

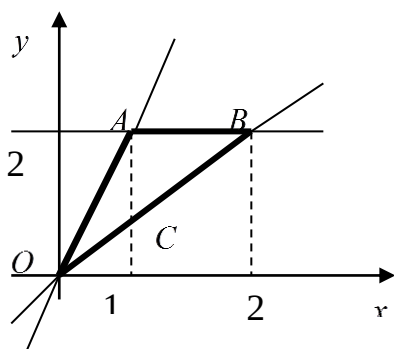
1 ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Содержание: определение двойного интеграла, вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат, замена переменных в двойном интеграле, вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Вычислить двойной интеграл $\iint_G xy dx dy$ по области $G: y = x, y = 2x, y = 2$.

Вычисления произвести вдоль стандартной области, а затем поменяв пределы интегрирования вдоль нестандартной.



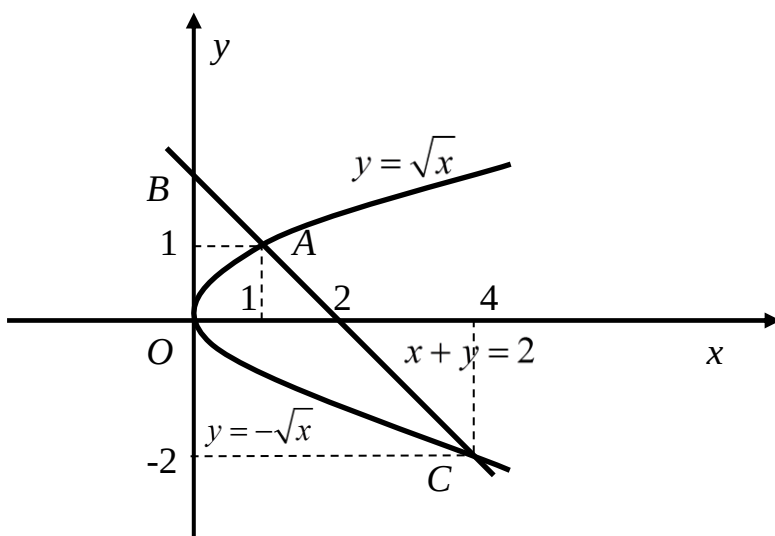
Решение. 1. Область является стандартной относительно оси Ox . Точки пересечения прямых $O(0;0)$, $A(1;2)$ и $B(2;2)$. Вычислим двойной интеграл.

$$\iint_G xy dx dy = \int_0^2 dy \int_{y/2}^y xy dx = \int_0^2 \frac{yx^2}{2} \Big|_{y/2}^y dy = \frac{3}{8} \int_0^2 y^3 dy = \frac{3}{32} y^4 \Big|_0^2 = \frac{3}{2}.$$

2. Относительно оси Oy область не является стандартной. Разбиваем область на две области, каждая из которых стандартна относительно оси Oy .

$$\begin{aligned} \iint_G xy dx dy &= \iint_{OAC} xy dx dy + \iint_{ABC} xy dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} xy dy + \int_1^2 dx \int_x^2 xy dy = \frac{1}{2} \int_0^1 xy^2 \Big|_x^{2x} dx + \frac{1}{2} \int_1^2 xy^2 \Big|_x^2 dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 (4x - x^3) dx = \frac{3}{8} x^4 \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{1}{8} x^4 \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{8} + \frac{9}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

1.2.2 Вычислить двойной интеграл $\iint_G xy dx dy$, изобразив в декартовой



системе координат область интегрирования G , которая ограничена параболой $y^2 = x$ и прямыми $y + x = 2$, $x = 0$.

Решение. Изобразим область интегрирования G предварительно найдя точки пересечения параболы и прямой $y + x = 2$. Решим систему

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x = 2 - y. \end{cases} \quad y^2 = 2 - y$$

или $y^2 + y - 2 = 0$. $\begin{cases} y_1 = 1, \\ x_1 = 1, \end{cases}$ и $\begin{cases} y_2 = -2, \\ x_2 = 4. \end{cases}$

Таким образом, получили две точки пересечения параболы $y^2 = x$ и прямой $y + x = 2$: $A(1; 1)$ и $C(4; -2)$.

