + 196y = 0$; в) $y'' + 25y = 0$.
- 15.4.1.3 а) $y'' + y' - 20y = 0$; б) $y'' + 8y' + 16y = 0$; в) $2y'' + 2y' + y = 0$.
- 15.4.1.4 а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 22y' + 121y = 0$; в) $y'' + y = 0$.
- 15.4.1.5 а) $y'' + 11y' + 28y = 0$; б) $y'' + 16y' + 64y = 0$; в) $16y'' + y = 0$.
- 15.4.1.6 а) $y'' - 7y' + 12y = 0$; б) $y'' - 14y' + 49y = 0$; в) $y'' - 2y' + 2y = 0$.
- 15.4.1.7 а) $y'' + 4y' - 32y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $36y'' + 25y = 0$.
- 15.4.1.8 а) $y'' - 7y' + 10y = 0$; б) $y'' - 26y' + 169y = 0$; в) $5y'' - 2y' + y = 0$.
- 15.4.1.9 а) $y'' + 12y' + 32y = 0$; б) $y'' + 20y' + 100y = 0$; в) $25y'' + y = 0$.
- 15.4.1.10 а) $y'' - 8y' + 15y = 0$; б) $y'' - 18y' + 81y = 0$; в) $y'' + 4y = 0$.
- 15.4.1.11 а) $y'' + 4y' - 21y = 0$; б) $y'' + 12y' + 36y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
- 15.4.1.12 а) $y'' - 9y' + 20y = 0$; б) $y'' - 8y' + 64y = 0$; в) $9y'' + 25y = 0$.
- 15.4.1.13 а) $y'' - 4y' - 21y = 0$; б) $y'' + 18y' + 81y = 0$; в) $5y'' + 4y' + y = 0$.
- 15.4.1.14 а) $y'' - 8y' + 12y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $4y'' + 25y = 0$.
- 15.4.1.15 а) $y'' - 5y' - 24y = 0$; б) $y'' + 26y' + 169y = 0$; в) $81y'' + y = 0$.
- 15.4.1.16 а) $y'' - 9y' + 18y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $y'' - 4y' + 5y = 0$.
- 15.4.1.17 а) $y'' - 7y' - 18y = 0$; б) $y'' + 28y' + 196y = 0$; в) $4y'' + 9y = 0$.
- 15.4.1.18 а) $y'' - 10y' + 24y = 0$; б) $y'' - 24y' + 144y = 0$; в) $9y'' + y = 0$.
- 15.4.1.19 а) $y'' - 3y' - 10y = 0$; б) $y'' + 14y' + 49y = 0$; в) $y'' - 2y' + 5y = 0$.
- 15.4.1.20 а) $y'' - 9y' + 14y = 0$; б) $y'' - 16y' + 64y = 0$; в) $y'' + 81y = 0$.
- 15.4.1.21 а) $y'' + 3y' - 18y = 0$; б) $y'' + 30y' + 225y = 0$; в) $25y'' + 36y = 0$.
- 15.4.1.22 а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' - 6y' + 9y = 0$; в) $5y'' - 4y' + y = 0$.
- 15.4.1.23 а) $y'' + 7y' - 18y = 0$; б) $y'' + 22y' + 121y = 0$; в) $49y'' + 4y = 0$.
- 15.4.1.24 а) $y'' - 11y' + 28y = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 0$; в) $2y'' - 2y' + y = 0$.
- 15.4.1.25 а) $y'' + 2y' - 15y = 0$; б) $y'' + 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 9y = 0$.
- 15.4.1.26 а) $y'' - 10y' + 16y = 0$; б) $y'' - 20y' + 100y = 0$; в) $16y'' + 49y = 0$.
- 15.4.1.27 а) $y'' - 3y' - 28y = 0$; б) $y'' + 24y' + 576y = 0$; в) $5y'' + 2y' + y = 0$.
- 15.4.1.28 а) $y'' - 11y' + 24y = 0$; б) $y'' - 12y' + 36y = 0$; в) $4y'' + y = 0$.
- 15.4.1.29 а) $y'' - 12y' + 32y = 0$; б) $y'' + 2y' + y = 0$; в) $y'' + 16y = 0$.
- 15.4.1.30 а) $y'' + 11y' + 30y = 0$; б) $y'' - 30y' + 225y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

