

1 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1 Содержание: криволинейные интегралы первого и второго рода, методы их вычисления.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L (2x + y)dl$, где L – контур треугольника ABO с вершинами в точках $A(1;0)$, $B(0;2)$, $O(0;0)$.

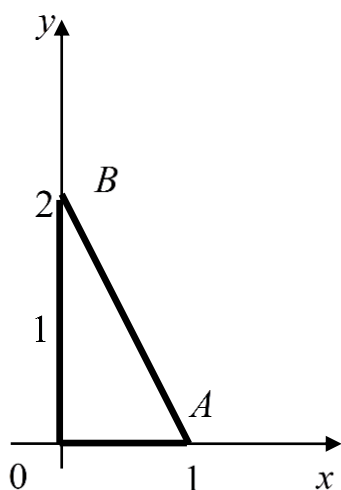


Рис. 1

Решение. Изобразим контур треугольника ABO (рис 1).

Для вычисления интеграла воспользуемся свойством аддитивности области интегрирования:

$$\int_{OAB} (2x + y)dl = \int_{AB} (2x + y)dl + \int_{BO} (2x + y)dl + \int_{OA} (2x + y)dl.$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла:

$$\int_L f(x; y)dl = \int_a^b f(x; y(x))\sqrt{1 + y'^2} dx.$$

На отрезке AB : $y = -2x + 2$, $y' = -2$,

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{5} dx.$$

На отрезке BO : $x = 0$, $x' = 0$, $dl = \sqrt{1 + x'^2} dy = dy$.

На отрезке OA : $y = 0$, $y' = 0$, $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = dx$.

Учитывая, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от пути интегрирования и, используя формулу перехода к определенному интегралу, получаем

$$\begin{aligned} \int_L (2x + y)dl &= \int_0^1 (2x - 2x + 2)\sqrt{5} dx + \int_0^2 (2 \cdot 0 + y)dy + \int_0^1 (2x + 0)dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{5} dx + \int_0^2 ydy + \int_0^1 2xdx = 2\sqrt{5} x \Big|_0^1 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 + x^2 \Big|_0^1 = 2\sqrt{5} + 2 + 1 = 2\sqrt{5} + 3 \end{aligned}$$

1.2.2 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L (x + y)dl$, где L –

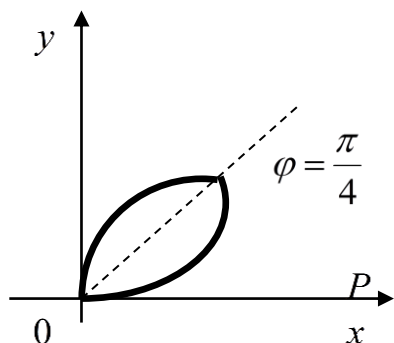


Рис. 2

лепесток лемнискаты $\rho = 4\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в первом координатном углу.

Решение. Построим лепесток лемнискаты $\rho = 4\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в первом координатном углу. По условию $\sin 2\varphi \geq 0$ или $\pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. С учетом того, что лемниската расположена в

первой четверти, получаем, что $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (рис.2).

Линия задана уравнением в полярной системе координат, поэтому необходимо воспользоваться формулой перехода к определенному интегралу, которая имеет вид: $\int_L f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$.

Так как $\rho' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \cos 2\varphi \cdot 2 = \frac{4 \cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$, то

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \sqrt{16 \sin 2\varphi + \frac{16 \cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \frac{4 d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{16 d\varphi}{4 \sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{16 d\varphi}{\rho}.$$

$$\int_L (x + y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \frac{16 d\varphi}{\rho} = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 16 (\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 32$$

1.2.3 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L y dl$, где L –

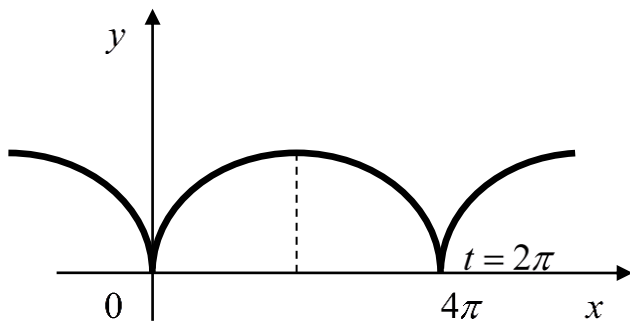


Рис.3

первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.