Область интегрирования G на рисунке представляет собой фигуру OAB . Вычислим двойной интеграл $\iint_G xy dx dy$, путем перехода к повторному интегралу.

$$\begin{aligned} \iint_G xy dx dy &= \int_0^1 x dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 xy^2 \Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \left((2-x)^2 - (\sqrt{x})^2 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (4x - 5x^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left(2x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{5}{3} + \frac{1}{4} \right) - 0 = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

1.2.3 Вычислить двойной интеграл, по области $G: x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0$.

Решение. $\iint_G \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint_G \frac{r dr d\varphi}{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \Big|_0^R d\varphi = R \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R}{2}$

1.2.4 Вычислить интеграл Пуассона $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Решение. Для вычисления данного интеграла найдем $I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy$.

Данный интеграл можно рассматривать как повторный интеграл.

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dy = \iint_G e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_G e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2} dr^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \Big|_0^\infty d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, $I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x^2 + y) dx dy$, где G – область,

ограниченная параболлами $y = x^2$ и $y^2 = x$.

1.3.2. Вычислить двойной интеграл $\iint_G \frac{x^2}{y^2} dx dy$, где G – область,

ограниченная прямыми $y = x$, $x = 2$ и гиперболой $xy = 1$.

1.3.3. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x + y^2) dx dy$, где G – область, ограниченная параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$.

1.3.4. Вычислить двойной интеграл $\iint_G x^2 y^2 dx dy$, где G – область, ограниченная кубической параболой $y = x^3$ и прямыми $y = 1$, $x = 0$.

1.3.5. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x^2 + y^2) dx dy$, где G – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$.

1.3.6. Вычислить двойной интеграл $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, где G – область, ограниченная неравенством $x^2 + y^2 \leq 2Rx$ ($y \leq 0$).

1.3.7. Вычислить двойной интеграл $\iint_G \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, где G – область, ограниченная неравенствами $\frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Вычислить двойной интеграл по области G , ограниченной указанными линиями. Вычисления произвести с внешним интегрированием по переменной x и внешним интегрированием по переменной y . Начертить область интегрирования.

1.4.1.1 $\iint_G (x^2 y + y^2 x) dx dy$, $G: y = x, x + y = 1, y = 0, 25$.

1.4.1.2 $\iint_G (x^2 + yx + y^2) dx dy$, $G: y = x^2, x + y = 2$.

1.4.1.3 $\iint_G (x^2 - y + y^2 x) dx dy$, $G: y = x^2, x = y^3$.

1.4.1.4 $\iint_G (5x^2 y - 3y^2 x^3) dx dy$, $G: y = x, x + y = 3, y = 1$.

1.4.1.5 $\iint_G (x^2 - y^2) dx dy$, $G: y - x^2 = 0, x - y^2 = 0$.

1.4.1.6 $\iint_G (2x^3 y + 3y^2 x) dx dy$, $G: y = x^3, y = x^2$.

1.4.1.7 $\iint_G (4x^3 + 3y^2 x^2) dx dy$, $G: y = x^3, y = x, x \geq 0$.

1.4.1.8 $\iint_G (5x^4 + 2y^3 x^2) dx dy$, $G: y = x^3, y = x, x \leq 0$.

1.4.1.9 $\iint_G \frac{y^2}{x^2} dx dy$, $G: y = x^2, y = 1, x = 0, 5$.

1.4.1.10 $\iint_G (x - y) dx dy$, $G: y^2 = x, x = 1, y = 0, 5$.

$$1.4.1.11 \quad \iint_G (2x^2y - y^2x) dx dy, \quad G: y = 2x, x + y = 3, y = 1.$$

$$1.4.1.12 \quad \iint_G (2x^2 - 3yx + 3y^3) dx dy, \quad G: y = x^2, 2x + y = 3.$$

$$1.4.1.13 \quad \iint_G (2x^2 - 3y + 4yx) dx dy, \quad G: y = x^2, y = 8 - x^2.$$

$$1.4.1.14 \quad \iint_G (4xy - 3y^2x^2) dx dy, \quad G: y = x, x + y = 4, y = 1.$$

$$1.4.1.15 \quad \iint_G (3x^2 + 9y^2) dx dy, \quad G: y = x^2 - 4, y = 4 - x^2.$$

$$1.4.1.16 \quad \iint_G (6x^3y + 6y^3x) dx dy, \quad G: y = x^3, y^3 = x, y \leq 0.$$

