

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА.

Рассмотрим функцию $f(t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t) = 0$, если $t < 0$;

2) на интервале $(0; +\infty)$ функция $f(t)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода;

3) при значении $t \rightarrow +\infty$, абсолютная величина функции возрастает не быстрее некоторой экспоненты, то есть $|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma t}$.

Функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, называется функцией – оригиналом по Лапласу.

Если функция $f(t)$ является оригиналом, то чисел σ существует бесконечно много, при этом нижняя грань всех чисел σ называется показателем роста функции.

$$\sigma_0 = \inf \{ \sigma \} - \text{показатель роста.}$$

Пример. 1. $f(t) = e^t$. Положим, что первое условие существования оригинала выполняется. На интервале $(0; +\infty)$ функция $f(t) = e^t$ непрерывна (второе условие выполняется). $|f(t)| = |e^{(\text{Re } \lambda + i \text{Im } \lambda)t}| = \underbrace{|e^{i \text{Im } \lambda \cdot t}|}_{=1} \cdot |e^{\text{Re } \lambda \cdot t}| = |e^{\text{Re } \lambda \cdot t}| \leq e^{\sigma t}$. Третье условие выполняется и показатель роста $\sigma_0 = \text{Re } \lambda$.

2. $f(t) = \cos \omega t$. Положим, что первое условие существования оригинала выполняется. На интервале $(0; +\infty)$ функция $f(t) = \cos \omega t$ непрерывна (второе условие выполняется). $|f(t)| = |\cos \omega t| \leq 1 \leq e^{\sigma t}$, $\sigma \geq 0$. Третье условие выполняется и показатель роста $\sigma_0 = 0$.

Определение преобразования Лапласа. Соответствие, по которому каждой функции – оригиналу $f(t)$ сопоставляется функция $F(p)$, где $p = s + i\omega$ – комплексная переменная, определяемая по формуле $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ (1), называется преобразованием Лапласа. Функция $F(p)$ называется изображением функции – оригинала $f(t)$ по Лапласу.

Докажем, что для любой функции – оригинала $f(t)$ интеграл (1) является сходящимся. Оценим данный интеграл по абсолютной величине.

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| |e^{-pt}| dt = \left[\begin{array}{l} |f(t)| \leq M e^{-\sigma_0 t} \\ |e^{-pt}| = |e^{-st - i\omega t}| = e^{-st} \end{array} \right] \leq \int_0^{\infty} M e^{-\sigma_0 t} e^{-st} dt = \\ &= M \int_0^{\infty} e^{-(s-\sigma_0)t} dt = \frac{M}{\sigma_0 - s} e^{-(s-\sigma_0)t} \bigg|_0^{\infty} = \frac{M}{s - \sigma_0} \end{aligned}$$

Следовательно, по свойствам несобственных интегралов, интеграл (1) является сходящимся, если $\text{Re } p = s > \sigma_0$, то есть действительная часть больше

показателя роста. Это условие является необходимым условием того, чтобы функция комплексного переменного $p = s + i\omega$ являлась изображением. Кроме этого, при значении $p \rightarrow \infty$, изображение $F(p) \rightarrow 0$.

Обозначение:

$f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$ (функция – оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$),

$F(p) \stackrel{\bullet}{=} f(t)$ (функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$).

Несобственный интеграл, определяющий преобразование Лапласа, обладает и тем свойством, что в области действительной части $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, его можно дифференцировать по переменной p . Пусть $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$. Тогда

$$F'_p(p) = \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right)'_p = \int_0^{\infty} \left(f(t) e^{-pt} \right)' dt = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt \stackrel{\bullet}{=} -t f(t)$$

Замечание. В дальнейшем, говоря о функции $f(t)$, мы всегда будем подразумевать, что при значении $t < 0$ значение оригинала $f(t) = 0$. Пишем

$$f(t) = t^n, \text{ но подразумеваем } f(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Пример. Найти изображения оригиналов.

