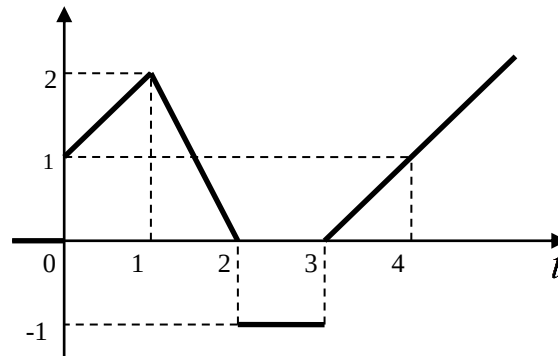


ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

18.2 Примеры решения типовых задач

18.2.1 По данному графику оригинала найти изображение.



Решение. Запишем функцию, заданную графическим образом, в аналитическом виде. Для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(t_1; f(t_1))$ и $M_2(t_2; f(t_2))$: $\frac{t-t_1}{t_2-t_1} = \frac{f(t)-f(t_1)}{f(t_2)-f(t_1)}$.

Если $t < 0$, то $f(t) = 0$. Если $0 \leq t < 1$, то $\frac{t-0}{1-0} = \frac{f(t)-1}{2-1}$ или $f(t) = t + 1$. Если $1 \leq t < 2$, то $\frac{t-1}{2-1} = \frac{f(t)-2}{0-2}$ или $f(t) = -2t + 4$. Если $2 \leq t < 3$, то очевидно, что $f(t) = -1$. Если $t \geq 3$, то $\frac{t-3}{4-3} = \frac{f(t)-0}{1-0}$ или $f(t) = t - 3$.

Таким образом, исходная функция может быть записана в виде формулы

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ t + 1, & \text{при } 0 \leq t < 1; \\ 4 - 2t, & \text{при } 1 \leq t < 2; \\ -1, & \text{при } 2 \leq t < 3; \\ t - 3, & \text{при } t \geq 3. \end{cases}$$

С помощью единичной функции $1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$ запишем исходную функцию $f(t)$ одним аналитическим выражением, то есть представим ее в виде функции-оригинала. При этом будем учитывать, что единичная функция, запаздывающая на время τ , имеет вид:

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < \tau; \\ 1, & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

Функция $f(t) = 0$, при значении времени $t < 0$. В момент времени $t = 0$ она «выключается» и «включается» функция $f(t) = t + 1$. Далее, в момент времени $t = 1$ функция $f(t) = t + 1$ «выключается» и «включается» функция $f(t) = 4 - 2t$,

которая в свою очередь «выключается» в момент времени $t = 2$. В этот же момент включается функция $f(t) = -1$, которая «выключается» при $t = 3$. И, наконец, в момент времени $t = 3$ «включается» функция $f(t) = t - 3$, которая и действует в дальнейшем. Поэтому функция-оригинал может быть записана в виде

$$f(t) = (t+1)1(t) - (t+1)1(t-1) + (4-2t)1(t-1) - (4-2t)1(t-2) - 1(t-2) + 1(t-3) + (t-3)1(t-3) = (t+1)1(t) - 3(t-1)1(t-1) + (2t-5)1(t-2) + (t-2)1(t-3).$$

Для того чтобы найти изображение полученной функции, необходимо представить ее в виде

$$f(t) = f_1(t)1(t) + f_2(t-1)1(t-1) + f_3(t-2)1(t-2) + f_4(t-3)1(t-3).$$

Следовательно, исходную функцию-оригинал запишем в виде

$$f(t) = (t+1)1(t) - 3(t-1)1(t-1) + (2(t-2)-1)1(t-2) + ((t-3)+1)1(t-3).$$

По свойствам преобразования Лапласа (приложение 1) и таблице оригиналов и их изображений (приложение 2), находим изображения полученных оригиналов:

$$\begin{aligned} f_1(t) = t+1 &\stackrel{.}{=} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}, & f_2(t) = -3t &\stackrel{.}{=} -\frac{3}{p^2}, \\ f_3(t) = 2t-1 &\stackrel{.}{=} \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}, & f_4(t) = t+1 &\stackrel{.}{=} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

По свойству запаздывания оригинала, включение оригинала с запаздыванием на величину τ соответствует умножению изображения на величину $e^{-p\tau}$ (приложение 1). Следовательно, исходная функция-оригинал будет иметь изображение

$$f(t) \stackrel{.}{=} F(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{3}{p^2} \cdot e^{-p} + \left(\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \right) \cdot e^{-2p} + \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \right) \cdot e^{-3p}.$$

18.2.2 По заданной функции-оригиналу $f(t)$ найти изображение $F(p)$.

$$\text{а) } f(t) = (2t^2 + 5)\sin 12t; \text{ б) } f(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau + \sin 2\tau}{\tau} d\tau; \text{ в) } f(t) = e^{6t}(t^2 + 3\cos t).$$