$$1.4.1.17 \quad \iint_G (5x^4 - 6y^2x^3) dx dy, \quad G: y = x^5, y = x, x \geq 0.$$

$$1.4.1.18 \quad \iint_G (6x^5 + 16y^4x^4) dx dy, \quad G: y = x^5, y = x, x \leq 0.$$

$$1.4.1.19 \quad \iint_G \frac{16y^4}{x^4} dx dy, \quad G: y = x^3, y = 1, x = 0.$$

$$1.4.1.20 \quad \iint_G \frac{12y^2}{x^3} dx dy, \quad G: y^3 = x, x = 1, y = 0, 5.$$

$$1.4.1.21 \quad \iint_G (9x^2y^2 - 4yx) dx dy, \quad G: y = 3x, x + y = 4, y = 1.$$

$$1.4.1.22 \quad \iint_G (3x^2 + 4yx + 8y^3) dx dy, \quad G: y = x^2, 3x + y = 4.$$

$$1.4.1.23 \quad \iint_G (4x^3 - 3y^2 + 9y^2x^2) dx dy, \quad G: y = x^2, y = 18 - x^2.$$

$$1.4.1.24 \quad \iint_G (6x^2y - 12y^3x^2) dx dy, \quad G: y = x, x + y = 8, y = 2.$$

$$1.4.1.25 \quad \iint_G (4x^3 + 12y^3) dx dy, \quad G: y = -1 + x^2, y = 1 - x^2.$$

$$1.4.1.26 \quad \iint_G (10xy^4 + 10yx^4) dx dy, \quad G: y = x^4, y^4 = x.$$

$$1.4.1.27 \quad \iint_G (6x^5 - 20y^3x^4) dx dy, \quad G: y = x^6, y = x^2, x \geq 0.$$

$$1.4.1.28 \quad \iint_G (84x^5 + 90y^4x^4) dx dy, \quad G: y = x^6, y = x^2, x \leq 0.$$

$$1.4.1.29 \quad \iint_G xy dx dy, \quad G: y = x^4, y = 16, x \geq 0.$$

$$1.4.1.30 \quad \iint_G x^3y^2 dx dy, \quad G: y^4 = x, x = 16, y \leq 1.$$

2 ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

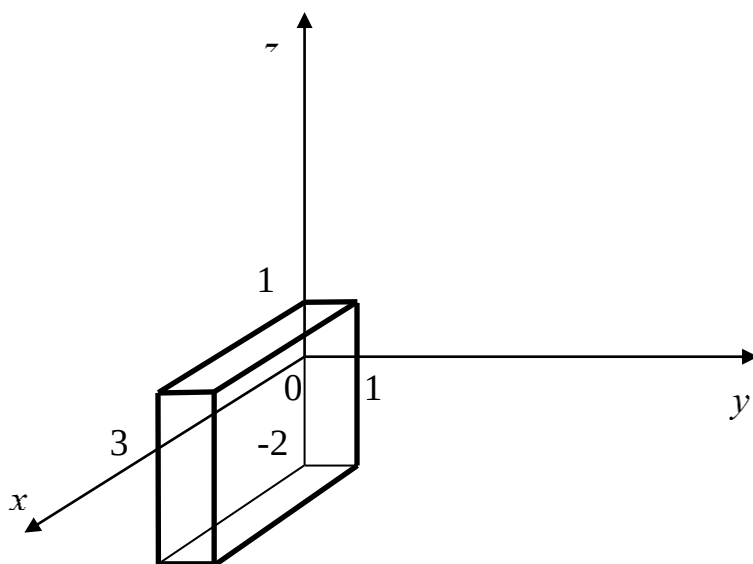
2.1 Содержание: определение тройного интеграла, вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат, замена переменных в тройном интеграле, вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системах координат.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (x - y - z) dx dy dz$, изобразив в

декартовой системе координат область интегрирования Ω , которая ограничена поверхностями $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 1$.

Решение. Областью интегрирования является прямой параллелепипед, который изображен на рисунке.