1. $1(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ Данная функция называется единичной и функцией Хейвисайда. Очевидно, что она является оригиналом, с показателем роста

$\sigma_0 = 0$.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}; \quad 1(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p}.$$

2. $f(t) = t^n$. Подразумевая, что правая часть умножена на единичную функцию, очевидно, что функция является оригиналом.

$$-t \cdot 1 \stackrel{\bullet}{=} \left(\frac{1}{p} \right)' = -\frac{1}{p^2} \Rightarrow t \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p^2}.$$

$$-t \cdot t \stackrel{\bullet}{=} \left(\frac{1}{p^2} \right)' = -\frac{2}{p^3} \Rightarrow t^2 \stackrel{\bullet}{=} \frac{2}{p^3}. \text{ По индукции, } t^n \stackrel{\bullet}{=} \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Утверждение верно при значении $n=1$. Предположим, что оно справедливо при значении $n=k$, то есть $t^k \stackrel{\bullet}{=} \frac{k!}{p^{k+1}}$ – истина. Докажем справедливость

утверждения при значении $n = k + 1$, то есть справедливость выражения $t^{k+1} \cdot \dot{=} \frac{(k+1)!}{p^{k+2}}$. Действительно,

$$t^{k+1} = -t \cdot t^k \cdot \dot{=} \left(\frac{k!}{p^{k+1}} \right)' = -\frac{k!(k+1)}{p^{k+2}} = -\frac{(k+1)!}{p^{k+2}} \Rightarrow t^{k+1} \cdot \dot{=} \frac{(k+1)!}{p^{k+2}}.$$

По методу математической индукции, утверждение верно, для любого натурального n .

3. $f(t) = e^{\lambda t}$. Подразумевая, что правая часть умножена на единичную функцию, очевидно, что функция является оригиналом. Найдем изображение.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt = -\frac{1}{p-\lambda} e^{-(p-\lambda)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\lambda}.$$

4, 5. $f(t) = \sin t$, $f(t) = \cos t$. Применяем дважды формулу интегрирования по частям (самостоятельно).

ТАБЛИЦА ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

№	Функция – оригинал	Функция – изображение
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
4	$\sin t$	$\frac{1}{p^2+1}$
5	$\cos t$	$\frac{p}{p^2+1}$

СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. Свойство подобия.

Если $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, $\varphi(t) \stackrel{\bullet}{=} \Phi(p)$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливо утверждение:

$$\alpha f(t) + \beta \varphi(t) \stackrel{\bullet}{=} \alpha F(p) + \beta \Phi(p).$$

Доказательство:

$$\alpha f(t) + \beta \varphi(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta \varphi(t)) e^{-pt} dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt = \alpha F(p) + \beta \Phi(p).$$

2. Свойство подобия.

Если $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то $\forall \alpha > 0$ справедливо утверждение:

$$f(\alpha t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

Доказательство. По определению

$$f(\alpha t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \left[\begin{array}{l} \alpha t = t', \quad dt = \frac{1}{\alpha} dt' \\ t = 0 \Rightarrow t' = 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow t' \rightarrow \infty \end{array} \right] = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(t') e^{-p \frac{t'}{\alpha}} dt' = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. Теорема дифференцирования оригинала.

Если $f(t)$ и $f'(t)$ – функции – оригиналы и $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то $f'(t) \stackrel{\bullet}{=} pF(p) - f(0)$.

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } f'(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= \left[\begin{array}{ll} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t) dt & v = f(t) \end{array} \right] = f(t) \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \\ + p \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt &= -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

Пусть $f''(t)$ – функция – оригинал. Найдем изображение оригинала, учитывая, что $f''(t) = (f'(t))'$. Тогда

$f''(t) \stackrel{\bullet}{=} p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$. По индукции, получаем теорему дифференцирования оригинала производной n -ого порядка.