Решение. Построим первую арку циклоиды, для которой $0 \leq t \leq 2\pi$ (рис. 3).

Линия задана параметрическим образом, поэтому необходимо воспользоваться формулой перехода к определенному интегралу, которая имеет вид:

$$\int_L f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

Так как $x' = 2(1 - \cos t)$ и $y' = 2 \sin t$, то

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{4(1 - \cos t)^2 + 4 \sin^2 t} dt = 2 \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 4 \sin \frac{t}{2} dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_L y dl &= \int_0^{2\pi} 2 \cdot (1 - \cos t) \cdot 4 \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 8 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt - 8 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \cdot \cos t dt = -16 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} - \\ &- 4 \int_0^{2\pi} \left(-\sin \frac{t}{2} + \sin \frac{3 \cdot t}{2} \right) dt = -16(-1 - 1) - 8 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{8}{3} \cos \frac{3 \cdot t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 32 - 8(-1 - 1) + \\ &+ \frac{8}{3}(-1 - 1) = 32 + 16 - \frac{16}{3} = \frac{128}{3} = 42 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

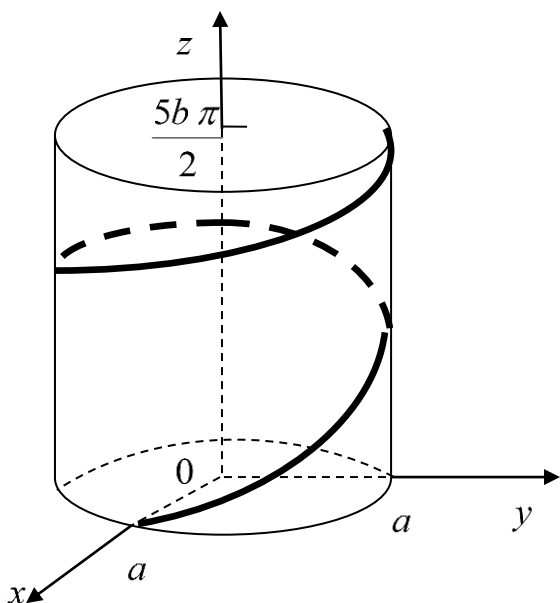


Рис. 4

1.2.4 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L xy dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, ограниченная точками, для которых $t = 0$, $t = \frac{5\pi}{2}$.

Решение. Изобразим винтовую линию (рис.4). Линия задана параметрическим образом, поэтому необходимо воспользоваться формулой перехода к определенному интегралу, которая имеет вид:

$$\int_L f(x; y; z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

Так как $x' = -a \sin t$, $y' = a \cos t$,

$$z' = b, \text{ то } dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_L x \cdot y dl &= \int_0^{\frac{5\pi}{2}} a \cos t a \sin t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin 2t dt = \\ &= -\frac{1}{4} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \cos 2t \Big|_0^{\frac{5\pi}{2}} = \\ &= -\frac{1}{4} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (-1 - 1) = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

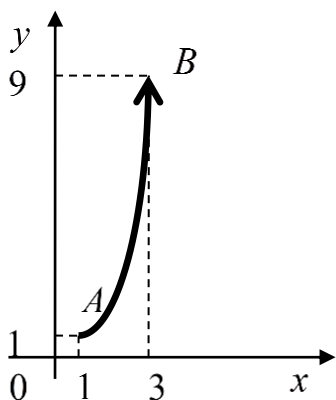


Рис.5

1.2.5 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_L 4x^3 dx + 3x^2 \cdot y dy$, где L – дуга кривой $y = x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;9)$.

Решение. Построим заданную дугу с указанием направления обхода (рис.5). Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой перехода к определенному интегралу:

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx + Q(x; y) dy &= \\ &= \int_a^b [P(x; y(x)) + Q(x; y(x)) \cdot y'(x)] dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_L 4x^3 dx + 3x^2 \cdot y dy = \int_1^3 [4x^3 + 3x^2 \cdot x^2 \cdot 2x] dx =$$

$$= \int_1^3 [4x^3 + 6x^5] dx = [x^4 + x^6]_1^3 = 81 + 729 - 1 - 1 = 808.$$

1.2.6 Вычислить по определению криволинейный интеграл второго рода $\oint_L (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(3;1)$ и $C(3;5)$, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{k}$ плоскости треугольника.