16.2 Примеры решения типовых задач

16.2.1 Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 130 \cdot \sin 3x$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, $y_{o.o.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $130 \cdot \sin 3x = e^{0x} (0 \cdot \cos 3x + 130 \cdot \sin 3x)$, причём $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 3i = \pm 3i$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда, частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.} = A \cos 3x + B \sin 3x$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем

$$(-7A - 9B) \cos 3x + (9A - 7B) \sin 3x = 130 \cdot \sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях $\cos 3x$ и $\sin 3x$, получаем $A = 9$, $B = -7$. Тогда $y_{ч.н.} = 9 \cos 3x - 7 \sin 3x$. Следовательно, согласно формуле (15.1.5), общее решение уравнения: $y_{o.n.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 9 \cos 3x - 7 \sin 3x$.

16.2.2 Найти общее решение уравнения $y'' - 8y' + 20y = 10e^{5x}$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y'' - 8y' + 20y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 4 \pm 2i$. Следовательно, $y_{o.o.} = C_1 e^{4x} \cos 2x + C_2 e^{4x} \sin 2x$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $10e^{5x} = e^{5x} (10 \cdot \cos(0 \cdot x) + Q_m(x) \cdot \sin(0 \cdot x))$, причём $\alpha \pm \beta i = 5 \pm 0i = 5$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.} = Ae^{5x}$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем $5Ae^{5x} = 10 \cdot e^{5x}$. Откуда получаем $A = 2$. Тогда $y_{ч.н.} = 2e^{5x}$. Следовательно, согласно формуле (15.1.5), общее решение уравнения: $y_{o.n.} = C_1 e^{4x} \cos 2x + C_2 e^{4x} \sin 2x + 2e^{5x}$.

16.2.3 Найти общее решение уравнения $y''' - 4y'' = 48x^2 - 48x - 10$.

Решение. Составляем соответствующее однородное уравнение $y''' - 4y'' = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^3 - 4\lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 4$. Следовательно, $y_{o.o.} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x}$.

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $48x^2 - 48x - 10 = e^{0x}((48x^2 - 48x - 10) \cdot \cos(0 \cdot x) + Q_m(x) \cdot \sin(0 \cdot x))$, причём $\alpha \pm \beta i = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 2. Тогда, частное решение можно записать в виде $y_{ч.н.} = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$. После дифференцирования функции $y_{ч.н.}$ и подстановки её производных в исходное уравнение, имеем

$$-48Ax^2 + (24A - 24B)x + 6B - 8C = 48x^2 - 48x - 10.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем $A = -1$, $B = 1$, $C = 2$. Тогда, $y_{ч.н.} = -x^4 + x^3 + 2x^2$. Следовательно, согласно формуле (15.1.5), общее решение уравнения: $y_{о.н.} = C_1 + C_2x + C_3e^{4x} - x^4 + x^3 + 2x^2$.

16.3 Задания для решения на практическом занятии

16.3.1 Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' - 6y = 19 \cdot \sin x + 3 \cos x$.

16.3.2 Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 10e^{3x}$.

16.3.3 Найти общее решение уравнения $y'' + 8y' = 60x^2 - 32x^3 + 18x$.

16.3.4 Решить задачу Коши: $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.

16.3.5 Решить задачу Коши: $y'' + y = \cos 3x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 1$.

16.3.6 Найти частное решение уравнения $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

16.3.7 Найти общее решение уравнения $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

16.3.8 Найти общее решение уравнения $y''' + y'' - 2y' = x - e^x$.

16.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

16.4.1 Найти общее решение дифференциального уравнения.

16.4.1.1 $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.

16.4.1.2 $y'' + 2y' + 10y = 50x^2 - 30$.

16.4.1.3 $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$.

16.4.1.4 $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

16.4.1.5 $y'' + 4y' = e^x(\cos x + \sin x)$.