Решение. а) преобразуем заданную функцию-оригинал

$$f(t) = (2t^2 + 5)\sin 12t = 2t^2 \sin 12t + 5\sin 12t.$$

По таблице оригиналов и изображений (приложение 2) находим изображение функции синуса.

$$5\sin 12t \stackrel{.}{=} 5 \cdot \frac{12}{p^2 + 12^2} = \frac{60}{p^2 + 144}.$$

По свойству дифференцирования изображения (приложение 1) имеем, что если $f(t) \stackrel{.}{=} F(p)$, то $(-t)^n f(t) \stackrel{.}{=} F^{(n)}(p)$. Таким образом, умножение на t^2 функцию-оригинал сводится к двукратному дифференцированию изображения.

$$t^2 \sin 12t \stackrel{.}{=} \left(\frac{12}{p^2 + 144} \right)'' = \left(-\frac{24p}{(p^2 + 144)^2} \right)' = \frac{72p^2 - 3456}{(p^2 + 144)^3}.$$

Следовательно, исходная функция-оригинал имеет изображение

$$(2t^2 + 5)\sin 12t \stackrel{.}{=} \frac{144p^2 - 6912}{(p^2 + 144)^3} + \frac{60}{p^2 + 144};$$

б) для нахождения изображения заданной функции-оригинала воспользуемся свойством интегрирования оригинала (приложение 1): если

$$f(t) \stackrel{.}{=} F(p), \text{ то } \int_0^t f(\tau) d\tau \stackrel{.}{=} \frac{F(p)}{p}. \text{ Найдем изображение функции } \frac{\sin t + \sin 2t}{t},$$

для чего воспользуемся свойством интегрирования изображения (приложение 1):

если $f(t) \stackrel{.}{=} F(p)$ и $\frac{f(t)}{t}$ принадлежит множеству оригиналов, то

$$\frac{f(t)}{t} \stackrel{.}{=} \int_p^\infty F(z) dz. \text{ Определим изображение функции}$$

$$\sin t + \sin 2t \stackrel{.}{=} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{2}{p^2 + 4}. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin t + \sin 2t}{t} &\stackrel{.}{=} \int_p^\infty \left(\frac{1}{z^2 + 1} + \frac{2}{z^2 + 4} \right) dz = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_p^b \left(\frac{1}{z^2 + 1} + \frac{2}{z^2 + 4} \right) dz = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} \frac{z}{2} \right) \Big|_p^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} b + \operatorname{arctg} \frac{b}{2} - \operatorname{arctg} p - \operatorname{arctg} \frac{p}{2} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p - \operatorname{arctg} \frac{p}{2} = \operatorname{arcctg} p + \operatorname{arcctg} \frac{p}{2} \end{aligned}$$

Следовательно, изображение исходной функции

$$\int_0^t \frac{\sin \tau + \sin 2\tau}{\tau} d\tau \stackrel{.}{=} \frac{\operatorname{arcctg} p + \operatorname{arcctg} \frac{p}{2}}{p};$$

в) для определения изображения заданной функции-оригинала воспользуемся свойством смещения изображения (приложение 1): если $f(t) \stackrel{.}{=} F(p)$ и λ – любое комплексное число, то $e^{\lambda t} f(t) \stackrel{.}{=} F(p - \lambda)$. По

таблице оригиналов и изображений (приложение 2): $t^2 + 3\cos t \stackrel{.}{=} \frac{2}{p^3} + \frac{3p}{p^2 + 1}$.

Тогда исходная функция-оригинал имеет изображение

$$e^{6t}(t^2 + 3\cos t) \stackrel{.}{=} \frac{2}{(p - 6)^3} + \frac{3(p - 6)}{(p - 6)^2 + 1}.$$

$$\text{ОТВЕТ: а) } (2t^2 + 5)\sin 12t \stackrel{.}{=} \frac{144p^2 - 6912}{(p^2 + 144)^3} + \frac{60}{p^2 + 144};$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \int_0^t \frac{\sin \tau + \sin 2\tau}{\tau} d\tau &= \frac{\operatorname{arctg} p + \operatorname{arctg} \frac{p}{2}}{p}; \\ \text{в)} } e^{6t}(t^2 + 3\cos t) &= \frac{2}{(p-6)^3} + \frac{3(p-6)}{(p-6)^2 + 1}. \end{aligned}$$

18.2.3 По заданному изображению $F(p)$ найти функцию-оригинал $f(t)$.

$$\text{а)} F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 16)}; \quad \text{б)} F(p) = \frac{p^2 + 9p + 5}{p^3 + p^2 - 2}; \quad \text{в)} F(p) = \frac{pe^{-25p}}{p^2 + 25}.$$

Решение. а) для восстановления оригинала воспользуемся свойством интегрирования оригинала (приложение 1): если $F(p) \stackrel{\cdot}{=} f(t)$, то $\frac{F(p)}{p} \stackrel{\cdot}{=} \int_0^t f(\tau) d\tau$. По таблице оригиналов и изображений (приложение 2)

определяем оригинал для заданного изображения $\frac{1}{p(p^2 + 16)} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{4} \sin 4t$.