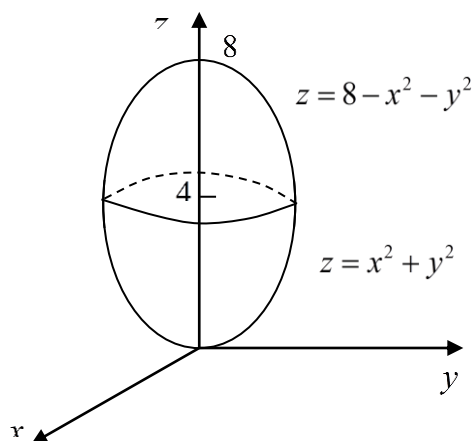


Вычислим тройной интеграл

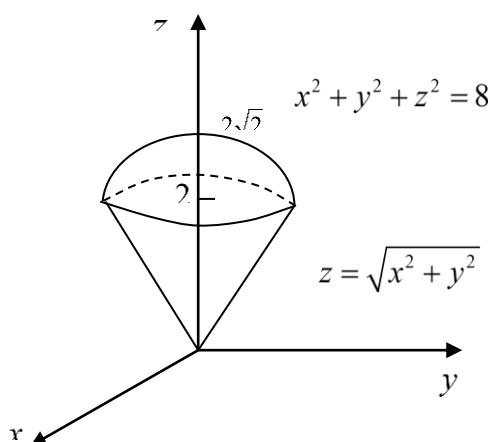
$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x - y - z) dx dy dz &= \int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_{-2}^1 (x - y - z) dz = \int_0^3 dx \int_0^1 \left(xz - yz - \frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_{-2}^1 dy = \\ &= \int_0^3 dx \int_0^1 \left(x - y - \frac{1}{2} + 2x - 2y + 2 \right) dy = \int_0^3 dx \int_0^1 \left(3x - 3y + \frac{3}{2} \right) dy = 3 \int_0^3 dx \int_0^1 \left(x - y + \frac{1}{2} \right) dy = \\ &= 3 \int_0^3 \left(xy - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y \right) \Big|_0^1 dx = 3 \int_0^3 \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 \right) dx = 3 \int_0^3 x dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 3 \cdot \left(\frac{9}{2} - 0 \right) = \frac{27}{2} = 13 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.2.2 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, если область интегрирования ограничена линиями $z = 8 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2$.

Решение. Перейдем к цилиндрической системе координат: $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 8 - r^2$.



$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} r^3 dr d\varphi dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{r^2}^{8-r^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (8r^3 - r^5) dr = 32 \int_0^{2\pi} d\varphi = 64\pi \end{aligned}$$



2.2.3 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, если область интегрирования ограничена линиями $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Перейдем к сферической системе координат. $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} \rho^3 \sin \Theta d\rho d\varphi d\Theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 d\rho = 16 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \Theta d\Theta = (16 - 8\sqrt{2}) \int_0^{2\pi} d\varphi = (32 - 16\sqrt{2})\pi. \end{aligned}$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная плоскостями $z = x$, $y = 1$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

2.3.2 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (3y^2 + x^2) dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная плоскостями $z = 10x$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2.3.3 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (8y + 12z) dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная поверхностями $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 3x^2 + 2y^2$, $z = 0$.

2.3.4 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная плоскостями $z = x$, $y = 1$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

2.3.5 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная поверхностями $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 3$.

2.3.6 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где Ω – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

2.3.7 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная поверхностями $xy=1$, $xy=4$, $x=1$, $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z$, $y=x$, $y=2x$.

2.3.8 Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} dx dy dz$, где Ω – часть шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ расположенного во втором октанте.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Вычислить тройной интеграл.

2.4.1.1 $\iiint_{\Omega} (3x^2 - 5xy + 4yz^2) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq x^2$.

2.4.1.2 $\iiint_{\Omega} (4xz - 2xy + 4yz) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x, 0 \leq z \leq y$.

2.4.1.3 $\iiint_{\Omega} (2y^2 - 5xz + z^2) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq y^2$.

2.4.1.4 $\iiint_{\Omega} (4x^2 - 6y + 24xyz^2) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^3, 0 \leq z \leq 1-x$.

2.4.1.5 $\iiint_{\Omega} (24x^2y - 36xy^2 + 4yz^2) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 1-x-y$.

2.4.1.6 $\iiint_{\Omega} (6zx^2 - 4y^3 + 9y^2z^2) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4-x, 0 \leq z \leq y$.

2.4.1.7 $\iiint_{\Omega} (4y^3 - 24x^2z + 3z^2) dx dy dz$, $\Omega: -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-2x-3y$.

2.4.1.8 $\iiint_{\Omega} (6z - 4x + 4z) dx dy dz$, $\Omega: -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq 4 - x - y$.