16.4.1.6 $y'' - 6y' + 13y = -3 \cos 2x$.

16.4.1.7 $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$.

16.4.1.8 $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$.

16.4.1.9 $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.

16.4.1.10 $y'' + y = 4xe^x$.

- 16.4.1.11 $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x$. 16.4.1.12 $y'' - 4y' + 5y = (3\sin x + \cos x)e^{-2x}$.
- 16.4.1.13 $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$. 16.4.1.14 $y'' + y' + y = 6e^{-x}$.
- 16.4.1.15 $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$. 16.4.1.16 $y'' + 16y = 8\cos 4x$.
- 16.4.1.17 $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$. 16.4.1.18 $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$.
- 16.4.1.19 $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$. 16.4.1.20 $y'' - y' - 6y = 9\cos x - \sin x$.
- 16.4.1.21 $y'' - y' + y = -13\sin 2x$. 16.4.1.22 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x$.
- 16.4.1.23 $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$. 16.4.1.24 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.
- 16.4.1.25 $y'' - y = -4\cos x + 2\sin x$. 16.4.1.26 $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.
- 16.4.1.27 $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$. 16.4.1.28 $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$.
- 16.4.1.29 $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x$. 16.4.1.30 $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$.

16.4.2 Найти решение уравнения при $y(0) = y'(0) = 0$.

- 16.4.2.1 $y'' - 2y' + y = 16e^x$. 16.4.2.2 $y'' + 9y = 36e^{3x}$.
- 16.4.2.3 $y'' - 9y = e^{-2x}$. 16.4.2.4 $y'' + 9y = \cos 3x$.
- 16.4.2.5 $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$. 16.4.2.6 $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x$.
- 16.4.2.7 $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 + 2$. 16.4.2.8 $y'' - 10y' + 25y = (2x - 1)e^{5x}$.
- 16.4.2.9 $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 2x$. 16.4.2.10 $y'' + 9y = 15\sin 2x$.
- 16.4.2.11 $y'' + y' = 2x^2e^x$. 16.4.2.12 $y'' + 3y' + 2y = 1 + x + x^2$.
- 16.4.2.13 $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}$. 16.4.2.14 $y'' + 2y' + y = \cos x$.
- 16.4.2.15 $y'' + y' = 2x + x^2$. 16.4.2.16 $y''' - y' = 6 - 3x^2$.
- 16.4.2.17 $y''' + y'' = \sin x$. 16.4.2.18 $y''' - 2y'' + y' = 4$.
- 16.4.2.19 $y'' + y' - 2y = \cos x - \sin x$. 16.4.2.20 $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}$.
- 16.4.2.21 $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$. 16.4.2.22 $y'' - 8y' + 16y = (2x - 3)e^{4x}$.
- 16.4.2.23 $y'' - 10y' + 25y = (x + 1)e^x$. 16.4.2.24 $y'' + 4y = 4e^{7x}$.
- 16.4.2.25 $y'' - y' = 2(1 - x)$. 16.4.2.26 $y'' - 8y' + 16y = (x + 6)e^{4x}$.
- 16.4.2.27 $y'' - 5y' + 6y = (2x - 7)e^{-x}$. 16.4.2.28 $y'' + y' = 2x\cos x$.
- 16.4.2.29 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. 16.4.2.30 $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}$.

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

17.2 Примеры решения типовых задач

17.2.1 Решить систему методом исключения.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение системы по переменной t :

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$. Вместо $\frac{dy}{dt}$, стоящей в правой части, подставим её значение из второго

уравнения системы. В результате получаем однородное линейное

дифференциальное уравнение второго порядка: $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$. Составляем

характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$, корнями которого являются числа

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Тогда фундаментальная система решений имеет вид: $x_1(t) = e^t$,

$x_2(t) = e^{-t}$. Общее решение
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = \frac{dx}{dt} = C_1 e^t - C_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Методом исключения найти общее решение однородной системы

17.2.2 Методом исключения найти общее решение однородной системы.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Решить задачу Коши при заданных начальных условиях

$$y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1.$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение системы по переменной x :

$$y_1'' = y_2' + y_3' = 2y_1 + y_2 + y_3 = 2y_1 + y_1'$$

Получаем однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами: $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 2$.

