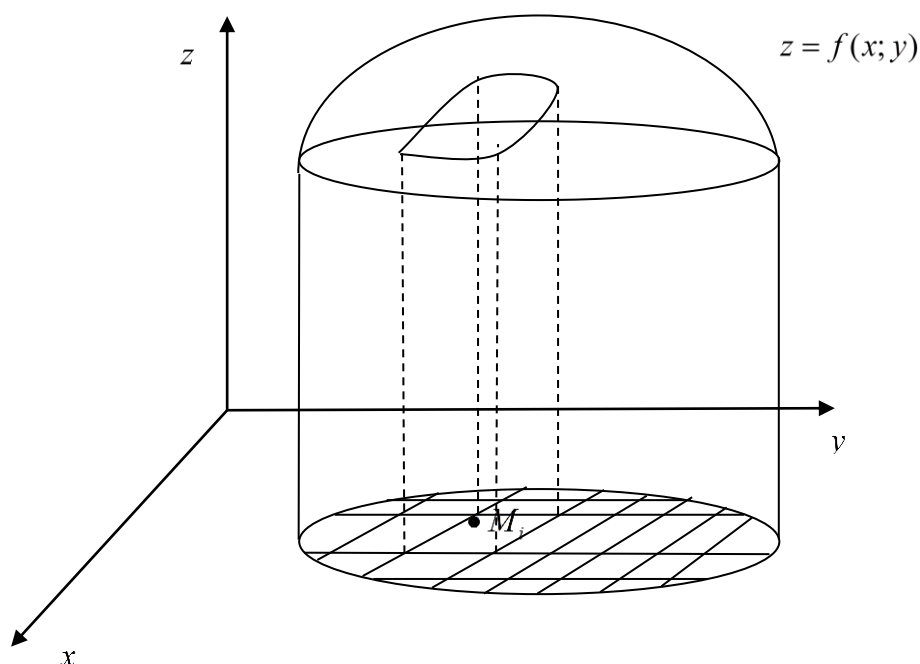


ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ДВОЙНОГО И ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Задача об объёме цилиндроида.

Цилиндром с основанием на плоскости xOy называется тело, ограниченное поверхностью $z = f(x; y)$, где функция f определена в некоторой замкнутой области G , плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси Oz и направляющей совпадающей с границей области G .



Для определения объёма цилиндроида разобьём произвольным образом область G системой пересекающихся линий на n элементарных областей, каждая из которых имеет некоторую площадь: $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_i, \dots, \Delta S_n$. Расстояние между наиболее удалёнными точками каждой элементарной области называется диаметром: $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n$. Значение $\lambda_n = \max_i d_i$ называется мелкостью разбиения. В каждой элементарной области произвольным образом выбираем точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_i(x_i; y_i), \dots, M_n(x_n; y_n)$.

Построим элементарные цилиндры с площадью основания ΔS_i и высотой $h_i = f(M_i) = f(x_i; y_i)$. Тогда объём элементарного цилиндра можем определить по формуле: $V_{\text{эл.цил.}} = f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Заменим приближенно цилиндроид ступенчатым цилиндром, который состоит из элементарных цилиндров. Тогда приближённое значение объёма цилиндроида равно объёму ступенчатого тела:

$$V_{\text{ст.цил.}} = \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i.$$

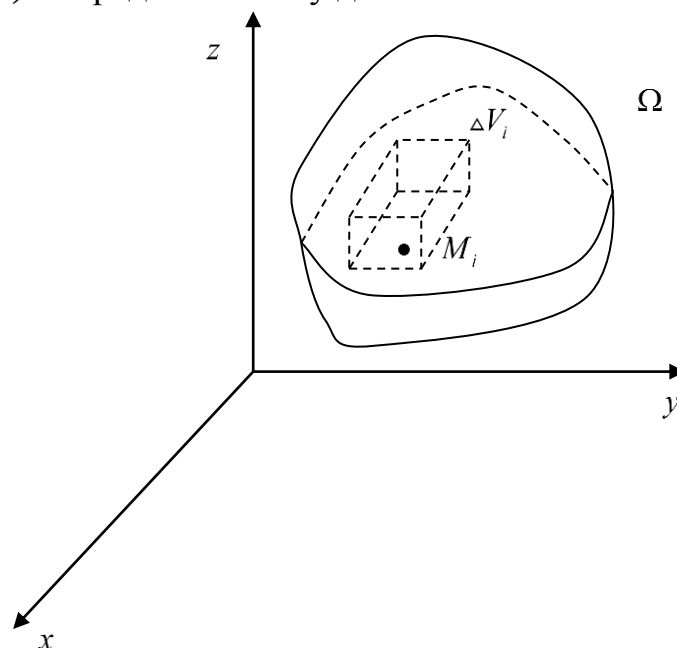
Таких ступенчатых цилиндроидов можно построить бесконечное множество. Их объем будет зависеть от способа разбиения области G и выбора точек M_i .

По определению объемом цилиндроида называется предел объемов ступенчатых цилиндроидов, построенных выше указанным способом, при мелкости разбиения стремящемся к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$V_{\text{цил-др.}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i.$$

2. Задача о массе неоднородного материального тела.

Пусть некоторая пространственная область Ω заполнена веществом с плотностью $f(x; y; z)$. Определим массу данного тела.



Если бы $f(x; y; z) = \text{Const}$, то $m = f \cdot V$. Но тело не является однородным, следовательно, $f(x; y; z) \neq \text{Const}$.

Разобьем тело системой пересекающихся поверхностей произвольным образом на n элементарных областей (с объёмами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_n$). Расстояние между наиболее удаленными точками каждой элементарной пространственной области называется диаметром: $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n$. Значение $\lambda_n = \max_i d_i$ называется мелкостью разбиения. В каждой элементарной пространственной области произвольным образом выберем точки $M_i(x_i; y_i; z_i)$, где $i = \overline{1; n}$. Так как, элементарные области малы, то можно считать, что масса элементарного тела равномерно распределена в области с плотностью совпадающей с плотностью $f(x_i; y_i; z_i)$, вычисленной в точке $M_i(x_i; y_i; z_i)$.