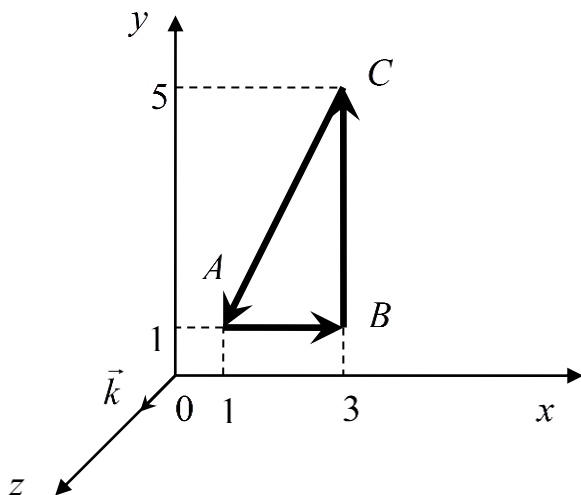


Рис.6

Решение. За положительное направление обхода по замкнутому контуру принимается такое направление, при котором область, ограниченная замкнутым контуром, остается слева, при движении по контуру, если смотреть с конца нормального вектора проведенного к области, ограниченной этим контуром. В методических указаниях, если специально не оговаривается, нормальным вектором контура, лежащим в плоскости Oxy , считается вектор $\vec{k}$. Если контур лежит в плоскости Oxz , то вектор $\vec{j}$. Если контур лежит в плоскости Oyz , то нормальным

вектором будет вектор $\vec{i}$.

В нашем случае контур располагается в плоскости Oxy . Следовательно, если смотреть с конца вектора $\vec{k}$, движение по контуру осуществляется от точки A к точке B , от точки B к точке C , и от точки C к точке A . Контур треугольника изображен на рисунке 6, с указанием направления обхода по контуру.

Так как контур интегрирования состоит из отрезков AB , BC и CA , то

$$\oint_L (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy = \oint_{AB} (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy +$$

$$+ \oint_{BC} (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy + \oint_{CA} (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy.$$

На отрезке AB : $y = 1$, $dy = 0$, $1 \leq x \leq 3$.

На отрезке BC : $x = 3$, $dx = 0$, $1 \leq y \leq 5$.

На отрезке CA : $y = 2x - 1$, $dy = 2 dx$, $3 \leq x \leq 1$.

Следовательно,

$$\oint_L (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy = \int_1^3 (x^3 + 1) dx + (x + 1) \cdot 0 +$$

$$+ \int_1^5 (27 + y) \cdot 0 + (3 + y^3) dy + \int_3^1 (x^3 + 2x - 1) dx + (x + (2x - 1)^3) 2dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^3 (x^3 + 1) dx + \int_1^5 (3 + y^3) dy + \int_3^1 (17x^3 - 24x^2 + 16x - 3) dx = \\
&= \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_1^3 + \left(3y + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_1^5 + \left(\frac{17x^4}{4} - 8x^3 + 8x^2 - 3x \right) \Big|_3^1 = \\
&= \frac{81}{4} + 3 - \frac{1}{4} - 1 + 15 + \frac{625}{4} - 3 - \frac{1}{4} + \frac{17}{4} - 8 + 8 - 3 - \frac{1377}{4} + 216 - 72 + 9 = 0
\end{aligned}$$

1.2.7 Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\int_L \frac{(y^3 - x^2) dx + (x^3 + y^2) dy}{x^2 + y^2}$, где L – дуга окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

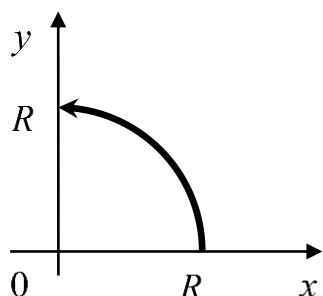


Рис. 7

Решение. Построим заданную дугу окружности с указанием направления обхода (рис.7). Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой перехода к определенному интегралу:

$$\begin{aligned}
&\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t); y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t); y(t)) \cdot y'(t)] dt.
\end{aligned}$$