2.4.1.9 $\iiint_{\Omega} (9x^2 - 12y^2 + 9z^2) dx dy dz$, $\Omega: -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1+x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$.

2.4.1.10 $\iiint_{\Omega} (8x - 6xz + 6yz^2) dx dy dz$, $\Omega: -1 \leq x \leq 0, -1-x \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 3-x-y$.

2.4.1.11 $\iiint_{\Omega} (3zx^2 - 4xy^2 + 3yz^2) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 5-x-y$.

2.4.1.12 $\iiint_{\Omega} (18y^2 - 48x + 48yz^2) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq 4-x^2$.

2.4.1.13 $\iiint_{\Omega} (3x - 5y + 4z) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x, 0 \leq z \leq 4-y^2$.

2.4.1.14 $\iiint_{\Omega} (18yx^2 - 2x + 4yz) dx dy dz$, $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x^2, 0 \leq z \leq 5-x^2$.

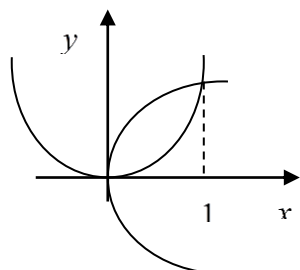
- 2.4.1.15 $\iiint_{\Omega} (6xy^2 - 3x^2 + 36yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 9 - y^2.$
- 2.4.1.16 $\iiint_{\Omega} (18x^2 - 4xy^2 + 3yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x, 0 \leq z \leq 9x^2.$
- 2.4.1.17 $\iiint_{\Omega} (8z - 4xy + 6y^2z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4 - x, 0 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2.$
- 2.4.1.18 $\iiint_{\Omega} (6y^2 - 24xzy + z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4x^2, 0 \leq z \leq 2y^2.$
- 2.4.1.19 $\iiint_{\Omega} (6x^2 - 6xy + 48xyz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 8x^3, 0 \leq z \leq 8 - x.$
- 2.4.1.20 $\iiint_{\Omega} (9x^2y^2 - 6xy^2 + 3z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq 6 - x - y.$
- 2.4.1.21 $\iiint_{\Omega} (6z - 24y^3 + 18y^2z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5 - x, 0 \leq z \leq 6 - y^2.$
- 2.4.1.22 $\iiint_{\Omega} (9y^2 - 9x^2 + 6xz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 0, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - 3x - 2y.$
- 2.4.1.23 $\iiint_{\Omega} (zx^2 - xyz) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 0, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq 8 - 2x - 2y.$
- 2.4.1.24 $\iiint_{\Omega} (3x^2 - 9y^2 + 6z^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2 + x, 0 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2.$
- 2.4.1.25 $\iiint_{\Omega} (6y^2x - 6yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 0, -2 - x \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 8 - 3x - 3y.$
- 2.4.1.26 $\iiint_{\Omega} (4zx - 4xy + 4z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 2, x - 2 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 10 - 2x - 2y.$
- 2.4.1.27 $\iiint_{\Omega} (6y^2x - 8xyz + 6yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 8x^3 \leq y \leq 8x^2, 0 \leq z \leq 8 - x^2.$
- 2.4.1.28 $\iiint_{\Omega} (2x - 3y + 4z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4 - x, 0 \leq z \leq 9 - y^2.$
- 2.4.1.29 $\iiint_{\Omega} (8yx - 4xz + 24yz) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 4 - x^2, 0 \leq z \leq 12 - x^2.$
- 2.4.1.30 $\iiint_{\Omega} (6y^2 - 8xyz + 3z^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 2, x^2 - 4 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 16 - y^2.$

3 ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

3.1 Содержание: вычисление площади фигуры с помощью двойного интеграла, вычисление объёмов тел с помощью двойного и тройного интегралов.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y^2 = x$.

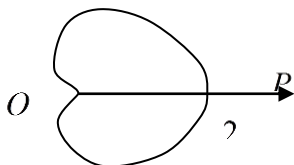


Решение.

$$S = \iint_G dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}.$$

3.2.2 Вычислить, с помощью двойного интеграла, площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 1 + \cos \varphi$.