Тогда приближенно масса элементарного тела будет равна $\Delta m_i \approx f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta V_i$. Масса тела, составленного из элементарных тел равна

$$m_{cm. мел} \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta V_i.$$

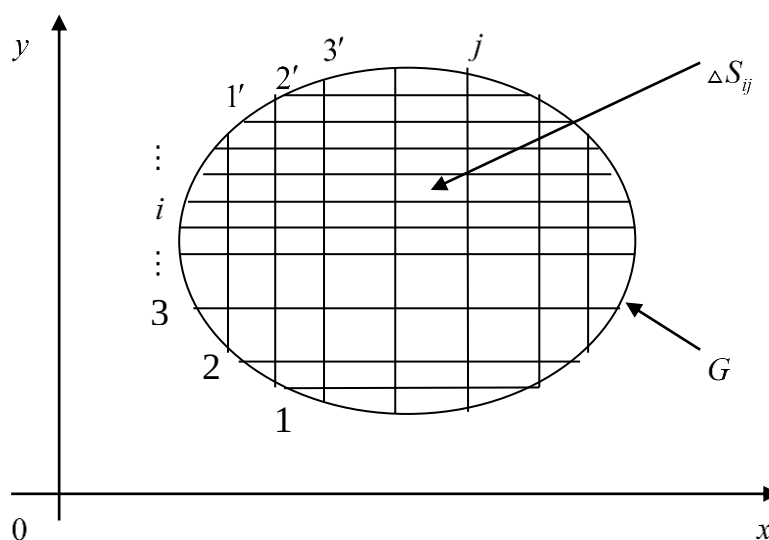
По определению массой неоднородного материального тела с плотностью $f(x; y; z)$ называется предел масс ступенчатых тел, построенных выше указанным способом, при мелкости разбиения стремящемся к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$m \stackrel{def}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta V_i.$$

Эти и другие задачи приводят к понятию кратных интегралов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $f(x; y)$ определена в некоторой замкнутой области G . Разобьем данную область системой пересекающих линий произвольным образом на n элементарных областей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_i, \dots, \Delta S_n$.



Расстояние между наиболее удаленными точками каждой элементарной области называется диаметром: $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n$. Значение $\lambda_n = \max_i d_i$ называется мелкостью разбиения. В каждой элементарной области произвольным образом выбираем точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_i(x_i; y_i), \dots, M_n(x_n; y_n)$. Вычисляем значение функции в этих точках $f(x_1; y_1), f(x_2; y_2), \dots, f(x_i; y_i), \dots, f(x_n; y_n)$. Составим суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$, которые называются двухмерными интегральными суммами функции f в области G .

Такое название оправдывает себя, так как пронумеровать элементарные области можно с помощью двух индексов: $1, 2, 3, \dots, i, \dots, m$ – по горизонтали, $1', 2', 3', \dots, i, \dots, k$ – по вертикали. Левая нижняя вершина области будет

соответствовать пересечению i – той горизонтальной линии и j – той вертикальной линии. Таким образом, $(i; j)$ – та область, будет иметь площадь ΔS_{ij} , а точка лежащая в этой элементарной области будет иметь координаты $M_{ij}(x_i; y_j)$. Тогда двумерную интегральную сумму можно записать:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k f(x_i; y_j) \cdot \Delta S_{ij}.$$

Таких двумерных интегральных сумм можно составить сколь угодно много. Они зависят от способа разбиения области интегрирования и от выбора точек внутри элементарной области.

Определение. Двойным интегралом функции $f(x; y)$ по области G называется предел двухмерных интегральных сумм данной функции при стремлении мелкости разбиения к нулю и если этот предел существует и конечен.

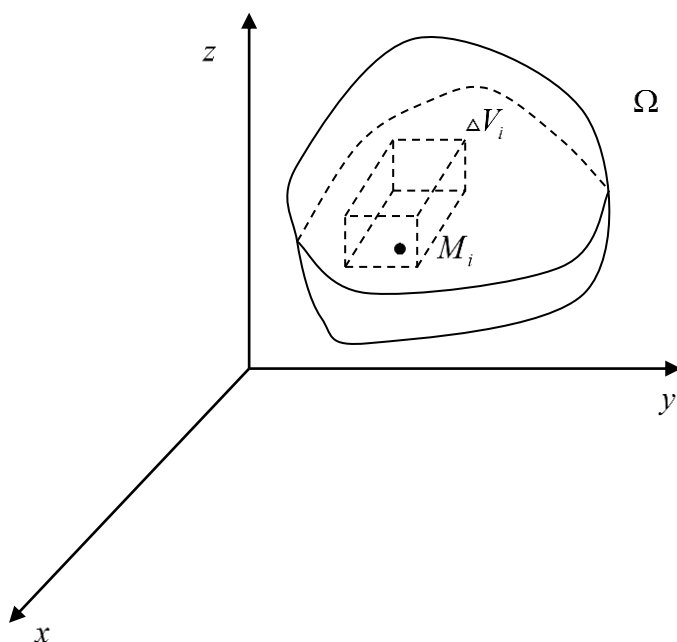
$$\iint_G f(x; y) dS \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$$

Теорема (существования двойного интеграла) Если функция $f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области G , то предел двухмерных интегральных сумм от функции существует и функция является интегрируемой в заданной области.

На основании первой задачи, приводящей к понятию кратного интеграла, и определения двойного интеграла можно сделать следующее утверждение: если $f(x; y) \geq 0$ в области G и является интегрируемой в ней, то двойной интеграл от этой функции представляет собой объем цилиндрида, ограниченного данной поверхностью.

$$V = \iint_G f(x; y) dS \text{ – геометрический смысл двойного интеграла.}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА



Пусть функция $f(x; y; z)$ определена в некоторой пространственной области Ω , занимающая некоторый объем. Разобьем область Ω произвольным образом системой пересекающихся поверхностей на n элементарных пространственных областей. Обозначим объемы элементарных тел $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_i, \dots, \Delta V_n$.