В начале находим дифференциалы функций $x(t)$ и $y(t)$: $dx = -R \sin t dt$, $dy = R \cos t dt$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\int_L \frac{(y^3 - x^2) dx + (x^3 + y^2) dy}{x^2 + y^2} = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R^3 \sin^3 t - R^2 \cos^2 t) \cdot (-R \sin t) + (R^3 \cos^3 t + R^2 \sin^2 t) \cdot R \cos t}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4 \cos^4 t - R^4 \sin^4 t + R^3 \cos^2 t \sin t + R^3 \sin^2 t \cos t}{R^2} dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 (\cos^4 t - \sin^4 t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos^2 t \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin^2 t \cos t dt = \\
&= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) dt - R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d \cos t + R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d \sin t = \\
&= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \cdot 1 dt - \frac{R}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{R}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{R^2}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{R}{3} (0 - 1) + \frac{R}{3} (1 - 0) = \frac{R^2}{2} (0 - 0) + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = \frac{2R}{3}.
\end{aligned}$$

1.2.8 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_L y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;0;2)$ до точки $B(3;1;4)$.

Решение. Построим отрезок прямой с указанием направления движения (рис.8). Составим уравнение прямой проходящей через точки A и B , для чего воспользуемся уравнением прямой проходящей через две точки.

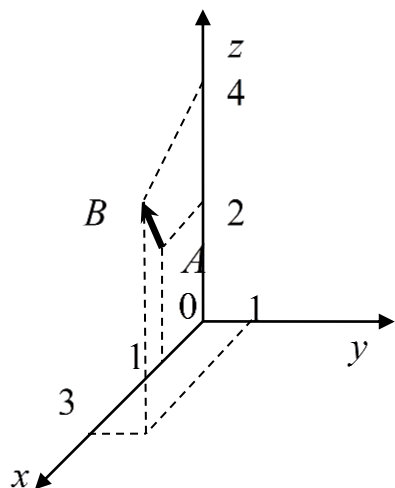


Рис. 8

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

В нашем случае уравнение прямой AB имеет вид: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} (=t)$. Перейдем от канонического уравнения прямой к параметрическому уравнению.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = t; \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

Координаты точки A получаем при значении $t = 0$, а координаты точки B при значении $t = 1$. Следовательно, значение параметра t изменяется от 0 до 1.

Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой перехода к определенному интегралу:

$$\int_L P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t); y(t); z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t); y(t); z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t); y(t); z(t)) \cdot z'(t)] dt.$$

В начале находим дифференциалы функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$: $dx = 2dt$, $dy = dt$, $dz = 2dt$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_L y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz &= \\ &= \int_0^1 [t^2 \cdot 2 + ((1 + 2t)^2 + (2 + 2t)) \cdot 1 + (1 + 2t + t + (2 + 2t)^2) \cdot 2] dt = \\ &= \int_0^1 [14t^2 + 28t + 13] dt = \left(\frac{14}{3} t^3 + 14t^2 + 13t \right) \Big|_0^1 = \frac{14}{3} + 14 + 13 - 0 = \frac{95}{3} = 31\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1. Вычислить значение криволинейного интеграла первого рода по указанным кривым.

а) $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}$, где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$;

б) $\int_L \frac{\cos^2 x \, dl}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$, где L — дуга синусоиды $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$);

в) $\int_L \frac{y \, dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где L — дуга кардиоиды $\rho = (2 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

г) $\int_{L_{AB}} \frac{(x + 2y + 5z) \, dl}{3}$, где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки

$A(1, 3, 5)$ и $B(4, 3, 10)$.

1.3.2. Вычислить значение криволинейного интеграла второго рода по указанным кривым.

а) $\oint_L y \, dx - x \, y \, dy$, где L — контур треугольника с вершинами $A(-2, 0)$, $B(1, 2)$, $C(0, 2)$ при положительном направлении обхода;

б) $\int_{L_{AB}} xy \, dx + y^2 \, dy - z \, dz$, где L_{AB} — дуга одного витка винтовой линии $x = 2 \cos(t)$, $y = 3 \sin(t)$, $z = 5t$ от точки $A\left(0, 3, \frac{5\pi}{2}\right)$ до $B\left(0, 3, \frac{25\pi}{2}\right)$;

в) $\oint_L (x + y) \, dx + (x - y) \, dy$, где L — окружность единичного радиуса с центром в начале координат при положительном направлении обхода;

г) $\oint_L y^2 \, dx - z \, dy + x \, dz$, где L — контур треугольника с вершинами $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 4)$, $C(3, 2, 9)$ при положительном направлении обхода.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Вычислить значение криволинейного интеграла первого рода

$\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sin^2(x + y)}$ по контуру L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $B(1, 1)$.