Решение. Найдем площадь половины фигуры и умножим её на два, что возможно в виду

симметрии фигуры относительно полярной оси

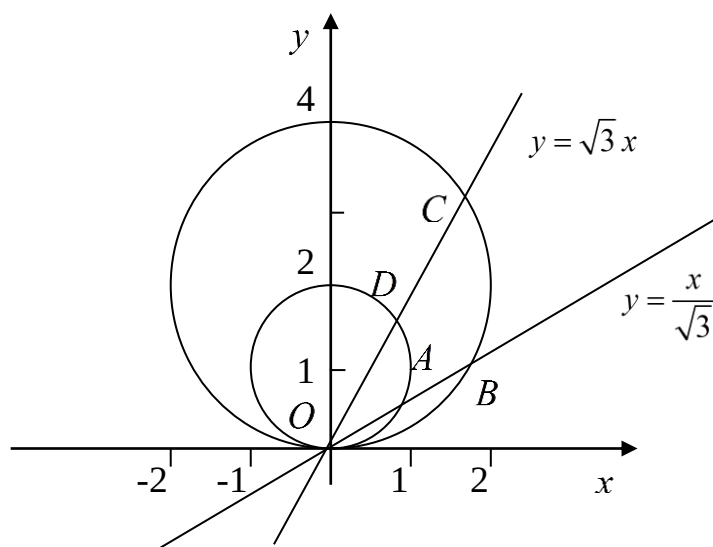
$$S = \iint_G r dr d\varphi = 2 \iint_{G_1} r dr d\varphi = 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1+\cos\varphi} r dr = \int_0^{\pi} r^2 \Big|_0^{1+\cos\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

3.2.3 Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, которая ограничена линиями, заданными в декартовой системе координат: $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = \sqrt{3}x$ и $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Сделать чертеж области, ограниченной заданными линиями.

Решение. После выделения полного квадрата, относительно переменной y , уравнение $y^2 - 2y + x^2 = 0$ принимает вид $x^2 + (y-1)^2 = 1$, которое задает окружность с центром в точке $C_1(0;1)$ и радиусом $R_1=1$. Аналогично, уравнение $y^2 - 4y + x^2 = 0$ преобразовывается к виду $x^2 + (y-2)^2 = 4$ – окружность с центром в точке $C_2(0;2)$ и радиусом $R_2=2$. Уравнения $y = \sqrt{3}x$ и $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ задают прямые проходящие через начало координат. Изобразим фигуру G , которая ограничена заданными кривыми, в декартовой системе координат (на рисунке область G представляет собой фигуру $ABCD$).



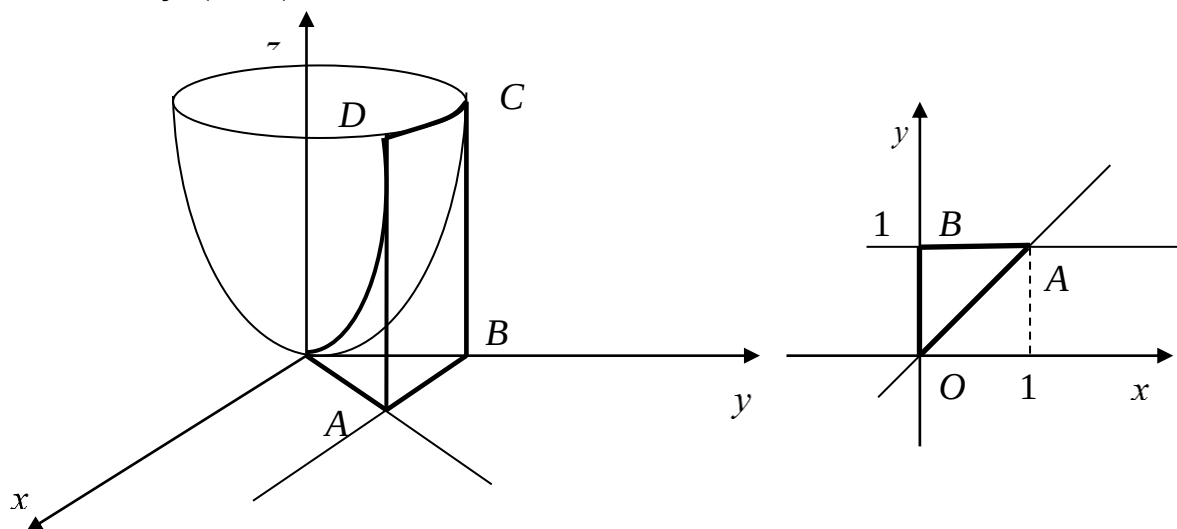
Перейдем от декартовой к полярной системе координат, используя формулы: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда уравнения окружностей принимают вид $r = 2 \sin \varphi$ и $r = 4 \sin \varphi$, а уравнения прямых $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$ или $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Вычислим площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, используя формулу: $S = \iint_G r dr d\varphi$. Вычисление двойного интеграла проведем путем перехода к повторному интегрированию.