Расстояние между наиболее удаленными точками каждой элементарной пространственной области называется диаметром: $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n$. Значение $\lambda_n = \max_i d_i$ называется мелкостью разбиения. В каждой элементарной пространственной области произвольным образом выберем точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), \dots, M_i(x_i; y_i; z_i), \dots, M_n(x_n; y_n; z_n)$ и вычисляем значения функции в них: $f(x_1; y_1; z_1), f(x_2; y_2; z_2), \dots, f(x_i; y_i; z_i), \dots, f(x_n; y_n; z_n)$. Составляем суммы, $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta V_i$ которые называются трехмерными интегральными суммами. Такие суммы называются трехмерными, так как нумерацию можно в пространстве произвести по трем направлениям.

Определение. Тройным интегралом функции $f(x; y; z)$ по области Ω называется предел трехмерных интегральных сумм данной функции при стремлении мелкоści разбиения к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dV \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta V_i$$

Теорема (существования тройного интеграла) Если функция $f(x; y; z)$ непрерывна в замкнутой области Ω , то предел трехмерных интегральных сумм от функции существует и функция является интегрируемой в заданной области.

На основании второй задачи, приводящей к понятию кратного интеграла, и определения тройного интеграла можно сделать следующее утверждение: если $f(x; y; z) \geq 0$ – плотность тела, которое занимает область Ω и функция f является интегрируемой в этой области, то тройной интеграл от плотности представляет собой массу неоднородного тела, занимающую область Ω .

$$m = \iiint_{\Omega} f(x; y; z) dV \text{ – механический смысл тройного интеграла.}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Формулу вычисления двойного интеграла в декартовых координатах получим на основании его геометрического смысла, как объема цилиндроида. Предположим, что $f(x; y) \geq 0$ в некоторой замкнутой области G .

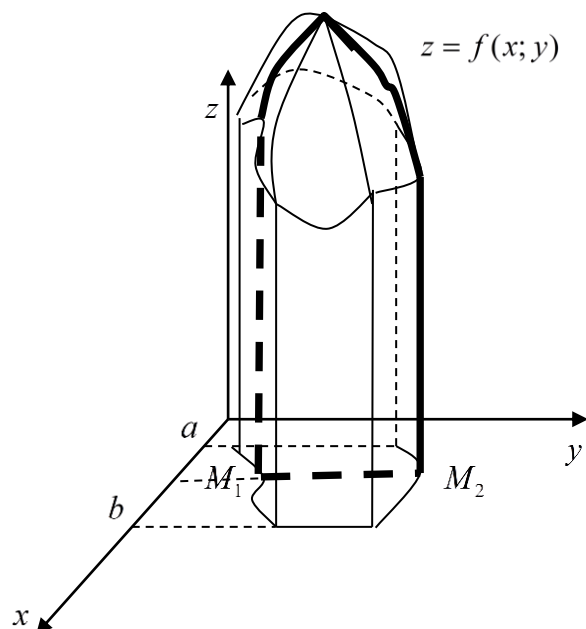


Область G является стандартной в направлении оси Oy , если любая прямая проходящая через данную область параллельно оси Oy , пересекает границу области только в двух точках. Аналогично определяется стандартность области относительно оси Ox . Предположим, что область G является стандартной относительно оси Oy . Тогда множество точек заданной области G можно записать в виде:
 $G = \{(x; y) | a < x < b \wedge y_1(x) < y < y_2(x)\}$. Линия

$y = y_1(x)$ снизу ограничивает область (она линия называется линией входа, а точки лежащие на ней точками входа), $y = y_2(x)$ — линия, ограничивающая область сверху (она называется линией выхода, а точки лежащие на ней точками выхода). Точка M_1 называется точкой входа, а точка M_2 — точка выхода.

Исходя из геометрического смысла двойного интеграла, объем цилиндроида равен $V = \iint_G f(x; y) dS$ (1). Объем цилиндроида можно подсчитать с

помощью определенного интеграла, если известна площадь поперечного сечения этого цилиндроида. Проведем через



Прямую M_1M_2 плоскость параллельную плоскости yOz пересекающую цилиндرويد. В сечении получим криволинейную трапецию. Она ограничена отрезком $[M_1; M_2]$, прямыми линиями перпендикулярными плоскости xOy и проходящими через концы отрезка, и линией l , которая вырезается на поверхности $z = f(x; y)$ указанной плоскостью.

$$\text{Уравнение линии } l: \begin{cases} z = f(x; y), \\ x = \text{Const.} \end{cases}$$

Площадь σ , криволинейной трапеции, зависит от переменной x , и будет равна:

$$\sigma(x) = \int_{y_{M1}}^{y_{M2}} f(x; y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy$$

Тогда, на основании геометрических приложений определенного интеграла, объем цилиндрида равен:

$$V = \int_a^b \sigma(x) dx = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy. \quad (2)$$

Сравнивая полученные формулы (1) и (2) получаем формулу вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат:

$$\iint_G f(x; y) dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy. \quad (3)$$

Таким образом, вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов. В начале вычисляется внутренний интеграл с переменными пределами интегрирования, а затем внешний интеграл с постоянными пределами интегрирования.

Выражение, стоящее в правой части равенства (3) называется повторным интегралом.