1.4.2 Вычислить значение криволинейного интеграла первого рода

$\int_L \frac{\sin^2 x \, dl}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$, где L — дуга косинусоиды $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$);

1.4.3 Вычислить значение криволинейного интеграла второго рода по указанным кривым.

а) $\int_{L_{AB}} y \, dx - x \, dy + (x + y) \, dz$, где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(-2, 1, 3)$ и $B(1, 2, 5)$;

б) $\oint_L x \, dx + y \, dy$, где L — дуга эллипса $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$, «пробегаемая» в отрицательном направлении обхода.

2 ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1 Содержание: поверхностные интегралы первого и второго рода, методы их вычисления.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_{\sigma} (xy + xz) d\sigma$, где

σ – конечная часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{1 - y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. Изобразим заданную поверхность на рисунке 14. Так как поверхность задана уравнением $x = x(y; z)$, то для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой перехода к двойному интегралу.

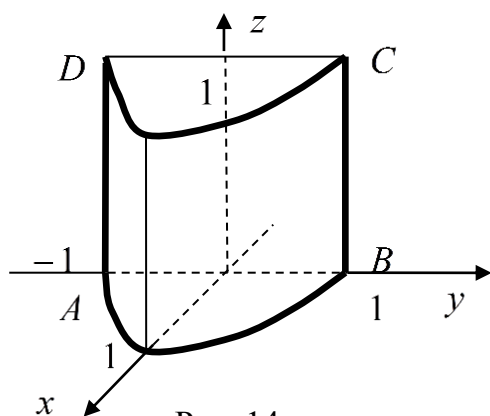


Рис. 14

$$\iint_{\sigma} f(x; y; z) d\sigma = \iint_G f(x(y; z); y; z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz,$$
 где G – проекция поверхности σ на плоскость Oyz . Так как $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ и $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$, то

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz = \sqrt{1 + \left(-\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}\right)^2 + 0^2} dydz = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dydz.$$

Проекцией заданной части эллиптического цилиндра $x = \sqrt{1 - y^2}$ на плоскость Oyz является прямоугольник $ABCD$ (область G), определяемый неравенствами $-1 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Вычислим искомый поверхностный интеграл первого рода.

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (xy + xz) d\sigma &= \iint_G \left(\sqrt{1 - y^2} \cdot y + \sqrt{1 - y^2} \cdot z \right) \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dydz = \iint_G (y + z) dydz = \\ &= \int_{-1}^1 dy \int_0^1 (y + z) dz = \int_{-1}^1 \left(yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy = \int_{-1}^1 \left(y + \frac{1}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

2.2.2 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где σ – внешняя сторона сферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Решение. Изобразим заданную сферу на рисунке 15.

Исходный интеграл представляет сумму трех интегралов.

$$I_1 = \iint_{\sigma} x^2 dydz, \quad I_2 = \iint_{\sigma} y^2 dzdx, \quad I_3 = \iint_{\sigma} z^2 dxdy.$$

Вычислим первый интеграл $I_1 = \iint_{\sigma} x^2 dydz$. В этом случае уравнение сферы будет иметь вид:

$$x - a = \pm \sqrt{R^2 - (y - b)^2 - (z - c)^2},$$

где знак «плюс» берем, когда рассматриваем ближнюю полусферу, а знак «минус», когда дальнюю полусферу. Подынтегральную функцию представим в виде

$$x^2 = (x - a)^2 + a^2 + 2a(x - a).$$

Обозначим через σ_1 внешнюю сторону ближней полусферы $ABCD$ (рис.15), через σ_2 внешнюю сторону дальней полусферы, через G – проекцию каждой полусферы на плоскость Oyz (это

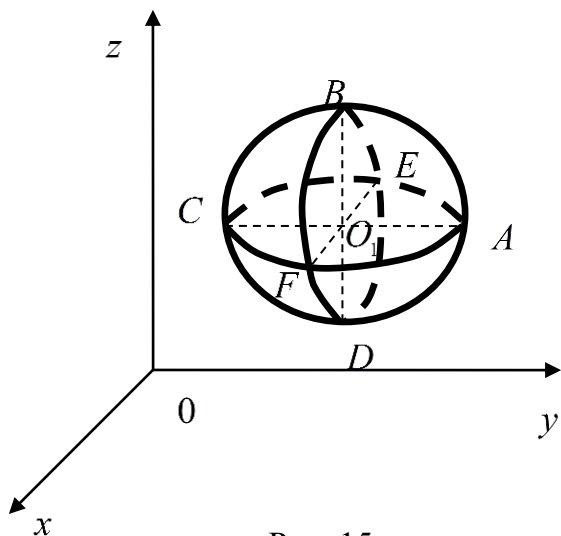


Рис. 15

круг, ограниченный окружностью $(y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$).