Фундаментальная система решений: $y_{11} = e^{-x}$, $y_{12} = e^{2x}$.

Общее решение: $y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Вычитаем из первого уравнения второе: $y'_2 + y_2 = y'_1 + y_1$ и учитывая, что $y'_1 = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$ получим $y'_2 + y_2 = 3C_2 e^{2x}$.

Характеристическое уравнение, для соответствующего однородного уравнения $y'_2 + y_2 = 0$ имеет вид $\lambda + 1 = 0$ или $\lambda = -1$. Ф.С.Р.: $y_{21} = e^{-x}$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y_{2,o.o.} = C_3 e^{-x}$. Правая часть неоднородного уравнения имеет специальный вид, а поэтому $y_{2,ч.н.} = A e^{2x}$, $y'_{2,ч.н.} = 2A e^{2x}$. $2A e^{2x} + A e^{2x} = 3C_2 e^{2x}$, $A = C_2$. Тогда $y_{2,ч.н.} = C_2 e^{2x}$ и $y_2 = y_{2,o.o.} + y_{2,ч.н.} = C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. $y_3 = y'_1 - y_2 = -(C_1 + C_3) e^{-x} + C_2 e^{2x}$. Общее решение исходной системы уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_2 = C_3 e^{-x} + C_2 e^{2x}, \\ y_3 = -(C_1 + C_3) e^{-x} + C_2 e^{2x}. \end{cases}$$

Найдем частное решение, используя начальные условия $y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1$:

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2, \\ 0 = C_3 + C_2, \\ 1 = -(C_1 + C_3) + C_2. \end{cases}$$

Решая систему, находим постоянные величины $C_1 = C_2 = 1, C_3 = -1$. Тогда частное решение исходной системы, удовлетворяющей начальным условиям, запишется в виде:

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x} + e^{2x}, \\ y_2 = -e^{-x} + e^{2x}, \\ y_3 = e^{2x}. \end{cases}$$

17.2.3 Найти общее решение однородной системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Находим собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям из системы.

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma; \quad \gamma_1 = 0$$

$$\text{Тогда } \vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Если } \gamma = 1, \text{ то } \vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{cases} -\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma = 1, \quad \vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ -2\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma = 1; \quad \gamma_2 = 0, \quad \vec{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение в векторной форме $\vec{y} = C_1 \vec{\gamma}^1 e^x + C_2 \vec{\gamma}^2 e^{2x} + C_3 \vec{\gamma}^3 e^{3x}$ или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1 = C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \ln |\cos t| \cdot \cos t + t \cdot \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \ln |\cos t| \cdot \sin t + t \cdot \cos t. \end{cases}$$

17.2.4 Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$$

Найдем собственные векторы, которые соответствуют полученным собственным значениям.

$$\begin{cases} -3i\gamma_1 - 3\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 - 3i\gamma_2 = 0. \end{cases} \quad \gamma_1 = i, \gamma_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений:
$$\begin{cases} y_1 = ie^{(2+3i)x} = e^{2x}(-\sin 3x + i \cos 3x) \\ y_2 = e^{(2+3i)x} = e^{2x}(\cos 3x + i \sin 3x) \end{cases}.$$

Тогда

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} -e^{2x} \sin 3x \\ e^{2x} \cos 3x \end{pmatrix} \quad \vec{v}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \cos 3x \\ e^{2x} \sin 3x \end{pmatrix}$$

Общее решение:
$$\begin{cases} y_1 = -C_1 e^{2x} \sin 3x + C_2 e^{2x} \cos 3x, \\ y_2 = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x. \end{cases}$$

17.2.5 Найти общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dx} = -x + \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Применим методом исключения

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \text{ Характеристическое уравнение: } \lambda^2 + 1 = 0. \text{ Корни уравнения: } \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Фундаментальная система решений: $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$. Общее решение уравнения