Учитывая выражение повторного интеграла, двойной интеграл в декартовой

системе координат обозначают:

$\iint_G f(x; y) dx dy$. Это объясняется тем, что в

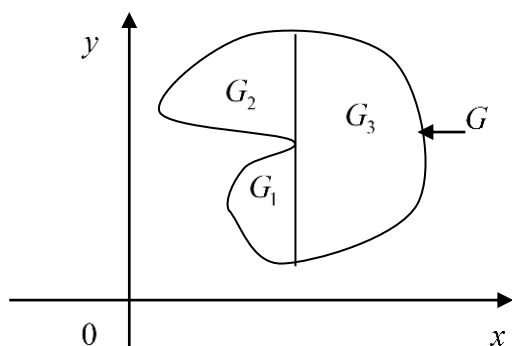
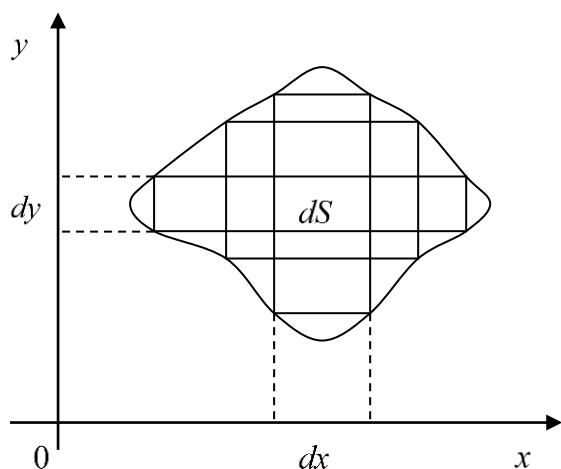
декартовой системе элемент площади определяется по формуле $dS = dx dy$. Переход от двойного интеграла к повторному интегралу носит название расстановки пределов интегрирования.

Если область G является стандартной относительно оси Ox , то есть $G = \{(x; y) | x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \wedge c \leq y \leq d\}$, то аналогичными рассуждениями приходим к следующей формуле:

$$\iint_G f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x; y) dx \quad (4).$$

Полученные формулы (3) и (4) имеют место и при знакопеременной функции, но при этом должны соблюдаться требования стандартности относительно осей координат. Если область является стандартной относительно любой оси, то можно использовать любую из формул.

Если область G не является стандартной относительно осей координат, то для вычисления двойного интеграла следует разбить область интегрирования на



стандартные области и применить свойство аддитивности области интегрирования. Например, на рисунке область G не является стандартной относительно осей координат, но ее можно разбить на стандартные области G_1, G_2, G_3 , которые в данном случае стандартны относительно обеих осей координат. Поэтому двойной интеграл по области G можно записать в виде:

$$\iint_G f(x; y) dx dy = \iint_{G_1} f(x; y) dx dy + \iint_{G_2} f(x; y) dx dy + \iint_{G_3} f(x; y) dx dy.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Вычислим $\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dV$ в декартовой системе координат.

Область Ω является стандартной в направлении оси Oz , если любая прямая проходящая через данную область параллельно оси Oz , пересекает границу области только в двух точках. Аналогично, определяется стандартность области относительно оси Ox и Oy . Предположим, что область является стандартной относительно оси Oz . Тогда множество точек заданной области Ω можно записать в виде (с учетом того, что проекция пространственной области Ω на плоскость xOy представляет собой плоскую область G): $\Omega = \{(x; y; z) | (x; y) \in G \wedge z_1(x; y) < z < z_2(x; y)\}$. Поверхность $z = z_1(x; y)$ ограничивает снизу заданную область Ω и называется поверхностью входа, а точки лежащие на ней точками входа. Поверхность $z = z_2(x; y)$ ограничивает область Ω сверху и называется поверхностью выхода, а точки лежащие на ней точками выхода. Если область Ω разбивать взаимно перпендикулярными плоскостями, то в декартовой системе координат элемент объема определяется по формуле: $dV = dx dy dz$. Аналогично, как и для двойного интеграла можно доказать, что

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz.$$

Если предположить, что область G является стандартной относительно оси Oy , то $\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz$. Если же предположить, что область G является стандартной относительно оси Ox , то $\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \int_c^d dx \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz$. Может оказаться, что область Ω не является стандартной относительно оси Oz , но при этом стандартна относительно, например, оси Oy . Тогда будет справедлива следующая формула:

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \iint_{G_{xz}} dx dz \int_{y_1(x; z)}^{y_2(x; z)} f(x; y; z) dy.$$

Аналогично относительно оси Ox . Если область Ω не является стандартной относительно осей координат, то необходимо разбить область интегрирования на области, каждая из которых является стандартной, по крайней мере, относительно одной из осей координат.

СВОЙСТВА КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Так как конструктивно определения кратных интегралов не отличаются от определения определенного интеграла, то для них имеют место те же свойства, что и для определенного интеграла.

1. Если функции f и g интегрируемы по некоторой области, то кратный интеграл от суммы этих функций равен сумме интегралов от каждой функции в отдельности.

Для двойного интеграла: $\iint_G (f + g) dS = \iint_G f dS + \iint_G g dS.$

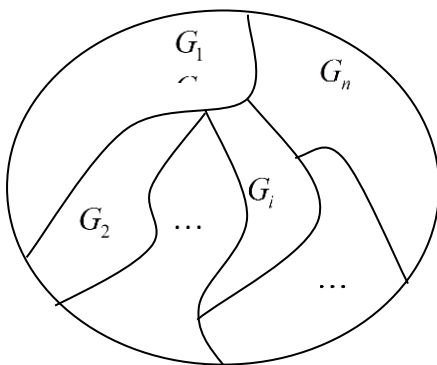
Для тройного интеграла: $\iiint_{\Omega} (f + g) dV = \iiint_{\Omega} f dV + \iiint_{\Omega} g dV.$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак кратного интеграла.

Для двойного интеграла: $\iint_G \alpha f dS = \alpha \iint_G f dS.$

Для тройного интеграла: $\iiint_{\Omega} \alpha f dV = \alpha \iiint_{\Omega} f dV.$

3. Свойство аддитивности области интегрирования. Если функция f интегрируема по некоторой области, которую можно представить как объединение конечного числа непересекающихся областей, то кратный интеграл по всей области равен сумме кратных интегралов по каждой из составляющих областей.



Для двойного интеграла: $\iint_G f dS = \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} f dS,$

причем $\bigcap_{i=1}^n G_i = \emptyset$ и $\bigcup_{i=1}^n G_i = G.$

Для тройного интеграла: $\iiint_{\Omega} f dV = \sum_{i=1}^n \iiint_{\Omega_i} f dV,$

причем $\bigcap_{i=1}^n \Omega_i = \emptyset$ и $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega.$

4. Если функции f и g интегрируемы по некоторой области и в этой области для любой точки выполняется неравенство $f \geq g$, то это неравенство сохраняется для кратных интегралов от этих функций.

