

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение 12.1.1 *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, которое связывает независимую переменную, функцию и её производные.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной.

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ – общий вид дифференциального уравнения n -го порядка.

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ – нормальный вид дифференциального уравнения n -го порядка.

Решением дифференциального уравнения называется n раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ называется общим решением дифференциального уравнения, а функция $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ – общим интегралом дифференциального уравнения, где $C_i = \text{Const}, i = \overline{1, n}$.

Теорема 12.1.1 (Коши). Если функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ и её частные производные по аргументам $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ определены и непрерывны в окрестности точки $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (12.1.1)$$

Условия (12.1.1) называются начальными условиями, а задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего этим условиям, задачей Коши для дифференциального уравнения.

Рассмотрим *дифференциальные уравнения первого порядка*.

Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка: $F(x, y, y') = 0$.

Нормальный вид дифференциального уравнения 1-го порядка: $y' = f(x, y)$.

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка: $y = \varphi(x, C)$.

Общий интеграл дифференциального уравнения 1-го порядка:
 $\Phi(x, y, y') = 0$.

Теорема 12.1.2 (Коши). Если функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0) , то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

С геометрической точки зрения это означает, что через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения.

Существуют различные виды дифференциальных уравнений первого порядка. Найдём общие решения основных типов этих уравнений.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 12.1.2 Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (12.1.2)$$

где $M_1(x), N_1(y), M_2(x), N_2(y)$ – заданные функции, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Если $N_1(y) \neq 0$ и $M_2(x) \neq 0$, то, разделив обе части уравнения (12.1.2) на произведение $N_1(y)M_2(x)$, получим равносильное уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \quad (12.1.3)$$

Уравнение (12.1.3) называется *дифференциальным уравнением с разделёнными переменными*.

Проинтегрировав уравнение (12.1.3), находим общий интеграл дифференциального уравнения (12.1.2):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C. \quad (12.1.4)$$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 12.1.3 Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией* измерения α относительно переменных x и y , если справедливо тождество

$$f(tx,ty)=t^{\alpha} f(x,y), \quad \forall t \in R, t \neq 0.$$

Определение 12.1.4 Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (12.1.5)$$

называется *однородным*, если $P(x,y), Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Разрешив уравнение (12.1.5) относительно производной, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \quad (12.1.6)$$

Поскольку $P(x,y), Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения, то функция, стоящая в правой части уравнения (12.1.6), является однородной функцией нулевого измерения. Следовательно, $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Таким образом, однородное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (12.1.7)$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $\frac{y}{x} = u$. Тогда $y' = u'x + u$, а уравнение (12.1.7) принимает вид $u'x + u = f(u)$. Общий интеграл уравнения (12.1.7): $\int \frac{du}{f(u) - u} - \ln|x| = C$. Выполнив обратную замену, находим общий интеграл первоначального уравнения.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение 13.1.1 Уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (13.1.1)$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – заданные функции, которые являются линейными относительно неизвестной функции y и её производной, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае – *линейным неоднородным*.

Существуют различные методы решения линейных уравнений.

Линейные дифференциальные уравнения можно интегрировать методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Пусть задано неоднородное линейное дифференциальное уравнение (13.1.1). Записываем соответствующее однородное уравнение $y' + P(x)y = 0$. Разделяя переменные в однородном уравнении, находим его общее решение $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$, где C – произвольная постоянная.

Общее решение неоднородного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения по методу Лагранжа, варьируя произвольную постоянную, то есть, полагая $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, где $C(x)$ – некоторая, подлежащая определению, дифференцируемая функция от переменной x . Для нахождения $C(x)$ подставляем функцию y в исходное уравнение (13.1.1), что приводит к уравнению $C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$. Отсюда $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$, где C – произвольная постоянная. Тогда искомое общее решение неоднородного линейного уравнения будет иметь вид

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right). \quad (13.1.2)$$

Линейные дифференциальные уравнения можно интегрировать также методом Бернулли, который заключается в следующем. Полагая $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ две неизвестные функции, преобразуем исходное уравнение к виду

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x), \quad (13.1.3)$$

или

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \quad (13.1.4)$$

Функцию $v = v(x)$ находим как частное решение уравнения $v' + P(x)v = 0$. Разделяя переменные в уравнении, находим функцию $v = e^{-\int P(x)dx}$. Уравнение (13.1.4) приводится к уравнению $u'v = Q(x)$ или $u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$, из которого находим функцию $u = u(x)$: $u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$. Умножая u на v , находим для решения уравнения (13.1.1) прежнее выражение:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Определение 13.1.2 Дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1) \quad (13.1.5)$$

называется *уравнением Бернулли*.