Восстанавливаем оригинал для исходного изображения.

$$\frac{1}{p(p^2 + 16)} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{4} \int_0^t \sin 4\tau d\tau = -\frac{1}{16} \cos 4\tau \Big|_0^t = -\frac{1}{16} \cos 4t + \frac{1}{16} \cos 0 = \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4t;$$

$$\text{б)} F(p) = \frac{p^2 + 9p + 5}{p^3 + p^2 - 2}.$$

Дробь является правильной. Разложим ее на простейшие дроби, для чего необходимо разложить знаменатель на простейшие множители. Подбором находим один из корней многочлена $P_3(p) = p^3 + p^2 - 2$. Корнем этого многочлена является число $p=1$, так как $P_3(1) = 0$. Разделим многочлен на $p-1$.

$$\begin{array}{r} p^3 + p^2 + 0 \cdot p - 2 \quad | \quad p-1 \\ \underline{p^3 - p^2} \\ 2p^2 + 0 \cdot p \\ \underline{2p^2 - 2 \cdot p} \\ 2 \cdot p - 2 \\ \underline{2 \cdot p - 2} \\ 0 \end{array}$$

Квадратный трехчлен $p^2 + 2p + 2$ не раскладывается на множители, так как дискриминант квадратного трехчлена отрицателен.

Следовательно, $p^3 + p^2 - 2 = (p - 1) \cdot (p^2 + 2p + 2)$. Раскладываем исходную дробь на простейшие дроби.

$$\begin{aligned} \frac{p^2 + 9p + 5}{p^3 + p^2 - 2} &= \frac{p^2 + 9p + 5}{(p - 1) \cdot (p^2 + 2p + 2)} = \frac{A}{p - 1} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 2} = \\ &= \frac{A \cdot (p^2 + 2p + 2) + (Bp + C) \cdot (p - 1)}{(p - 1) \cdot (p^2 + 2p + 2)} = \frac{(A + B)p^2 + (2A - B + C)p + 2A - C}{(p - 1) \cdot (p^2 + 2p + 2)}. \end{aligned}$$

Дроби равны, знаменатели равны, следовательно, равны и числители.

$$(A + B)p^2 + (2A - B + C)p + 2A - C = p^2 + 9p + 5$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях находим коэффициенты A , B и C .

$$\begin{cases} A + B = 1; \\ 2A - B + C = 9; \\ 2A - C = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} B = 1 - A; \\ 2A - 1 + A + 2A - 5 = 9; \\ C = 2A - 5; \end{cases} \quad \begin{cases} B = -2; \\ A = 3; \\ C = 1. \end{cases}$$

Таким образом, исходная дробь представима в виде простейших рациональных дробей

$$\frac{p^2 + 9p + 5}{p^3 + p^2 - 2} = \frac{3}{p - 1} + \frac{-2p + 1}{p^2 + 2p + 2}.$$

Найдем изображения для каждой функции-оригинала в полученном разложении. По таблице оригиналов и изображений (приложение 2)

$$\frac{3}{p - 1} \stackrel{\bullet}{=} 3 \cdot e^t.$$

Определим изображение второго слагаемого, для чего в знаменателе выделим полный квадрат, а в числителе выражение, возводимое в квадрат в знаменателе. Затем представим дробь в виде сумму двух дробей.

$$\frac{-2p + 1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{-2(p + 1) + 3}{(p + 1)^2 + 1} = -2 \cdot \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 1} + 3 \cdot \frac{1}{(p + 1)^2 + 1}.$$

Для определения функции-оригинала, для заданного изображения, воспользуемся свойством смещения изображения (приложение 1): если $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$ и λ – любое комплексное число, то $e^{\lambda t} f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p - \lambda)$. По таблице оригиналов и изображений (приложение 2)

$$\frac{p}{p^2 + 1} \stackrel{\bullet}{=} \cos t, \quad \frac{1}{p^2 + 1} \stackrel{\bullet}{=} \sin t.$$

Следовательно, по свойству смещения изображения (приложение 1) имеем

$$\frac{-2p + 1}{p^2 + 2p + 2} = -2 \cdot \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 1} + 3 \cdot \frac{1}{(p + 1)^2 + 1} \stackrel{\bullet}{=} -2 \cdot e^{-t} \cos t + 3 \cdot e^{-t} \sin t.$$

Таким образом, функция-оригинал для заданного изображения имеет вид:

$$\frac{p^2 + 9p + 5}{p^3 + p^2 - 2} \stackrel{\bullet}{=} 3 \cdot e^t - 2 \cdot e^{-t} \cos t + 3 \cdot e^{-t} \sin t;$$

в) для определения функции-оригинала, заданного изображения $F(p) = \frac{pe^{-25p}}{p^2 + 25}$, воспользуемся свойством запаздывания оригинала если $F(p) \stackrel{\cdot}{=} f(t)$ и τ – любое положительное число, то $e^{-p\tau} F(p) \stackrel{\cdot}{=} f(t - \tau)$. Тогда $\frac{pe^{-25p}}{p^2 + 25} \stackrel{\cdot}{=} \cos 5(t - 25) \cdot 1(t - 25)$.