Учитывая, что выражение $x - a$ меняет знак при переходе от одной полусферы к другой, находим первый интеграл.

$$I_1 = \iint_{\sigma} x^2 dydz = \iint_{\sigma_1} [(x - a)^2 + a^2 + 2a(x - a)] dydz - \iint_{\sigma_2} [(x - a)^2 + a^2 - 2a(x - a)] dydz =$$

$$= 4a \iint_G (x - a) dydz = 4a \iint_G \sqrt{R^2 - (y - b)^2 - (z - c)^2} dydz.$$

Для вычисления двойного интеграла переходим к полярным координатам по формулам

$$y - b = \rho \cos \varphi, \quad z - c = \rho \sin \varphi.$$

При этом

$$(y - b)^2 + (z - c)^2 = \rho^2, \quad dydz = \rho d\rho d\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq R.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= 4a \iint_G \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\varphi = 4a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \\ &= -2a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} d(R^2 - \rho^2) = -\frac{4a}{3} \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{R^2 - \rho^2}^3 \right]_0^R d\varphi = \frac{4aR^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{4aR^3}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3} \pi a R^3. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляем остальные два интеграла:

$$I_2 = \iint_{\sigma} y^2 dz dx = \frac{8}{3} \pi b R^3, \quad I_3 = \iint_{\sigma} z^2 dx dy = \frac{8}{3} \pi c R^3.$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{8}{3} \pi R^3 (a + b + c).$$

2.2.3 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\sigma} (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$, где σ – верхняя сторона поверхности, вырезанной цилиндром $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ из сферы $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > a, z > 0$).

Решение: Изобразим заданную поверхность на рисунке 16. Для вычисления поверхностного интеграла второго рода воспользуемся формулой перехода к поверхностному интегралу первого рода.

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \\ &= \iint_{\sigma} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] d\sigma, \end{aligned}$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы нормального вектора, направленного в ту сторону поверхности, по которой берется поверхностный интеграл второго рода.

Введем обозначение

$$F(x; y; z) = (x - R)^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

По формуле, связывающей поверхностные интегралы обоих родов,

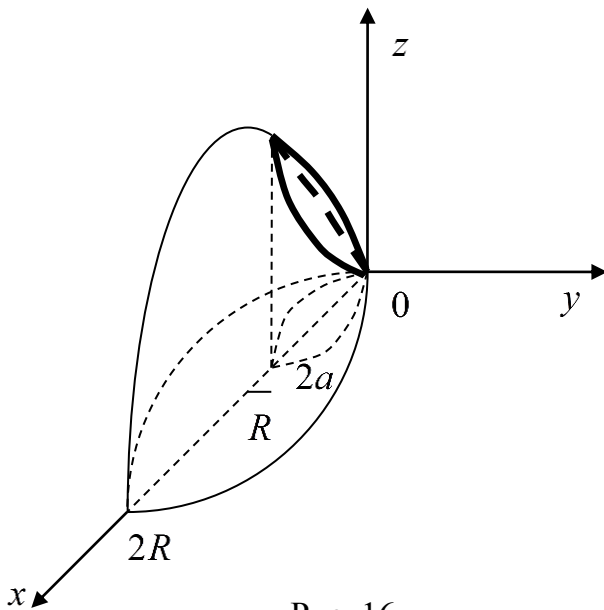


Рис. 16

имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy &= \\ &= \iint_{\sigma} [(y - z) \cos \alpha + (z - x) \cos \beta + (x - y) \cos \gamma] d\sigma = I. \end{aligned}$$

Найдем направляющие косинусы.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{2(x - R)}{\sqrt{(2(x - R))^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \frac{x - R}{R}; \\ \cos \beta &= \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{2y}{\sqrt{(2(x - R))^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \frac{y}{R}; \end{aligned}$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{2z}{\sqrt{(2(x-R))^2 + (2y)^2 + (2z)^2}} = \frac{z}{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } I &= \iint_{\sigma} \left[(y-z) \cdot \frac{x-R}{R} + (z-x) \cdot \frac{y}{R} + (x-y) \cdot \frac{z}{R} \right] d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} \frac{yx - zx - Ry + Rz + zy - xy + xz - yz}{R} d\sigma = \iint_{\sigma} \frac{Rz - Ry}{R} d\sigma = \iint_{\sigma} (z - y) d\sigma. \end{aligned}$$

Так как поверхность симметрична относительно плоскости Oxz , то

$$\iint_{\sigma} y d\sigma = 0, \text{ а } I = \iint_{\sigma} z d\sigma.$$

Из условия уравнение поверхности имеет вид: $z = \sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}$.
Найдем $d\sigma$.