Уравнение Бернулли можно преобразовать в линейное уравнение, выполнив замену неизвестной функции при помощи замены $z = y^{1-\alpha}$, которая преобразует исходное уравнение в уравнение $\frac{1}{1-\alpha} z' + P(x)z = Q(x)$.

При интегрировании конкретных уравнений Бернулли их не обязательно преобразовывать в линейное уравнение, а сразу можно применять либо метод вариации произвольной постоянной, либо метод Бернулли.

Определение 13.1.3 Дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (13.1.6)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Теорема 13.1.1 Уравнение (13.1.6) с непрерывно дифференцируемыми функциями $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (13.1.7)$$

Общий интеграл уравнения (13.1.6) находится по одной из следующих формул:

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C, \quad (13.1.8)$$

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C, \quad (13.1.9)$$

где точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит области определения функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Задача интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков значительно сложнее задачи решения дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений этого типа формулируется также, как и для любых уравнений высшего порядка.

1. Уравнение типа $y^{(n)} = f(x)$.

Общее решение дифференциального уравнения находим методом n -кратного интегрирования. Умножая обе его части на dx и интегрируя, получаем уравнение $(n-1)$ -го порядка: $y^{(n-1)} = \int y^{(n)} dx = \int f(x) dx = \varphi_1(x) + \bar{C}_1$.

Повторяя эту операцию, приходим к уравнению $(n-2)$ -го порядка:

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int (\varphi_1(x) + C_1) dx = \varphi_2(x) + \bar{C}_1 x + \bar{C}_2.$$

После n -кратного интегрирования получаем общее решение уравнения:

$$y = \varphi_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n,$$

где $C_i (i = \overline{1, n})$ – произвольные постоянные величины, связанные определённым образом с произвольными постоянными значениями $\bar{C}_i$.

2. Уравнение типа $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее явно искомую функцию y и её производные до $(k-1)$ -го порядка включительно ($k = \overline{1, n}$).

Порядок такого дифференциального уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию наименьшую из производных данного уравнения, то есть, положив $y^{(k)} = z$. Тогда получим уравнение $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$. Таким образом, порядок уравнения понизили на « k » единиц. Если удастся найти общее решение исходного дифференциального уравнения в виде $z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, то приходим к дифференциальному уравнению высшего порядка, допускающего понижение порядка, первого типа: $z = y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, решение которого находим k -кратным интегрированием. В частности, если $n = 2, k = 1$, то после замены переходим от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка.

3. Уравнение типа $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее явно независимую переменную x .

Порядок этого дифференциального уравнения можно понизить, если выполнить замену $y' = p(y)$, где y рассматривается как аргумент функции y' . В этом случае $y'', y''', \dots$, по правилам дифференцирования сложной функции, выразятся по формулам

$$y'' = p \frac{dp}{dy}, \quad y''' = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2$$

и так далее. В итоге вместо исходного уравнения получаем уравнение вида

$$F_1 \left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right) = 0.$$

Если последнее уравнение имеет общее решение $p = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$, где $p = \frac{dy}{dx}$, то для нахождения общего интеграла исходного уравнения необходимо разделить переменные в уравнении и решить его

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})} = \int dx \quad \text{или} \quad \Phi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = x + C_n.$$

В частности, если $n=2$, то после замены переходим от уравнения второго порядка к уравнению первого порядка.

ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Определение 15.1.1 *Линейным однородным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (15.1.1)$$

где $a_i, i = \overline{1, n}$ – постоянные числа, причём $a_0 \neq 0$.

Определение 15.1.2 Система функций $y_i(x), i = \overline{1, n}$ называется *линейно зависимой* на интервале I , если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля, что для всех $x \in I$ линейная комбинация функций равна нулю, то есть выполняется равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$. Если равенство нулю линейной комбинации выполняется только при нулевых коэффициентах, то система функций называется *линейно независимой*.