18.2.4 Методом операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения $x'' + 16x = 4\sin 4t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

Решение. Перейдем от дифференциального уравнения второго порядка к операторному уравнению. Пусть $x(t) \stackrel{\cdot}{=} X(p)$. По теореме дифференцирования оригинала (приложение 1) имеем

$$x''(t) \stackrel{\cdot}{=} p^2 \cdot X(p) - p \cdot x(0) - x'(0) = p^2 \cdot X(p) + p.$$

Кроме этого, по таблице оригиналов и изображений (приложение 2), правая часть дифференциального уравнения имеет изображение

$$4\sin 4t \stackrel{\cdot}{=} \frac{16}{p^2 + 16}.$$

Переходим от исходного дифференциального уравнения к уравнению в изображениях $p^2 \cdot X(p) + p + 16 \cdot X(p) = \frac{16}{p^2 + 16}$.

$$\text{Тогда получаем операторное уравнение } (p^2 + 16) \cdot X(p) = \frac{16}{p^2 + 16} - p.$$

$$\text{Откуда } (p^2 + 16) \cdot X(p) = \frac{16}{(p^2 + 16)^2} - \frac{p}{p^2 + 16}.$$

Правую часть последнего равенства приводить к общему знаменателю не имеет смысла, т.к. оригинал для второго слагаемого известен (приложение 2) $\left(\frac{p}{p^2 + 16} \stackrel{\cdot}{=} \cos 4t\right)$, а оригинал для выражения $\frac{16}{(p^2 + 16)^2}$ удобнее найти по свойству изображения свертки оригиналов (приложение 1).

Известно, что $\frac{4}{p^2 + 16} \stackrel{\cdot}{=} \sin 4t$ (приложение 2), поэтому

$$\begin{aligned} \frac{16}{(p^2 + 16)^2} &= \frac{4}{p^2 + 16} \cdot \frac{4}{p^2 + 16} \stackrel{\cdot}{=} \int_0^t \sin 4\tau \cdot \sin 4(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(8\tau - 4t) - \cos 4t) d\tau = \left[\frac{1}{16} \sin(8\tau - 4t) - \frac{1}{2} \tau \cdot \cos 4t \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{16} \sin 4t - \frac{1}{2} t \cdot \cos 4t + \frac{1}{16} \sin 4t = \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{2} t \cdot \cos 4t. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$X(p) \cdot x(t) = \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{2} t \cdot \cos 4t - \cos 4t = \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{t+2}{2} \cos 4t.$$

$$x(t) = \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{t+2}{2} \cos 4t.$$

18.2.5 Методами операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = \text{sh}t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение. Для нахождения частного решения дифференциального уравнения с нулевыми начальными условиями будем использовать формулы Дюамеля (приложение 1). Рассмотрим дифференциальное уравнение $y_1'' - 2y_1' + y_1 = 1$, причем $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$. Пусть $y(t) \cdot Y(p)$, а $y_1(t) \cdot Y_1(p)$, причем $f(t) = \text{sh}t$. Тогда, на основании свойства дифференцирования оригинала (приложение 1) $y_1'(t) \cdot pY_1(p)$, $y_1''(t) \cdot p^2Y_1(p)$. По таблице оригиналов и изображений (приложение 2) $1 \cdot \frac{1}{p}$. Переходим от дифференциального уравнения к операторному уравнению

$$p^2Y_1(p) - 2pY_1(p) + Y_1(p) = \frac{1}{p};$$

$$(p^2 - 2p + 1)Y_1(p) = \frac{1}{p} \text{ или } (p-1)^2 \cdot Y_1(p) = \frac{1}{p}.$$

Отсюда $Y_1(p) = \frac{1}{p \cdot (p-1)^2}$. Для определения оригинала будем использовать свойство интегрирования оригинала (приложение 1): интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p . В начале определим оригинал изображения $\frac{1}{(p-1)^2}$, используя свойство

дифференцирования изображения (приложение 1) $\frac{1}{(p-1)^2} = \left(-\frac{1}{p-1} \right)' \cdot t \cdot e^t$.