Для двойного интеграла: $\iint_G f dS \geq \iint_G g dS.$

Для тройного интеграла: $\iiint_{\Omega} f \, dV \geq \iiint_{\Omega} g \, dV$.

5. Свойство оценки кратного интеграла. Пусть функция f непрерывна в замкнутой области.

Для двойного интеграла: $m \cdot S \leq \iint_G f \, dS \leq M \cdot S$, где $m = \min_G f$, $\max_G f$, S – площадь области G .

Для тройного интеграла: $m \cdot V \leq \iiint_{\Omega} f \, dV \leq M \cdot V$, где $m = \min_{\Omega} f$, $\max_{\Omega} f$, V – объем области Ω .

6. Теорема о среднем

Для двойного интеграла: Если функция f непрерывна в замкнутой области G , то существует, по крайней мере, одна точка $M(\bar{x}; \bar{y}) \in G$, такая, что $\iint_G f \, dS = \bar{f}(\bar{x}; \bar{y}) \cdot S$. Число $\bar{f}(\bar{x}; \bar{y}) = \frac{1}{S} \iint_G f \, dS$ называется средним значением функции в области G , а число S – площадь данной области.

Для тройного интеграла: Если функция f непрерывна в замкнутой области Ω , то существует, по крайней мере, одна точка $M(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}) \in \Omega$, такая, что $\iiint_{\Omega} f \, dV = \bar{f}(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}) \cdot V$. Число $\bar{f}(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}) = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} f \, dV$ называется средним значением функции в области Ω , а число V – объем данной области.

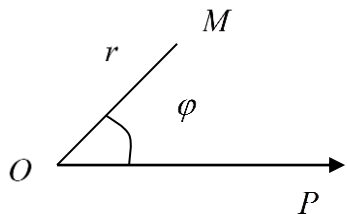
7. Если функция f интегрируема в некоторой замкнутой области, то справедливы неравенства:

$$\text{для двойного интеграла } \left| \iint_G f \, dS \right| \leq \iint_G |f| \, dS ;$$

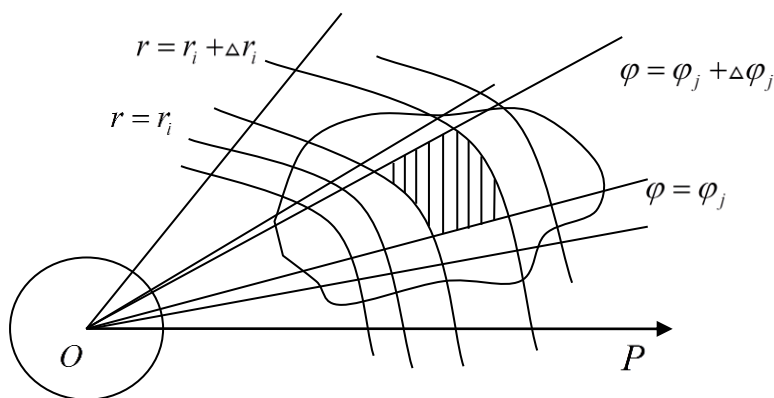
$$\text{для тройного интеграла } \left| \iiint_{\Omega} f \, dV \right| \leq \iiint_{\Omega} |f| \, dV .$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ. ПОНЯТИЕ О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Рассмотрим полярную систему координат с полюсом в точке O и полярной осью OP . Координаты любой точки $M(r; \varphi)$, где φ полярный угол, а r полярный радиус. $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ ($-\pi \leq \varphi < \pi$). Уравнение линии в полярной системе координат: $r = r(\varphi)$. Например, $r = a(1 - \cos \varphi)$ – уравнение кардиоиды. В качестве координатных



окружности с центром в полюсе и уравнением $r = \text{Const}$, и лучи с началом в полюсе, и уравнением $\varphi = \text{Const}$.



Пусть на плоскости в полярных координатах задана некоторая область G и функция $f(x; y)$, которую, учитывая связь декартовой с полярной системой координат $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, можно записать в виде: $f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) = F(r; \varphi)$.

По определению, двойной интеграл равен $\iint_G f(x; y) dS = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i; y_j) \Delta S_{ij}$.

Перейдем в двумерной интегральной сумме от декартовых координат к полярным координатам. Выберем разбиение области G координатными линиями в полярной системе координат.

$r = r_i, i = \overline{1, n}$ – система окружностей.

$\varphi = \varphi_j, j = \overline{1, m}$ – система лучей.

$M_{ij}(r_i; \varphi_j)$ – точка, заданная в полярной системе координат, которая соответствует точке $M(x; y)$, заданной в декартовой системе координат. Эти координаты связаны формулами: $x_i = r_i \cos \varphi_j, y_i = r_i \sin \varphi_j$.

Если приращения $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i, \Delta \varphi_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j$ достаточно малые величины, то выбираемую элементарную область можно рассматривать, как прямоугольник со сторонами Δr_i и $r_i \cdot \Delta \varphi_j$, с точностью до бесконечно малой величины. Тогда площадь элементарной области определяется формулой: $\Delta S_{ij} = r_i \cdot \Delta r_i \Delta \varphi_j$. Следовательно,

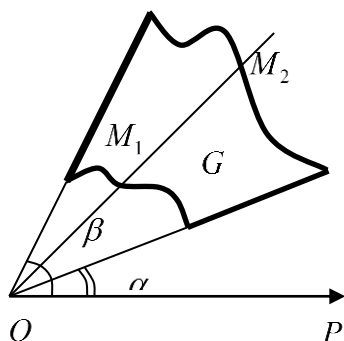
$$\iint_G f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) dS = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(r_i \cos \varphi_j; r_i \sin \varphi_j) r_i \cdot \Delta r_i \Delta \varphi_j.$$

Если предел существует, то получаем двойной интеграл в полярной системе координат: $\iint_G f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) dS = \iint_G f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr d\varphi$, где $dS = r dr d\varphi$ и — элемент площади в полярной системе координат.