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} r dr = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r^2 \Big|_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (16 \sin^2 \varphi - 4 \sin^2 \varphi) d\varphi = 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \varphi d\varphi = \\
 &= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 3 \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\
 &= 3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ (кв. ед.)}.
 \end{aligned}$$

3.2.4 Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + 3y^2$, $y = x$, $y = 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy .

Решение. Данное тело ограничено эллиптическим параболоидом $z = x^2 + 3y^2$ и плоскостями $y = x$, $y = 1$, $x = 0$, $z = 0$, и имеет проекцию на плоскость

xOy область G . Сделаем чертежи данного тела ($OABCD$) и его проекции на плоскость xOy (OAB).



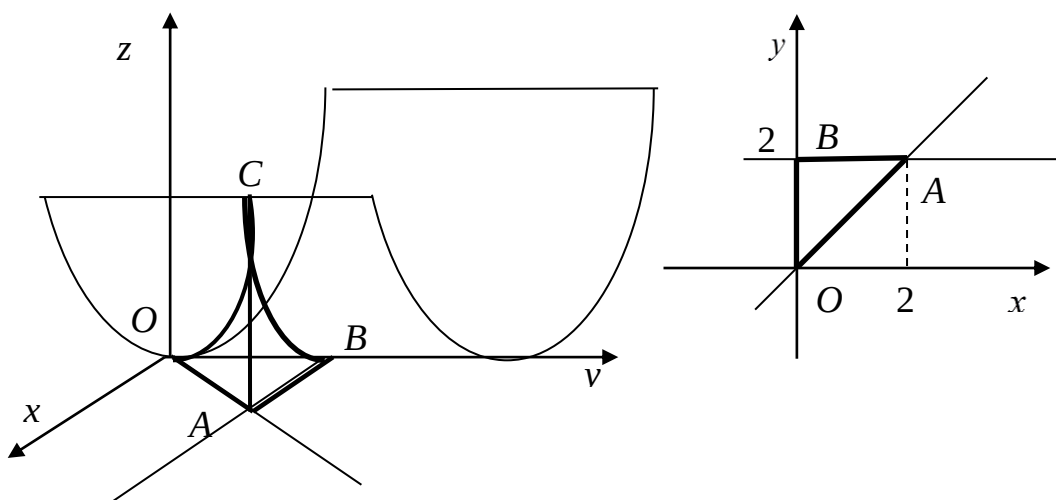
Объем цилиндрического тела ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y)$ проекция, которого на плоскость xOy представляет собой фигуру G , находят по формуле $V = \iint_G f(x; y) dx dy$. Тогда объем заданного тела

$$V = \iint_G (x^2 + 3y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 (x^2 + 3y^2) dy = \int_0^1 (x^2 y + y^3) \Big|_x^1 dx = \int_0^1 (x^2 + 1 - x^3 - x^3) dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 + 1 - 2x^3) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x - \frac{1}{2} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{6} \text{ (куб. ед.)}.$$

3.2.5 Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2$, $y = x$, $y = 2$, $z \geq 0$. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy .

Решение. Уравнение $z = x^2$ определяет параболический цилиндр, а остальные поверхности являются плоскостями. Сделаем чертежи данного тела ($OABC$) и его проекции на плоскость xOy (OAB).



Вычислим объем построенного тела $OABC$ по формуле $V = \iiint_{\Omega} dx dy dz$.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dx \int_x^2 dy \int_0^{x^2} dz = \int_0^2 dx \int_x^2 z \Big|_0^{x^2} dy = \int_0^2 dx \int_x^2 x^2 dy = \int_0^2 x^2 y \Big|_x^2 dx = \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \\ &= \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

3.2.6 Найти центр масс однородного полушара, радиуса R .