Тогда $Y_1(p) \cdot y_1(t) = \int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int_a^b u dv = u \cdot v|_a^b - \int_a^b v du$.

$$y_1(t) = \int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau = \left[\begin{array}{ll} u = \tau & du = d\tau \\ dv = e^\tau d\tau & v = e^\tau \end{array} \right] = \tau \cdot e^\tau \Big|_0^t - \int_0^t e^\tau d\tau = t \cdot e^t - e^\tau \Big|_0^t = t \cdot e^t - e^t + 1.$$

Определим оригинал $y(t)$ по формуле $y(t) = \int_0^t y_1'(\tau) \cdot f(t-\tau) d\tau$. Найдем производную $y_1'(t) = (t \cdot e^t - e^t + 1)' = e^t + t \cdot e^t - e^t = t \cdot e^t$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t \tau \cdot e^\tau \cdot \operatorname{sh}(t - \tau) d\tau = \int_0^t \tau \cdot e^\tau \cdot \frac{e^{t-\tau} - e^{\tau-t}}{2} d\tau = \frac{e^t}{2} \int_0^t \tau d\tau - \frac{e^{-t}}{2} \int_0^t \tau \cdot e^{2\tau} d\tau = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = \tau \quad du = d\tau \\ dv = e^{2\tau} d\tau \quad v = \frac{1}{2} e^{2\tau} \end{array} \right] = \frac{e^t}{4} \cdot \tau^2 \Big|_0^t - \frac{e^{-t}}{4} \cdot \tau \cdot e^{2\tau} \Big|_0^t + \frac{e^{-t}}{4} \int_0^t e^{2\tau} d\tau = \frac{e^t}{4} \cdot t^2 - \frac{e^t}{4} \cdot t + \\
 &+ \frac{e^{-t}}{8} e^{2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{8} e^t - \frac{1}{8} e^{-t} = \frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{4} \operatorname{sh} t. \\
 y(t) &= \frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{4} \operatorname{sh} t.
 \end{aligned}$$

18.2.6 Методами операционного исчисления найти решение системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} + 3x - 4y = 9e^{2t}; \\ \dot{y} + 2x - 3y = 3e^{2t} \end{cases} \text{ при } x(0) = 2, y(0) = 0.$$

Решение. Пусть $x(t) \stackrel{.}{=} X(p)$, $y(t) \stackrel{.}{=} Y(p)$. В силу начальных условий и свойства дифференцирования оригинала (приложение 1) $\dot{y}(t) \stackrel{.}{=} pY(p)$, $\dot{x}(t) \stackrel{.}{=} pX(p) - 2$. По таблице оригиналов и изображений (приложение 2) $e^{2t} \stackrel{.}{=} \frac{1}{p-2}$. Система дифференциальных уравнений в операторной форме имеет вид:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 + 3X(p) - 4Y(p) = \frac{9}{p-2}; \\ pY(p) + 2X(p) - 3Y(p) = \frac{3}{p-2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (p+3)X(p) - 4Y(p) = \frac{2p+5}{p-2}; \\ 2X(p) + (p-3)Y(p) = \frac{3}{p-2}. \end{cases}$$

Для нахождения изображений $X(p)$ и $Y(p)$ воспользуемся формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+3 & -4 \\ 2 & p-3 \end{vmatrix} = p^2 - 1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{2p+5}{p-2} & -4 \\ \frac{3}{p-2} & p-3 \end{vmatrix} = \frac{2p^2 - p - 3}{p-2}, \\
 \Delta_y = \begin{vmatrix} p+3 & \frac{2p+5}{p-2} \\ 2 & \frac{3}{p-2} \end{vmatrix} = -\frac{p+1}{p-2}.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2p^2 - p - 3}{(p-2)(p^2-1)} = \frac{(2p-3)(p+1)}{(p-2)(p-1)(p+1)} = \frac{2p-3}{(p-2)(p-1)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{p+1}{(p-2)(p^2-1)} = -\frac{p+1}{(p-2)(p-1)(p+1)} = -\frac{1}{(p-2)(p-1)}.$$