Формула перехода от декартовой системы координат к полярной системе координат, в двойном интеграле имеет вид:

$$\iint_G f(x; y) dx dy = \iint_G f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Часто если рассматривается замена переменных $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, то для правой части в полярной системе координат область интегрирования G может изменить свой вид и стать G' .



Рассмотрим двойной интеграл $\iint_G F(r; \varphi) r dr d\varphi$.

Предположим, что область G ограничена линиями:

$$G: \begin{cases} \varphi = \alpha, \varphi = \beta, \\ r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi). \end{cases}$$

Таким образом, предположим, что область G такова, что любой луч, исходящий из полюса и имеющий общие точки с областью, пересекает границу области только в двух точках. Тогда вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, также как и в декартовой системе координат сводится к вычислению повторного интеграла.

$$\iint_G F(r; \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.$$

Замечание. В двойном интеграле, в большинстве случаев, удобнее переходить к полярной системе координат, если под знаком интеграла или в области интегрирования присутствует сумма $x^2 + y^2$. Это объясняется тем, что $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$.

Рассматриваются также обобщенно полярные координаты.

Их связь с декартовой системой координат устанавливается следующими формулами:

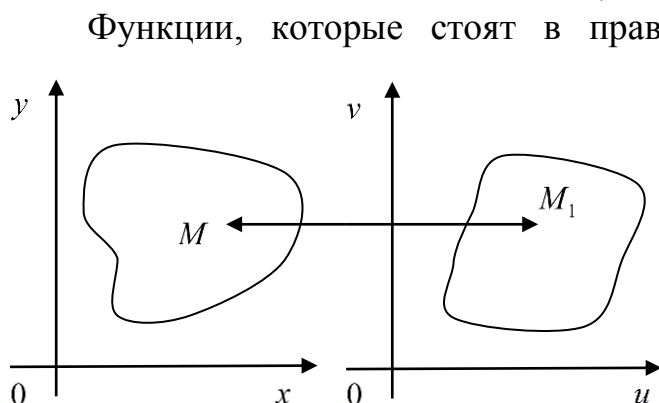
$$\begin{cases} x = a \cdot r \cos \varphi, \\ y = b \cdot r \sin \varphi. \end{cases}$$

Модуль якобиана равен $|I| = abr$. Обобщенно полярные координаты удобно использовать, когда в подынтегральном выражении или в области интегрирования присутствует выражение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, которое в обобщенно полярной системе координат равно r^2 .

Рассмотрим вопрос об общей замене переменных в двойном интеграле. Пусть необходимо вычислить двойной интеграл $\iint_G f(x; y) dx dy$. Предположим,

существует связь между переменными x, y и переменными u, v , которая выражена соотношением:

$$(1) \begin{cases} x = x(u; v); \\ y = y(u; v). \end{cases}$$



Функции, которые стоят в правые части равенств (1) непрерывно дифференцируемы и допускают обращение. То есть с помощью системы (1) любой точке $M(x; y)$ сопоставляется точка $M_1(u; v)$. И наоборот, любой точке $M_1(u; v)$ сопоставляется точка $M(x; y)$. Таким образом, если на плоскости xOy задана некоторая область G , то система (1) отобразит ее на

некоторую область G_1 в системе координат uOv . Если на плоскости xOy взять элемент площади $dS = dx dy$, то он отобразится на плоскость uOv с множителем $|I|$. Число

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

называется Якобианом. Тогда элемент площади в системе координат uOv имеет вид $dS_1 = |I| du dv$, а формула перехода от одной системы координат к другой запишется в виде:

$$\iint_G f(x; y) dx dy = \iint_{G_1} f(x(u; v); y(u; v)) |I| du dv,$$

где G_1 – область в новой системе координат, на которую отображается область G , заданная в старой системе координат.

Расстановка пределов интегрирования, после перехода новым координатам, такая же как и в старых декартовых координатах.

В частности, при переходе от декартовой системы координат к полярной системе координат, по формулам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, якобиан равен

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

Таким образом, элемент площади в полярной системе координат равен: $dS_1 = r dr d\varphi$.

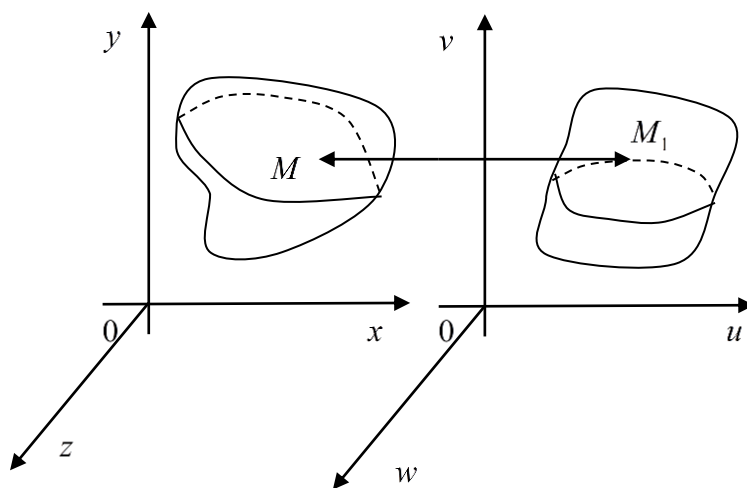
ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Рассмотрим вопрос об общей замене переменных в тройном интеграле. Пусть необходимо вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dV = \iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz$.

Предположим, существует связь между переменными x, y, z и переменными u, v, w , которая выражена соотношением:

$$(1) \quad \begin{cases} x = x(u; v; w); \\ y = y(u; v; w); \\ z = z(u; v; w) \end{cases}$$

Функции, которые стоят в правые части равенств (1) непрерывно дифференцируемы и допускают обращение. То есть с помощью системы (1) любой точке $M(x; y; z)$ сопоставляется точка $M_1(u; v; w)$. И обратно, любой точке $M_1(u; v; w)$ сопоставляется точка $M(x; y; z)$. Таким образом, если в пространстве



$xOyz$ задана некоторая область Ω , то система (1) отобразит ее на некоторую область Ω_1 в системе координат $uOvw$. Если в пространстве $xOyz$ взять элемент объема $dV = dx dy dz$, то он отобразится в пространство $uOvw$ с множителем $|I|$.