Теорема. Если $f(t)$ и её производные до n -ого порядка включительно являются оригиналами и $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \stackrel{\bullet}{=} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Для значения $n=1$ теорема доказана выше. Предположим, что теорема верна для значения $n=k$: $f^{(k)}(t) \stackrel{*}{=} p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$, и докажем, что теорема справедлива, для значения $n=k+1$.

$$f^{(k+1)}(t) = (f^{(k)}(t))' \stackrel{*}{=} p(p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)) - f^{(k)}(0) =$$

$$= p^{k+1} F(p) - p^k f(0) - p^{k-1} f'(0) - \dots - f^{(k)}(0).$$
 По методу математической индукции теорема верна для любого натурального k .

Замечание. В частном случае, если $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \stackrel{*}{=} p^n F(p)$. Таким образом, дифференцирование оригинала, при переходе к изображению, сводится к умножению последнего на число p .

4. Теорема дифференцирования изображения.

Если $f(t)$ – функция – оригинал и $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, то $F^{(n)} \stackrel{*}{=} (-t)^n f(t)$.

Доказательство проведем методом математической индукции. Для значения $n=1$ теорема доказана выше. Предположим, что теорема верна для значения $n=k$: $F^{(k)} \stackrel{*}{=} (-t)^k f(t)$. $F^{(k+1)}(p) = (F^{(k)}(p))' \stackrel{*}{=} -t(-t)^k f(t) = (-t)^{k+1} f(t)$. По методу математической индукции теорема верна для любого натурального k .

Таким образом, при переходе от изображения к оригиналу, дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на величину $(-t)$.

5. Теорема об интегрировании оригинала.

Если $f(t)$ – функция – оригинал и $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, то $\int_0^t f(\tau) d\tau \stackrel{*}{=} \frac{F(p)}{p}$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, причем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) \stackrel{*}{=} \Phi(p)$. По теореме дифференцирования оригинала $\varphi'(t) \stackrel{*}{=} p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p)$. С другой стороны, по теореме о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом интегрирования $\varphi'(t) = f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$. Тогда $p\Phi(p) = F(p) \Rightarrow \Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Замечание. Таким образом, интегрирование оригинала, при переходе к изображению, сводится к делению изображения на величину p .

6. Теорема об интегрировании изображения.

Если $f(t)$ – функция – оригинал и $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, то $\frac{f(t)}{t} \stackrel{*}{=} \int_p^\infty F(z) dz$.

Доказательство. Пусть $\frac{f(t)}{t} \stackrel{*}{=} \Phi(p)$. Тогда, по теореме о дифференцировании изображения получаем $-t \cdot \frac{f(t)}{t} = -f(t) \stackrel{*}{=} \Phi'(p)$.

Следовательно, $F(p) = -\Phi'(p)$. Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int_p^\infty F(z) dz = -\int_p^\infty \Phi'(z) dz = \Phi(p). \text{ Верхний предел равен нулю, в силу необходимого}$$

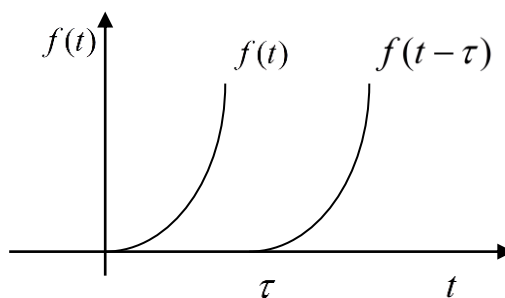
условия существования изображения.

Замечание. Деление на величину t оригинала, при переходе к изображению, сводится к интегрированию изображения.

7. Теорема запаздывания оригинала.

Если $f(t)$ – функция – оригинал и $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, то $f(t-\tau) \stackrel{*}{=} e^{-p\tau} F(p)$.

Доказательство. Если $f(t)$ принимать за некоторый сигнал, который включается в момент времени $t=0$, то $f(t-\tau)$ – есть сигнал, который включится в момент времени $t=\tau$.



$$\begin{aligned} f(t-\tau) \stackrel{*}{=} \int_0^\infty e^{-pt} f(t-\tau) dt &= \int_0^\tau e^{-pt} \underbrace{f(t-\tau)}_{=0} dt + \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau) dt = \left[\begin{array}{l} t-\tau=t', t=t'+\tau, dt=dt' \\ t=\tau \Rightarrow t'=0, t \rightarrow \infty \Rightarrow t' \rightarrow \infty \end{array} \right] = \\ &= \int_0^\infty e^{-p(t'+\tau)} f(t') dt' = e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pt'} f(t') dt' = e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

Таким образом, запаздывание оригинала на величину τ , при переходе к изображению, означает умножение изображения функции – оригинала на величину $e^{-p\tau}$.