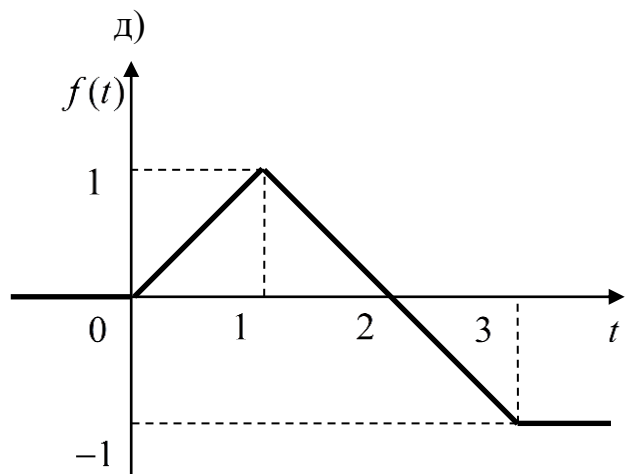
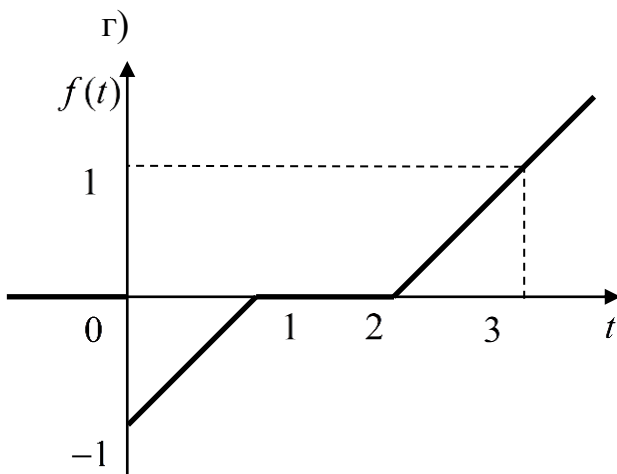
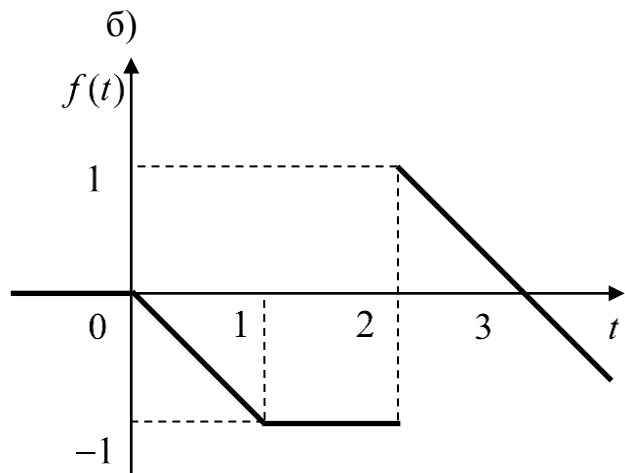
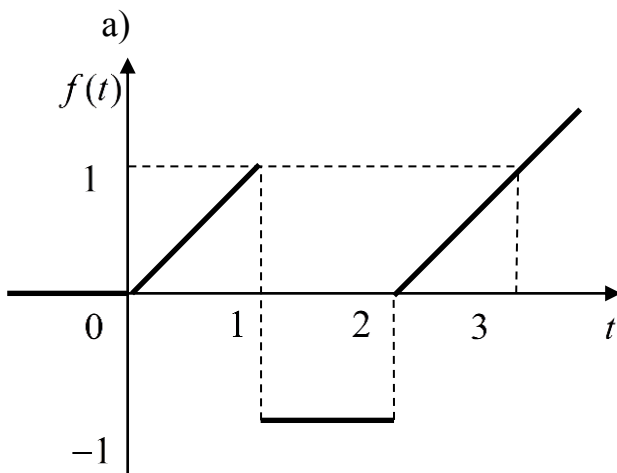
Восстановим оригиналы по заданным изображениям, используя таблицу оригиналов и изображений (приложение 2).

$$X(p) = \frac{2p-3}{(p-2)(p-1)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} \Rightarrow x(t) = e^t + e^{2t},$$

$$Y(p) = -\frac{1}{(p-2)(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} \Rightarrow y(t) = e^t - e^{2t}.$$

18.3 Задания для решения на практическом занятии

18.3.1 По заданному графику оригинала найти изображение.



18.3.2 По заданной функции-оригиналу $f(t)$ найти изображение $F(p)$.

а) $f(t) = (5t^2 + 2)\cos 3t$; б) $f(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau - \sin 3\tau}{\tau} d\tau$; в) $f(t) = e^{2t}(2t^2 - 3\operatorname{ch} 2t)$.

18.3.3 По заданной функции-оригиналу $f(t)$ найти изображение $F(p)$.

а) $f(t) = (t^2 + 1)\sin 2t$; б) $f(t) = \int_0^t \frac{\cos \tau - \cos 2\tau}{\tau} d\tau$; в) $f(t) = e^t(t + 2\operatorname{sh} 3t)$.

18.3.4 По заданному изображению $F(p)$ найти функцию-оригинал $f(t)$.

а) $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 2)}$; б) $F(p) = \frac{p^2 + 11p + 2}{p^3 - p^2 + 3p + 5}$; в) $F(p) = \frac{pe^{-2p}}{p^2 + 2}$.

18.3.5 Методами операционного исчисления решить задачу Коши.

а) $x'' + x' = t^2 + 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$;
б) $y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$;
в) $x'' + 4x = 8\sin 2t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -1$;
г) $y'' - y = \cos 3t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

18.3.6 Методами операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

а) $y'' - 2y' = \frac{e^t}{\operatorname{cht}}$; б) $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^t}$; в) $y'' + y' = \frac{e^t}{(1 + e^t)^2}$.

18.3.7 Методами операционного исчисления найти решение системы дифференциальных уравнений.