Число

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

называется якобианом. Тогда элемент объема в системе координат $uOvw$ имеет вид $dV_1 = |I| du dv dw$, а формула перехода от одной системы координат к другой, в тройном интеграле запишется в виде:

$$\iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} f(x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w)) |I| du dv dw,$$

где Ω_1 – область в новой системе координат, на которую отображается область Ω , заданная в старой системе координат.

Расстановка пределов интегрирования, после перехода новым координатам, такая же как и в старых декартовых координатах.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. С помощью двойного интеграла вычисляется объем тел, на основании задачи приводящей к понятию двойного интеграла.

$$V = \iint_G f(x; y) dx dy$$

2. С помощью двойного интеграла можно вычислять площади плоских фигур.

С геометрической точки зрения, с помощью двойного интеграла $V = \iint_G f(x; y) dx dy$ вычисляется объем цилиндроида, ограниченного сверху поверхностью $f(x; y)$. Если $f(x; y) = 1$, то цилиндرويد вырождается в обычный цилиндр с высотой $H = f(x; y) = 1$. Но объем цилиндра определяется по формуле $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = S_{\text{осн.}} \cdot 1 = S_{\text{осн.}}$. Сравнивая два выражения, получаем формулу вычисления площади в декартовой системе координат: $S = \iint_G dx dy$. Используя формулу перехода к полярной системе координат, получаем формулу вычисления площади фигуры, заданной в полярной системе координат:

$$S = \iint_G r dr d\varphi.$$

3. С помощью тройного интеграла можно вычислять объем тел.

Предположим, имеется некоторое тело, заполненное веществом с плотностью $f(x; y; z)$. Тогда исходя из задач приводящих к понятию тройного интеграла, масса тела определяется по формуле $m = \iiint_{\Omega} f(x; y; z) dV$.

Предположим, что тело является однородным с плотностью $f(x; y; z) = 1$. Тогда масса тела равна $m = 1 \cdot V = V$, следовательно,

$$V = \iiint_{\Omega} dV.$$

Объем тела в декартовой системе координат вычисляется по формуле:

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz.$$

Объем тела в цилиндрической системе координат:

$$V = \iiint_{\Omega} r dr d\varphi dz.$$

Объем тела в сферической системе координат:

$$V = \iiint_{\Omega} \rho^2 \sin \Theta d\rho d\varphi d\Theta.$$

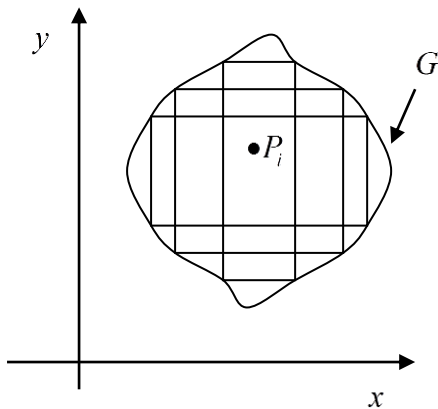
МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Вычисление центров масс.

Предположим, что имеется система материальных точек $(x_i; y_i; z_i), i = \overline{1; n}$, отнесенных к декартовой системе координат, с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. Тогда координаты масс этой системы материальных точек определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (1)$$

Рассмотрим некоторую пластину, занимающую область G , отнесенную к декартовой системе координат xOy . Пластина может быть неоднородной с



плотностью $\mu = \mu(x; y) = \frac{dm}{dS}$. Разобьем область G ,

произвольным образом, на n элементарных областей. В каждой элементарной области произвольным образом выбираем точки $P_i(x_i; y_i)$.

Так как, элементарные области малы, то плотность элементарной пластины, можно считать, что совпадает с плотностью в точке $P_i(x_i; y_i)$ и равна $\mu(x_i; y_i)$. Тогда масса i -той элементарной пластины равна $\Delta m_i = \mu(x_i; y_i) \Delta S_i$. То

есть, массу каждой элементарной пластины будем считать сосредоточенной в материальных точках $P_i(x_i; y_i)$. Таким образом, мы непрерывно распределенную массу по области G , заменим массами материальных точек $P_i(x_i; y_i)$. Тогда для вычисления центра масс воспользуемся выше указанными формулами (1):

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mu(x_i; y_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \mu(x_i; y_i) \Delta S_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \mu(x_i; y_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \mu(x_i; y_i) \Delta S_i}.$$

В числителях и знаменателях стоят двухмерные интегральные суммы по области G . Переходя в двух последних равенствах к пределу, при мелкости разбиения стремящемуся к нулю, получаем двойные интегралы, вычисление которых даст координаты центра масс плоской фигуры:

$$x_c = \frac{\iint_G x \mu(x; y) dx dy}{\iint_G \mu(x; y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_G y \mu(x; y) dx dy}{\iint_G \mu(x; y) dx dy},$$

причем масса пластины определяется по формуле $m = \iint_G \mu(x; y) dx dy$.

Если мы имеем пространственное материальное тело, то, рассуждая аналогичным образом, находим формулы вычисления центра масс непрерывно распределенной массы, плотности $\mu(x; y; z)$, некоторой пространственной области Ω :

$$x_c = \frac{\iiint_{\Omega} x \mu(x; y; z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \mu(x; y; z) dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\iiint_{\Omega} y \mu(x; y; z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \mu(x; y; z) dx dy dz}, \quad z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z \mu(x; y; z) dx dy dz}{\iiint_{\Omega} \mu(x; y; z) dx dy dz},$$

где $m = \iiint_{\Omega} \mu(x; y; z) dx dy dz$ масса тела.