Определение 15.1.3 Любая совокупность n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка называется *фундаментальной системой решений*.

Теорема 15.1.1 *Общее решение* линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка представляет собой линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

Таким образом, если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения, то общее решение уравнения (15.1.1) имеет вид

$$y_{o.o} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (15.1.2)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Для нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами составляем *характеристическое уравнение*

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (15.1.3)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – корни характеристического уравнения. Тогда

1) каждому действительному однократному корню λ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будет соответствовать функция

$$y = e^{\lambda x};$$

2) каждому действительному корню λ кратности k в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = xe^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y_k = x^{k-1}e^{\lambda x};$$

3) каждой паре однократных комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

4) каждой паре однократных комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения будут соответствовать функции

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_2 &= e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ y_3 &= x e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_4 &= x e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ &\dots\dots\dots \\ y_{2k-1} &= x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_{2k} &= x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

Приведём схему решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами.

1. Составляем характеристическое уравнение (15.1.3).
2. Находим корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
3. В зависимости от характера корней записываем фундаментальную систему решений.
4. Подставляя фундаментальную систему решений в формулу (15.1.2), получаем общее решение уравнения (15.1.1).

Определение 15.1.4 *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (15.1.4)$$

НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами, которое имеет вид:
 $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$, где $a_i, i = \overline{1, n}$ – постоянные числа, причём $a_0 \neq 0$ и $f(x) \neq 0$. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка равно сумме соответствующего однородного уравнения и произвольного частного решения неоднородного дифференциального уравнения, то есть $y_{o.n} = y_{o.o} + y_{ч.н}$. Предположим, что известно общее решение соответствующего однородного уравнения $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$:

$$y_{o.o} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения, правая часть которых имеет специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (16.1.1)$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степени n и m , соответственно.

Если число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения (15.1.3) для однородного дифференциального уравнения, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения находим по формуле

$$y_{ч.н} = e^{\alpha x} (p_k(x) \cos \beta x + q_k(x) \sin \beta x), \quad (16.1.2)$$

где $p_k(x), q_k(x)$ – многочлены степени $k = \max \{n, m\}$.

Если число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения (15.1.3) кратности r для однородного дифференциального уравнения, то частное решение неоднородного дифференциального уравнения находим по формуле

$$y_{ч.н} = x^s e^{\alpha x} (p_s(x) \cos \beta x + q_s(x) \sin \beta x), \quad (16.1.3)$$

где $p_s(x), q_s(x)$ – многочлены степени $s = \max \{n, m\}$.

Приведём виды частных решений для различных правых частей линейных неоднородных уравнений.

№	Правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Частное решение $y_{ч.н}$ дифференциального уравнения
1	2	3	4
1	$P_n(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$p_n(x)$
		Число 0 является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot p_n(x)$
2	$A \cdot e^{\alpha x}$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$a \cdot e^{\alpha x}$
		Число α является корнем характеристического уравнения, кратности r	$a \cdot x^r \cdot e^{\alpha x}$
3	$e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$
		Число α является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot p_n(x)$
4	$P_n(x) \cdot \sin \beta x$ $(Q_n(x) \cdot \cos \beta x)$	Число $\pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$p_n(x) \cdot \sin \beta x +$ $+ q_n(x) \cdot \cos \beta x$
		Число $\pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot (p_n(x) \cdot \sin \beta x +$ $+ q_n(x) \cdot \cos \beta x)$

1	2	3	4
5	$e^{\alpha x} \cdot P_n(x) \cdot \sin \beta x$ $(e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot \cos \beta x)$	Число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} (p_n(x) \cdot \sin \beta x + q_n(x) \cdot \cos \beta x)$
		Число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (p_n(x) \cdot \sin \beta x + q_n(x) \cdot \cos \beta x)$
6	$e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \sin \beta x + Q_m(x) \cdot \cos \beta x)$	Число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} \cdot (p_s(x) \cdot \sin \beta x + q_s(x) \cdot \cos \beta x)$
		Число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения, кратности r	$x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (p_s(x) \cdot \sin \beta x + q_s(x) \cdot \cos \beta x)$ $s = \max \{n, m\}$

Для определения параметров многочленов применяется *метод неопределённых коэффициентов*. Подставляем частное решение $y_{q,n}$ и его производные в исходное уравнение. Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях многочлена в левой и правой части полученного равенства или при соответствующих тригонометрических функциях, находим соответствующие параметры многочленов $p_s(x)$ и $q_s(x)$.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме различных функций, каждая из которых имеет специальный вид, то для нахождения частного решения такого уравнения необходимо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и будет являться частным решением исходного уравнения.