а)
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x + y + 1; \end{cases}$$
$$x(0) = 2, y(0) = 0. \quad \quad \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

в)
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases}$$
$$x(0) = 0, y(0) = 2. \quad \quad \quad x(0) = -1, y(0) = 2.$$

д)
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1; \end{cases}$$
$$x(0) = -1, y(0) = 0. \quad \quad \quad x(0) = 0, y(0) = 5.$$

18.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

18.4.1 Методами операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

$$18.4.1.1 \quad x'' - x = \frac{4}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}. \quad 18.4.1.2$$

$$x'' + 2x' + x = \frac{t}{te^t + e^t}.$$

$$18.4.1.3 \quad x'' - x' = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}}. \quad 18.4.1.4$$

$$x'' - x' = \frac{1}{e^{-t} + 1}.$$

$$18.4.1.5 \quad x'' + 4x' + 4x = \frac{1}{(e^t + 2te^t)^2}. \quad 18.4.1.6$$

$$x'' + 2x' = \frac{4}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}.$$

$$18.4.1.7 \quad x'' - x = \frac{2e^t}{1 + e^{2t}}. \quad 18.4.1.8$$

$$x'' + 2x' + x = \frac{1}{e^t + t^2 e^t}.$$

$$18.4.1.9 \quad x'' - 2x' + x = \frac{4e^t}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}. \quad 18.4.1.10$$

$$x'' + x' = \frac{e^{-t}}{e^{-t} + 1}.$$

$$18.4.1.11 \quad x'' + x' = \frac{1}{2 + \frac{1}{2} \operatorname{ch} t}. \quad 18.4.1.12$$

$$x'' - 2x' + x = \frac{1}{e^{-t}(1+t)}.$$

$$18.4.1.13 \quad x'' - 4x' + 4x = \frac{8e^{2t}}{e^{4t} + e^{-4t}}. \quad 18.4.1.14$$

$$x'' - 4x = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} 2t}.$$

$$18.4.1.15 \quad x'' - 9x = \frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{ch}^2 3t}. \quad 18.4.1.16$$

$$x'' + 6x' + 9x = \frac{e^{-3t}}{(t+3)^2}.$$

$$18.4.1.17 \quad x'' - 4x = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}. \quad 18.4.1.18$$

$$x'' - 9x = \operatorname{th} 3t.$$

$$18.4.1.19 \quad x'' - 10x' + 25x = \frac{e^{5t}}{1+t^2}. \quad 18.4.1.20$$

$$x'' - 4x = \frac{2e^{2t}}{e^{4t} + 1}.$$

$$18.4.1.21 \quad x'' - 9x = \operatorname{th}^2 3t. \quad 18.4.1.22$$

$$x'' - x' = \frac{e^t}{2e^{-t} + 1}.$$

$$18.4.1.23 \quad x'' + x' = \frac{e^{-2t}}{(1 + e^{-t})^2}. \quad 18.4.1.24$$

$$x'' + 4x' + 4x = \frac{e^{-2t}}{\operatorname{ch}^2 2t}.$$

$$18.4.1.25 \quad x'' - 16x = \operatorname{th}^2 4t. \quad 18.4.1.26$$

$$x'' + x' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}.$$

$$18.4.1.27 \quad x'' - x' = \frac{1}{(1 + e^{-t})^2}. \quad 18.4.1.28$$

$$x'' + x' = \frac{1}{1 + e^{-t}}.$$

$$18.4.1.29 \quad x'' - 25x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 5t}.$$

$$18.4.1.30 \quad x'' - 2x' = \frac{2}{1 + e^{-2t}}.$$

18.4.2 Методами операционного исчисления решить систему дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

$$18.4.2.1 \quad \begin{cases} x' = 2x + y + e^t, \\ y' = 5x - 2y + 2e^t; \end{cases} \\ x(0) = 1, y(0) = -4.$$

$$18.4.2.2 \quad \begin{cases} x' = 3x + 7y + e^{2t}, \\ y' = x - 3y + 2e^{2t}; \end{cases} \\ x(0) = -2, y(0) = 3.$$

$$18.4.2.3 \quad \begin{cases} x' = 4x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = -x + 2y - 5e^{3t}; \end{cases} \\ x(0) = 3, y(0) = 5.$$

$$18.4.2.4 \quad \begin{cases} x' = x - y + 8e^{4t}, \\ y' = x + 3y - e^{4t}; \end{cases} \\ x(0) = 2, y(0) = 1.$$

$$18.4.2.5 \quad \begin{cases} x' = -4x + 3y + 8e^{6t}, \\ y' = 3x + 4y + 2e^{6t}; \end{cases} \\ x(0) = 3, y(0) = -1.$$

$$18.4.2.6 \quad \begin{cases} x' = x + 4y - 6e^{5t}, \\ y' = 2x - y + 4e^{5t}; \end{cases} \\ x(0) = -1, y(0) = -2.$$

$$18.4.2.7 \quad \begin{cases} x' = 2x - 4y + 2e^{7t}, \\ y' = -x + 5y - 5e^{7t}; \end{cases} \\ x(0) = 4, y(0) = -1.$$

$$18.4.2.8 \quad \begin{cases} x' = 3x + 2y + 8e^{8t}, \\ y' = x + 2y - e^{8t}; \end{cases} \\ x(0) = 3, y(0) = 8.$$