Эти формулы существенно упрощаются, если имеем однородное тело с постоянной плотностью:

$$x_c = \frac{\iiint_{\Omega} x dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\iiint_{\Omega} y dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz}, \quad z_c = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz}.$$

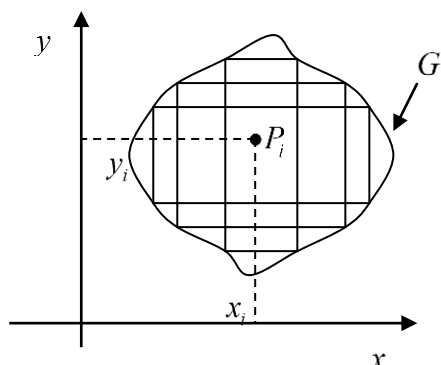
2. Момент инерции тел.

Пусть задана система материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ и некоторая ось l . Тогда моментом инерции системы материальных точек, относительно оси l называется величина, которая определяется по формуле:

$$M_l = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2, \text{ где } d_i - \text{расстояние } i \text{ той материальной точки, до оси } l.$$

Предположим, задана некоторая плоская пластина, которая занимает область G , причем плотность массы пластины $\mu(x; y)$. Отнесем заданную пластину к декартовой системе координат xOy . Разобьем область на n элементарных частей произвольным образом. В каждой элементарной области выбираем произвольным образом точки $P_i(x_i; y_i)$ с плотностью $\mu(x_i; y_i)$ в данной точке. В каждой точке можно сосредоточить массу элементарных пластин, в виду их малости, а, следовательно, массы элементарных пластин равны $\Delta m_i = \mu(x_i; y_i) \Delta S_i$. Таким образом, данную непрерывную массу заменим системой материальных точек. Расстояние до оси Oy от точки $P_i(x_i; y_i)$ равно x_i , а до оси Ox равно y_i . Следовательно, моменты инерции пластины относительно осей координат соответственно, равны:

$$M_{Ox} \approx \sum_{i=1}^n y_i^2 \mu(x_i; y_i) \Delta S_i, \quad M_{Oy} \approx \sum_{i=1}^n x_i^2 \mu(x_i; y_i) \Delta S_i.$$

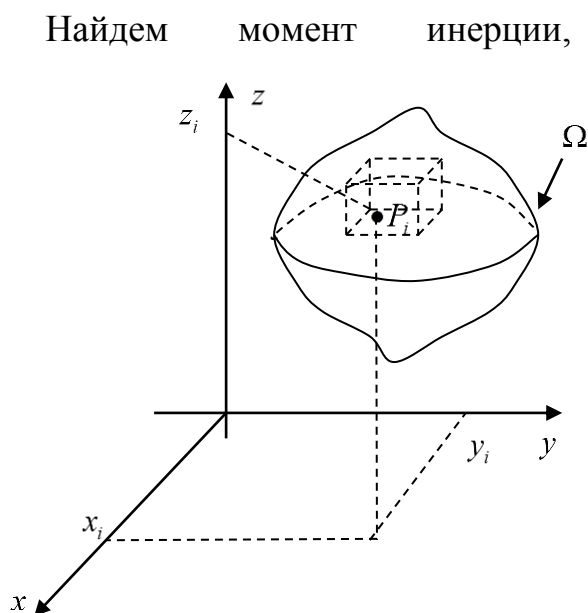


Если в полученных приближенных равенствах перейти к пределу, при малкости разбиения стремящемуся к нулю, то в правой части получим предел двумерных интегральных сумм, что приводит к двойному интегралу.

$$M_{Ox} = \iint_G y^2 \mu(x; y) dx dy, \quad M_{Oy} = \iint_G x^2 \mu(x; y) dx dy.$$

Аналогично, определяется момент инерции пластины относительно начала координат:

$$M_O = \iint_G (x^2 + y^2) \mu(x; y) dx dy.$$



Найдем момент инерции, относительно осей координат пространственного тела. Предположим, задано некоторое пространственное тело, которое занимает область Ω , причем плотность массы тела равна $\mu(x; y; z)$. Рассмотрим заданное тело к декартовой системе координат $xOyz$. Разобьем область Ω на n элементарных частей произвольным образом. В каждой элементарной области выбираем произвольным образом точки $P_i(x_i; y_i; z_i)$ с плотностью $\mu(x_i; y_i; z_i)$ в данной точке.

В каждой точке можно сосредоточить массу элементарных тел, в виду их малости, а, следовательно, массы элементарных тел равны $\Delta m_i = \mu(x_i; y_i; z_i) \Delta V_i$. Таким образом, данную непрерывную массу заменим системой материальных точек. Расстояние до оси Oy от точки $P_i(x_i; y_i; z_i)$ равно $\sqrt{x_i^2 + z_i^2}$, до оси Ox равно $\sqrt{y_i^2 + z_i^2}$, а до оси Oz равно $\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. Следовательно, моменты инерции пластины относительно осей координат соответственно, равны:

$$M_{Ox} \approx \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) \mu(x_i; y_i; z_i) \Delta V_i,$$

$$M_{Oy} \approx \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) \mu(x_i; y_i; z_i) \Delta V_i,$$

$$M_{Oz} \approx \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \mu(x_i; y_i; z_i) \Delta V_i.$$

Если в полученных приближенных равенствах перейти к пределу, при малкости разбиения стремящемуся к нулю, то в правой части получим предел трехмерных интегральных сумм, что приводит к тройному интегралу.

$$M_{Ox} = \iiint_G (y^2 + z^2) \mu(x; y; z) dx dy dz,$$

$$M_{Oy} = \iiint_G (x^2 + z^2) \mu(x; y; z) dx dy dz, .$$

$$M_{Oz} = \iiint_G (x^2 + y^2) \mu(x; y; z) dx dy dz.$$

Аналогично, определяется момент инерции пластины относительно начала координат:

$$M_O = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x; y; z) dx dy dz .$$

Также можно определить момент инерции пространственного тела относительно координатных плоскостей.

$$M_{Oxy} = \iiint_G z^2 \mu(x; y; z) dx dy dz,$$

$$M_{Oyz} = \iiint_G x^2 \mu(x; y; z) dx dy dz,$$

$$M_{Oxz} = \iiint_G y^2 \mu(x; y; z) dx dy dz.$$