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.

Пусть материальная точка массой m , под действием силы $\vec{F} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ совершает перемещение в направлении вектора $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ со скоростью $v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right)$. Тогда, согласно второму закону Ньютона $m \cdot \vec{a} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ или $m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$. В координатной форме записи данное векторное дифференциальное уравнение можно записать в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right); \\ m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right); \\ m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = F_z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \end{cases}$$

В результате получена система трех дифференциальных уравнений второго порядка. Если ввести обозначения $\frac{dx}{dt} = u = u(t)$, $\frac{dy}{dt} = v = v(t)$, $\frac{dz}{dt} = w = w(t)$, то система дифференциальных уравнений второго порядка преобразуется в систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} m \cdot \frac{du}{dt} = F_x(t, x, y, z, u, v, w); \\ m \cdot \frac{dv}{dt} = F_y(t, x, y, z, u, v, w); \\ m \cdot \frac{dw}{dt} = F_z(t, x, y, z, u, v, w). \end{cases}$$

Решение системы дифференциальных уравнений представляет множество интегральных кривых. Для определения интегральной кривой, которая проходит через конкретно заданную точку, задают начальные условия

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, & u(t_0) &= u_0, \\ y(t_0) &= y_0, & v(t_0) &= v_0, \\ z(t_0) &= z_0, & w(t_0) &= w_0. \end{aligned}$$

Определение. Нормальной системой дифференциальных уравнений n -го порядка называется система вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{array} \right. \quad (1)$$

Введем векторные обозначения для нормальной системы дифференциальных уравнений (1)

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T; \quad \frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}^T;$$

Тогда систему дифференциальных уравнений (1) можно записать в векторной форме

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad (1^1).$$

Если в данном векторном дифференциальном уравнении отойти от векторов, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение.

Определение. Вектор – функция $\vec{y}_0(x) = [y_1^0 \ y_2^0 \ \dots \ y_n^0]^T$, определенная на интервале $(a; b)$ называется решением системы (1) или (1¹), если она непрерывна и дифференцируема на заданном интервале и подстановка её в систему дифференциальных уравнений, все её уравнения обращаются в тождество.

Задача отыскания решения системы (1) или (1¹), которое удовлетворяет начальным условиям $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ (2¹), записанным в векторной форме, или в координатной форме

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^0; \\ y_2(x_0) = y_2^0; \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = y_n^0 \end{cases} \quad (2)$$

называется задачей Коши, а условия (2) и (2¹) – условиями задачи Коши.

Теорема (существования и единственности задачи Коши). Если в окрестности точки $M_0(x_0; y_1^0; y_2^0; \dots; y_n^0)$ $(n+1)$ – мерного пространства функции f_i (функции, стоящие в правой части системы (1)) непрерывны и имеют ограниченные частные производные $\left(\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq K \right)$, то в δ -окрестности точки x_0 ($x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$) существует и при том единственное решение системы (1) $y_1 = y_1(x); y_2 = y_2(x); \dots; y_n = y_n(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(x_0) = y_1^0; y_2(x_0) = y_2^0; \dots; y_n(x_0) = y_n^0$.

Определение. Общим решением системы дифференциальных уравнений называется система функций $y_i = y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, где $i = \overline{1, \dots, n}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) при любых допустимых константах $C_1, C_2, \dots, C_n$ эта система функций удовлетворяет всем уравнениям системы ДУ;
- 2) при любых начальных условиях $y_i(x_0) = y_i^0, i = \overline{1, \dots, n}$ можно подобрать такие значения постоянных $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$, так чтобы система функций $y_i = y_i(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$.

Решение системы ДУ при определенных значениях постоянных называется частным решением системы.