Решение. В силу осевой симметрии $x_c = y_c = 0$. Найдем аппликату центра масс.

$$z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz} = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{V_{\text{полушара}}} = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3 \iiint_{\Omega} z dx dy dz}{2 \pi R^3}.$$

Воспользуемся переходом к сферической системе координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Theta, \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \Theta, \text{ и } dx dy dz = \rho^2 \sin \Theta d\rho d\varphi d\Theta \\ z = \rho \cdot \cos \Theta. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{3 \iiint_{\Omega} z dx dy dz}{2 \pi R^3} = \frac{3 \iiint_{\Omega} \rho \cos \Theta \rho^2 \sin \Theta d\rho d\varphi d\Theta}{2 \pi R^3} = \frac{3}{2 \pi R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{3}{2 \pi R^3} \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^R = \frac{3}{8} R. \end{aligned}$$

Координаты центра масс $C\left(0; 0; \frac{3}{8} R\right)$.

3.2.7 Найти момент инерции плоского однородного диска, радиуса R и массой m относительно оси Oz .

Решение. Плотность вещества, из которого состоит плоский диск, равна

$$\mu = \frac{m}{\pi R^2}.$$

Определим момент инерции плоского диска относительно оси Oz .

$$M_{Oz} = \iint_G (x^2 + y^2) \frac{m}{\pi R^2} dx dy = \frac{m}{\pi R^2} \iint_G r^2 r dr d\varphi = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} m R^2.$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями:

а) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$; б) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$;

в) $4y = x^2$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$; г) $x = (y - 2)^3$, $x = 4y - 8$.

3.3.2 Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями:

а) $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$;

б) $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = x$, $y = 0$.

3.3.3 Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

а) $z = y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

б) $z = 2 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$.

3.3.4 Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

а) $z = 2 - x - y$, $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$;

б) $z = 2 - y$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \geq 0$.

3.3.5 Вычислить массу кругового кольца, если в каждой точке его поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния её от центра кольца.

3.3.6 Вычислить момент инерции однородного куба относительно одного из его рёбер.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры G , ограниченной указанными линиями.

3.4.1.1	$G: y = x^2, y = 2 - x^2$.	3.4.1.2	$G: y = x^2 - 1, y = 1 - x^2$.
3.4.1.3	$G: y = x^2 + 8x, y = -x^2$.	3.4.1.4	$G: y = \frac{3}{4 - x^2}, y = x^2$.
3.4.1.5	$G: y = \frac{5}{x^2 - 9}, y = x^2 - 5$.	3.4.1.6	$G: y = \frac{3}{x^2 - 4}, y = x^2 - 2$.
3.4.1.7	$G: y = \sqrt{x^3}, y = 3x$.	3.4.1.8	$G: y = -\sqrt{x^3}, y = -x^3$.
3.4.1.9	$G: y = \sqrt{x^3}, y = x^3$.	3.4.1.10	$G: y = \frac{10}{x^2}, y = 8 - x^2$.
3.4.1.11	$G: y = \frac{8}{x^3}, y = 9 - x^3$.	3.4.1.12	$G: y = \frac{4}{x^2}, y = 5 - x^2$.
3.4.1.13	$G: y = x^2 - 6, y = -x$.	3.4.1.14	$G: y = x^2 - x, y = 4x$.
3.4.1.15	$G: y = x^2 - x, y = 2x + 2$.	3.4.1.16	$G: y = x^2, y = 8 - x^2$.

3.4.1.17	$G: y = x^2 - 1, y = x - x^2.$	3.4.1.18	$G: y = x^2 - 4x, y = -x^2.$
3.4.1.19	$G: y = \frac{90}{x^2 + 1}, y = x^2.$	3.4.1.20	$G: y = \frac{32}{x^2 + 4}, y = x^2.$
3.4.1.21	$G: y = \frac{2}{x^2 + 1}, y = x^2.$	3.4.1.22	$G: y = \sqrt{x}, y = x - 2.$
3.4.1.23	$G: y = -\sqrt{x}, y = -x^2.$	3.4.1.24	$G: y = \sqrt{x}, y = x.$
3.4.1.25	$G: y = -\frac{2}{x}, y = 3 + x.$	3.4.1.26	$G: y = \frac{6}{x}, y + x = -5.$
3.4.1.27	$G: y = \frac{2}{x}, y = 3 - x.$	3.4.1.28	$G: y = x^2, y = 2 - x.$
3.4.1.29	$G: y = x^2 + 4x, y = x.$	3.4.1.30	$G: y = x^2 + 4x, y = x.$