$$18.4.2.9 \quad \begin{cases} x' = -5x - 3y + e^{9t}, \\ y' = 3x + 5y + 2e^{9t}; \end{cases} \\ x(0) = 4, y(0) = -2.$$

$$18.4.2.10 \quad \begin{cases} x' = 6x - 11y + e^{10t}, \\ y' = x - 6y + 2e^{10t}; \end{cases} \\ x(0) = -4, y(0) = -5.$$

$$18.4.2.11 \quad \begin{cases} x' = 4x - 3y + 3e^{-t}, \\ y' = x + 4e^{-t}; \end{cases} \\ x(0) = 2, y(0) = -9.$$

$$18.4.2.12 \quad \begin{cases} x' = -2y + 8e^{-2t}, \\ y' = x + 3y - e^{-2t}; \end{cases} \\ x(0) = 6, y(0) = -1.$$

$$18.4.2.13 \quad \begin{cases} x' = -7x + 4y + 8e^{-3t}, \\ y' = 8x + 7y + 2e^{-3t}; \end{cases} \\ x(0) = 2, y(0) = -5.$$

$$18.4.2.14 \quad \begin{cases} x' = 8x + 5y - 6e^{-4t}, \\ y' = -3x - 8y + 4e^{-4t}; \end{cases} \\ x(0) = -3, y(0) = -4.$$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{18.4.2.15} & \begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^{-5t}, \\ y' = -2x + 6y - 2e^{-5t}; \end{cases} \\
 & x(0) = 6, y(0) = -3. \quad \mathbf{18.4.2.16}
 \end{array}$$

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 6e^{-6t}, \\ y' = 2x + 7y - 3e^{-6t}; \end{cases} \\
 x(0) = -2, y(0) = -3.$$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{18.4.2.17} & \begin{cases} x' = -9x + 19y + 2e^{-7t}, \\ y' = x + 9y + e^{-7t}; \end{cases} \\
 & x(0) = 2, y(0) = -3. \quad \mathbf{18.4.2.18}
 \end{array}$$

$$\begin{cases} x' = 10x - 16y + e^{-8t}, \\ y' = 4x - 10y + 2e^{-8t}; \end{cases} \\
 x(0) = -5, y(0) = 5.$$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{18.4.2.19} & \begin{cases} x' = 3x - 5y + 7e^{-9t}, \\ y' = -x + 7y - e^{-9t}; \end{cases} \\
 & x(0) = 1, y(0) = -5. \quad \mathbf{18.4.2.20}
 \end{array}$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + 8e^{-10t}, \\ y' = -6x + 5y - 3e^{-10t}; \end{cases} \\
 x(0) = 5, y(0) = 10.$$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{18.4.2.21} & \begin{cases} x' = -11x + 7y + 8e^{12t}, \\ y' = 3x + 11y + 2e^{12t}; \end{cases} \\
 & x(0) = -3, y(0) = -1. \quad \mathbf{18.4.2.22}
 \end{array}$$

$$\begin{cases} x' = 12x + 4y - 6e^{11t}, \\ y' = 11x - 12y + 4e^{11t}; \end{cases} \\
 x(0) = 1, y(0) = 2.$$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{18.4.2.23} & \begin{cases} x' = 6x - 3y + 2e^{-11t}, \\ y' = -x + 4y - 5e^{-11t}; \end{cases} \\
 & x(0) = 8, y(0) = -5. \quad \mathbf{18.4.2.24}
 \end{array}$$

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y + 6e^{-12t}, \\ y' = -5x + 7y - e^{-12t}; \end{cases} \\
 x(0) = 1, y(0) = -7.$$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{18.4.2.25} & \begin{cases} x' = -13x - 3y + e^{13t}, \\ y' = 23x + 13y + 2e^{13t}; \end{cases} \\
 & x(0) = -2, y(0) = -2. \quad \mathbf{18.4.2.26}
 \end{array}$$

$$\begin{cases} x' = 14x + 29y + e^{14t}, \\ y' = x - 14y + 2e^{14t}; \end{cases} \\
 x(0) = -3, y(0) = -4.$$

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{18.4.2.27} & \begin{cases} x' = 7x - 3y + 2e^{-13t}, \\ y' = 4x + 3e^{-13t}; \end{cases} \\
 & x(0) = 1, y(0) = -5. \quad \mathbf{18.4.2.28}
 \end{array}$$

$$\begin{cases} x' = -2y + 8e^{-14t}, \\ y' = -3x + 5y - e^{-14t}; \end{cases} \\
 x(0) = 2, y(0) = -2.$$

18.4.2.29

$$\begin{cases} x' = -16x - 12y + e^{-15t}, \\ y' = -12x + 16y + e^{-15t}; \end{cases}$$

$$x(0) = -1, y(0) = 1.$$

18.4.2.30

$$\begin{cases} x' = 17x - 11y + e^{15t}, \\ y' = 3x - 17y + e^{15t}; \end{cases}$$

$$x(0) = -1, y(0) = -2.$$