Между нормальной системой ДУ-н и дифференциальным уравнением n -го порядка существует тесная связь. В частности любое дифференциальное уравнение n -го порядка вида $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ можно свести к нормальной системе n -го порядка.

Пусть $y = y_1$, тогда $y'_1 = y' = y_2$,

$$y'' = y'_2 = y_3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)} = y'_{n-1} = y_n,$$

$$y'_n = y_{n+1}.$$

Тогда приходим к нормальной системы п дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

При определенных условиях решение нормальной системы дифференциальных уравнений можно свести к решению дифференциального уравнения того же порядка. Рассмотрим алгоритм решения поставленной задачи. Продифференцируем первое уравнение системы (1) по переменной x

$$: \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \cdot y_k' = \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \text{ В данном уравнении вместо } y_k'$$

подставляем их значения из системы (1). Полученное равенство снова продифференцируем по переменной x: $\frac{d^3 y_1}{dx^3} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_k} \cdot y_k' = \varphi_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$

и так далее. $\frac{d^n y_1}{dx^n} = \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$. В результате исходная система будет эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} = \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Если можно из (n-1) – первых уравнений полученной системы выразить функции $y_2, y_3, \dots, y_n$ и подставить в последнее уравнение, то получаем дифференциальное уравнение n-го порядка $\frac{d^n y_1}{dx^n} = f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}\right)$. В общем случае порядок ДУ может получиться меньше n. Данный метод решения нормальной системы ДУ называется методом исключения.

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Нормальной линейной системой ДУ называется система вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + \varphi_n(x), \end{array} \right.$$

Данная система является линейной, так как она содержит неизвестные функции и их производные линейно. Введем обозначения:

$$\vec{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T, \quad \vec{\phi}(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \dots \quad \phi_n(x)]^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда в векторной форме систему можно записать в виде $\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{\phi}(x)$.

Если $\vec{\varphi}(x) \equiv 0$, то линейная система называется однородной и в векторной форме однородная система имеет вид: $\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$. Если $\vec{\varphi}(x)$ тождественно не равно нулю, то система называется неоднородной. Применяя метод исключения к нормальной линейной системе, её решение сведется к решению линейного дифференциального уравнения n – ого порядка или меньше. Решение линейных систем обладают свойствами аналогичными ЛДУ – n .

Свойства.

1. Если $\bar{y}$ – решение системы, обращается в нуль хотя бы в одной точке $x_0 \in (a; b)$, то $\bar{y} \equiv 0, \forall x \in (a; b)$.

2. Если $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ являются решениями однородной системы $\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$, то решением этой однородной системы будет вектор-функция $C_1\vec{y}_1(x) + C_2\vec{y}_2(x)$.

Доказательство.

$$A(C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2) = \frac{d}{dx}(C_1\vec{y}_1(x) + C_2\vec{y}_2(x)) = C_1\frac{d\vec{y}_1}{dx} + C_2\frac{d\vec{y}_2}{dx} = C_1A\vec{y}_1 + C_2A\vec{y}_2 = A(C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2).$$

Полученное тождество доказывает свойство.

3. Если $\vec{y}_{o.o.}(x)$ – решение однородной системы $\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$, а $\vec{y}_{ч.н.}(x)$ – частное решение неоднородной системы $\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{\varphi}(x)$, то $\vec{y}_{o.o.}(x) + \vec{y}_{ч.н.}(x)$ – решение неоднородной системы.

Определение. Система функций $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 \vec{y}_1(x) + \alpha_2 \vec{y}_2(x) + \dots + \alpha_n \vec{y}_n(x) = 0$ (3).

Если из равенства (3) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то система функций называется линейно независимой.

Выпишем координаты вектор – функции.

$$\vec{y}_1(x) = [y_{11}(x) \quad y_{21}(x) \quad \dots \quad y_{n1}(x)]^T$$

$$\vec{y}_2(x) = [y_{12}(x) \quad y_{22}(x) \quad \dots \quad y_{n2}(x)]^T$$

.....

$$\vec{y}_n(x) = [y_{1n}(x) \quad y_{2n}(x) \quad \dots \quad y_{mn}(x)]^T$$

Если система линейно зависима, то определитель Вронского (или вронскиан) равен нулю:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема. Для того чтобы система решений $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ однородной нормальной линейной системы была линейно независимой на интервале $(a; b)$, необходимо и достаточно, чтобы её вронскиан был отличен от нуля в каждой точке данного интервала ($W(x) \neq 0$).