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t. \text{ По условию } y = \frac{dx}{dt} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \text{ Тогда общее решение}$$

однородной системы:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

Частное решение неоднородной системы находим в виде:

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, \\ y = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t. \end{cases}$$

Произвольные постоянные $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определим из системы:

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0 \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t} \end{cases} \begin{matrix} \times \sin t \\ + \\ \times \cos t \end{matrix}$$

$$C_2'(t) = 1; \quad C_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$C_2(t) = t; \quad C_1(t) = \ln |\cos t|$$

Частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x = \ln|\cos t| \cdot \cos t + t \cdot \sin t, \\ y = -\ln|\cos t| \cdot \sin t + t \cdot \cos t. \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \ln|\cos t| \cdot \cos t + t \cdot \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \ln|\cos t| \cdot \sin t + t \cdot \cos t. \end{cases}$$

17.3 Задания для решения на практическом занятии

17.3.1 Найти общее решение однородной системы дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} \dot{x} = -7x + y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$$

17.3.2 Найти общее решение однородной системы дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

17.3.3 Найти общее решение однородной системы дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ y'_2 = y_1 + y_2 - y_3, \\ y'_3 = y_1 - y_2. \end{cases}$$

17.3.4 Найти общее решение системы дифференциальных уравнений методом исключения.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + t, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases}$$

17.3.5 Найти общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений методом исключения.

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y + e^t, \\ \dot{y} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

17.3.6 Найти общее решение однородной системы дифференциальных уравнений методом исключения.

$$\begin{cases} y'_1 = 5y_1 + 2y_2 - 3y_3, \\ y'_2 = 4y_1 + 5y_2 - 4y_3, \\ y'_3 = 6y_1 + 4y_2 - 4y_3. \end{cases}$$

17.3.7 Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = -1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0.$$

17.3.8 Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_1, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 1.$$

17.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

17.4.1 Найти общее решение системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами двумя способами: а) методом исключения; б) используя характеристическое уравнение матрицы указанной системы.

17.4.1.1
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$$

17.4.1.2
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 12y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$$

17.4.1.3
$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 4y. \end{cases}$$

17.4.1.4
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 12y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$$

17.4.1.5
$$\begin{cases} \dot{x} = 14x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 12y. \end{cases}$$

17.4.1.6
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 4y. \end{cases}$$

17.4.1.7
$$\begin{cases} \dot{x} = 12x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 10y. \end{cases}$$

17.4.1.8
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{cases}$$

17.4.1.9
$$\begin{cases} \dot{x} = 10x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 8y. \end{cases}$$

17.4.1.10
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$$

17.4.1.11
$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -3x - 2y. \end{cases}$$

17.4.1.12
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

17.4.1.13
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

17.4.1.14
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y, \\ \dot{y} = -2x - 4y. \end{cases}$$

17.4.1.15
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$$

17.4.1.16
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

17.4.1.17
$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y, \\ \dot{y} = x - 6y. \end{cases}$$

17.4.1.18
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

17.4.1.19
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$$

17.4.1.20
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 4y, \\ \dot{y} = -3x - 4y. \end{cases}$$

$$17.4.1.21 \quad \begin{cases} \dot{x} = 6x - 2y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

$$17.4.1.23 \quad \begin{cases} \dot{x} = 8x - 3y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$$

$$17.4.1.25 \quad \begin{cases} \dot{x} = 10x - 8y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$$

$$17.4.1.27 \quad \begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$$

$$17.4.1.29 \quad \begin{cases} \dot{x} = 8x - 6y, \\ \dot{y} = 2x - 5y. \end{cases}$$

$$17.4.1.22 \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x + 8y, \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$$

$$17.4.1.24 \quad \begin{cases} \dot{x} = 4x - 4y, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases}$$

$$17.4.1.26 \quad \begin{cases} \dot{x} = 10x + 11y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$$

$$17.4.1.28 \quad \begin{cases} \dot{x} = 7x + 10y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$$

$$17.4.1.30 \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$$