8. Теорема сдвига изображения.

Если $f(t)$ – функция – оригинал и $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то $e^{p_0 t} f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p - p_0)$.

$$\text{Доказательство. } e^{p_0 t} f(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} e^{p_0 t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} f(t) dt = F(p - p_0).$$

Замечание. Таким образом, умножение оригинала на величину $e^{p_0 t}$, при переходе к изображению, осуществляет сдвиг изображения на величину p_0 .

9. Свертка оригиналов.

Сверткой двух функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется функция $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$.

Свертка обозначается $f(t)*\varphi(t)$ или $(f*\varphi)(t)$.

Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются функциями – оригиналами, то сверткой оригиналов называется определенный интеграл $(f*\varphi)(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$.

Теорема. Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются функциями – оригиналами и $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, $\varphi(t) \stackrel{\bullet}{=} \Phi(p)$, то свертка функций имеет изображение

$$(f*\varphi)(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \stackrel{\bullet}{=} F(p)\Phi(p)$$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } (f*\varphi)(t) &= \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \right) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt}\varphi(t-\tau)dt = \left[\begin{array}{l} t-\tau=t', \quad dt=dt' \\ t=\tau \Rightarrow t'=0, t \rightarrow \infty \Rightarrow t' \rightarrow \infty \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_0^{\infty} e^{-p(t'+\tau)}\varphi(t')dt = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau)d\tau \int_0^{\infty} e^{-pt'}\varphi(t')dt = F(p) \cdot \Phi(p). \end{aligned}$$

Теорему о свертке можно использовать для отыскания оригинала по заданному изображению.

Используя таблицу простейших функций – оригиналов и изображений, а также их свойства запишем полную таблицу.

ТАБЛИЦА ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ.

№	Функция – оригинал	Функция – изображение
1	2	3
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
7	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
8	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
9	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{p^2 + \omega^2}$
10	$(t - a)^n$	$\frac{n! e^{-ap}}{p^{n+1}}$
1	2	3
12	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$
13	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
14	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$

ОТЫСКАНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ЗАДАННОМУ ИЗОБРАЖЕНИЮ.

1. Если изображение представляет дробно – рациональное выражение, то раскладывают дробь на простейшие дроби, а затем, применяя метод неопределенных коэффициентов, находят неизвестные коэффициенты в разложении. После этого используем свойства и таблицу оригиналов и изображений.

2. С использованием теоремы о свертке.

3. С использованием теорем дифференцирования и интегрирования.

4. С использованием свойств смещения изображения и запаздывания оригинала.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t).$$

Требуется найти решение заданного уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, y''(0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – некоторые заданные числа.

Рассмотрим алгоритм решения дифференциального уравнения с помощью преобразования Лапласа.

1. Переходим от данного уравнения с помощью теоремы о дифференцировании оригинала $y(t)$, используя начальные условия, к операторному уравнению. То есть к уравнению относительно изображения $Y(p)$ заданного оригинала, учитывая, что $f(t)$ имеет изображение $F(p)$. Получаем уравнение вида:

$$Q_n(p)Y(p) = F(p) + R_{n-1}(p),$$

где $Q_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n$ – характеристический многочлен, $R_{n-1}(p)$ – многочлен степени не выше $(n-1)$.

2. Находим изображение $Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}$.

3. С помощью таблицы оригиналов и изображений, а также применяя свойства преобразования Лапласа, по заданному изображению находим оригинал, который будет представлять частное решение заданного дифференциального уравнения.

4. Схема решения системы дифференциальных уравнений аналогично указанной выше схеме решения дифференциального уравнения.