4. Теорема о структуре общего решения однородной системы.

Определение. Любая совокупность n линейно независимых решений однородной линейной системы n – о го порядка называется фундаментальной системой решений.

Теорема. Линейная комбинация любой фундаментальной системы решений с произвольными коэффициентами является общим решением однородной системы линейных уравнений.

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n C_i \vec{y}_i(x) = C_1 \vec{y}_1(x) + C_2 \vec{y}_2(x) + \dots + C_n \vec{y}_n(x)$$

5. Теорема об общем решении неоднородной системы.

Общее решение неоднородной системы представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и некоторого частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений.

$$\vec{y}_{\rho, H_1}(x) = \vec{y}_{\rho, \rho_1}(x) + \vec{y}_{q, H_1}(x).$$

6. Если комплексно-значимая функция $\vec{y}(x) = \vec{u}(x) + i \cdot \vec{v}(x)$ является решением однородной системы ДУ, то решением этой системы будут действительные вектор функции $\vec{u} = \vec{u}(x)$ и $\vec{v} = \vec{v}(x)$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Однородной линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{array} \right. \quad (1)$$

Решение данной системы будем искать в виде:

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = \gamma_n e^{\lambda x}.$$

Определим γ_i ($i = \overline{1, n}$) и λ . Находим производные $\frac{dy_i}{dx} = \gamma_i \lambda e^{\lambda x}$ и после подстановки функции и производных в систему, и сокращая на число, отличное от нуля, $e^{\lambda x}$ получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ...+ a_{1n}\gamma_n =0, \\ a_{21}\gamma_1 +(a_{22}-\lambda)\gamma_2 +.....+ a_{2n}\gamma_n=0, \\\\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + ...+(a_{nn}-\lambda)\gamma_n=0. \end{array} \right.\quad(2)$$

Полученная система будет иметь не нулевое решение, в том и только в том случае если определитель основной матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Записанное уравнение относительно параметра λ называется характеристическим уравнением однородной линейной системы дифференциальных уравнений.

1). Все корни характеристического уравнения вещественные и различные: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Подставляя найденные собственные значения в

систему (2) и решая её, находим n линейно независимых собственных векторов основной матрицы системы:

$$\vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{\gamma}^n = \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Этим собственным векторам будет соответствовать n векторов, которые являются решениями системы (1):

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} e^{\lambda_1 x} \\ \gamma_{21} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} e^{\lambda_2 x} \\ \gamma_{22} e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \quad \dots, \vec{y}_n = \begin{pmatrix} \gamma_{1n} e^{\lambda_n x} \\ \gamma_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Полученная система векторов (4) линейно независима, так как определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} \gamma_{11}e^{\lambda_1 x} & \gamma_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & \gamma_{1n}e^{\lambda_n x} \\ \gamma_{21}e^{\lambda_1 x} & \gamma_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & \gamma_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_1 x} & \gamma_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & \gamma_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как, определитель является определителем матрицы линейно независимой системы векторов. Общее решение системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами для случая вещественных различных корней характеристического уравнения имеет вид $\vec{y} = C_1 \vec{y}_1(x) + C_2 \vec{y}_2(x) + \dots + C_n \vec{y}_n(x)$ или в координатной форме

[illegible]

2) Корни характеристического уравнения различны, но среди них есть комплексный корень. Пусть $\lambda = \alpha + \beta i$ – комплексный корень характеристического уравнения. Так как коэффициенты в характеристическом уравнении вещественные, то сопряженное число $\alpha - \beta i$ также является корнем уравнения. Полученным комплексно – сопряженным

собственным значениям матрицы коэффициентов будут соответствовать собственные векторы с комплексно – сопряженными координатами:

$$\vec{\gamma} = \vec{p} + i\vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 + iq_1 \\ p_2 + iq_2 \\ \dots\dots\dots \\ p_n + iq_n \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы в векторной форме может быть записано в виде:

$$\vec{y} = \vec{\gamma} \cdot e^{(\alpha + \beta i)x} = \begin{pmatrix} (p_1 + iq_1)e^{(\alpha + \beta i)x} \\ (p_2 + iq_2)e^{(\alpha + \beta i)x} \\ \dots\dots\dots \\ (p_n + iq_n)e^{(\alpha + \beta i)x} \end{pmatrix} = \vec{u}(x) + i\vec{v}(x).$$

Так как

$$\begin{aligned} (p_i + iq_i)e^{(\alpha + \beta i)x} &= (p_i + iq_i)e^{\alpha x} e^{i\beta x} = (p_i + iq_i)e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = \\ &= e^{\alpha x} (p_i \cos \beta x - q_i \sin \beta x) + i e^{\alpha x} (p_i \sin \beta x + q_i \cos \beta x), \end{aligned}$$

то по свойству 6, решений однородной системы, решение системы в случае комплексных корней имеет вид:

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} (p_1 \cos \beta x - q_1 \sin \beta x) \\ e^{\alpha x} (p_2 \cos \beta x - q_2 \sin \beta x) \\ \dots\dots\dots \\ e^{\alpha x} (p_n \cos \beta x - q_n \sin \beta x) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} (p_1 \sin \beta x + q_1 \cos \beta x) \\ e^{\alpha x} (p_2 \sin \beta x + q_2 \cos \beta x) \\ \dots\dots\dots \\ e^{\alpha x} (p_n \sin \beta x + q_n \cos \beta x) \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общий вид: $\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \varphi(x)$. Общее решение неоднородной системы представляет собой сумму общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы. Предположим, что известно общее решение однородной системы дифференциальных уравнений. Частное решение неоднородной системы можно найти методом вариации произвольных постоянных. Для простоты рассмотрим неоднородную систему второго порядка, которая в расширенном виде запишется

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \varphi_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \varphi_2(x). \end{cases}$$

Общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} y_1 = C_1y_{11} + C_2y_{12}, \\ y_2 = C_1y_{21} + C_2y_{22}. \end{cases}$$

Частное решение неоднородной системы будем искать в точно таком же виде, как и общее решение однородной системы, только считаем, что произвольные постоянные зависят от переменной x .

$$\begin{cases} y_1^* = C_1(x)y_{11} + C_2(x)y_{12}, \\ y_2^* = C_1(x)y_{21} + C_2(x)y_{22}. \end{cases}$$

Найдем производные и подставим их и сами функции в исходную систему.

$$\begin{cases} (y_1^*)' = C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{12} + C_1(x)y_{11}' + C_2(x)y_{12}', \\ (y_2^*)' = C_1'(x)y_{21} + C_2'(x)y_{22} + C_1(x)y_{21}' + C_2(x)y_{22}'. \end{cases}$$

$$C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{12} + C_1(x)y_{11}' + C_2(x)y_{12}' = a_{11}(C_1(x)y_{11} + C_2(x)y_{12}) + a_{12}(C_1(x)y_{21} + C_2(x)y_{22}) + \varphi_1(x),$$

$$C_1'(x)y_{21} + C_2'(x)y_{22} + C_1(x)y_{21}' + C_2(x)y_{22}' = a_{21}(C_1(x)y_{11} + C_2(x)y_{12}) + a_{22}(C_1(x)y_{21} + C_2(x)y_{22}) + \varphi_2(x)$$

$$C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{12} + C_1(x) \cdot \underbrace{(y_{11}' - a_{11}y_{11} - a_{12}y_{21})}_{=0} + C_2(x) \cdot \underbrace{(y_{12}' - a_{11}y_{12} - a_{12}y_{22})}_{=0} = \varphi_1(x),$$

$$C_1'(x)y_{21} + C_2'(x)y_{22} + C_1(x) \cdot \underbrace{(y_{21}' - a_{21}y_{11} - a_{22}y_{21})}_{=0} + C_2(x) \cdot \underbrace{(y_{22}' - a_{21}y_{12} - a_{22}y_{22})}_{=0} = \varphi_2(x),$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{12} = \varphi_1(x), \\ C_1'(x)y_{21} + C_2'(x)y_{22} = \varphi_2(x). \end{cases}$$

Из системы определим $C_1(x)$ и $C_2(x)$.