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \\ &= \sqrt{1 + \left(-\frac{x-R}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}}\right)^2} dx dy = \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Проекцией рассматриваемой части шара $z = \sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}$, вырезанной цилиндром $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, на плоскость Oxy является область G , ограниченная окружностью $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } I &= \iint_{\sigma} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy = \iint_{\sigma} z d\sigma = \\ &= \iint_G \sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}} dx dy = R \iint_G dx dy. \end{aligned}$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам $x-a = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$. В области G , полярный угол φ изменяется от 0 до 2π , а полярный радиус-вектор от 0 до a .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } I &= R \iint_G dx dy = R \iint_G \rho d\rho d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho = \\ &= \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 \Big|_0^a d\varphi = \frac{Ra^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Ra^2}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi Ra^2. \end{aligned}$$

2.2.4 Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$,

где σ – конечная часть поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0$ и $y = 1$.

Решение. Изобразим заданную поверхность на рисунке 17. Так как поверхность задана уравнением $x = x(y; z)$, то для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой перехода к двойному интегралу.

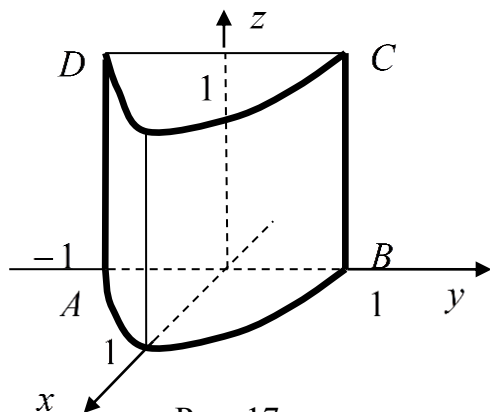


Рис. 17

$$\iint_{\sigma} f(x; y; z) d\sigma =$$

$$\iint_G f(x(y; z); y; z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz, \text{ где } G$$

– проекция поверхности σ на плоскость Oyz . Так

как $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ и $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$, то

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz = \sqrt{1 + \left(-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2 + 0^2} dydz = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dydz.$$

Проекцией заданной части эллиптического цилиндра $x = \sqrt{1-y^2}$ на плоскость Oyz является прямоугольник $ABCD$ (область G), определяемый неравенствами $-1 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Вычислим искомый поверхностный интеграл первого рода.

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (xy + xz) d\sigma &= \iint_G \left(\sqrt{1-y^2} \cdot y + \sqrt{1-y^2} \cdot z \right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dydz = \iint_G (y + z) dydz = \\ &= \int_{-1}^1 dy \int_0^1 (y + z) dz = \int_{-1}^1 \left(yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy = \int_{-1}^1 \left(y + \frac{1}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Вычислить поверхностный интеграл первого рода ($\text{ПИ} - I$) по поверхности S , где S — часть плоскости α , отсеченная координатными плоскостями.

а) $\text{ПИ} - I$: $\iint_S (x - y + z) dS$, α : $2x - y - z + 3 = 0$;

б) $\text{ПИ} - I$: $\iint_S (3x + y + z) dS$, α : $x + y - z + 12 = 0$,

2.3.2 Вычислить поверхностный интеграл второго рода (ПИ – II).

а) ПИ – II: $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$, где S — сторона поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$

(нормальный вектор $\vec{n}$ образует с ортом $\vec{k}$ острый угол), отсеченная плоскостью $z = 0$;

б) ПИ – II: $\iint_S y^2 dx dz + z^2 dx dy + x^2 dy dz$, где S — внешняя сторона сферы

$z^2 = 4 - x^2 - y^2$, лежащая во втором октанте.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Вычислить поверхностный интеграл первого рода (ПИ – I) по поверхности S , где S — часть плоскости α , отсеченная координатными плоскостями: $\iint_S (3x - y) dS$, α : $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

2.4.2 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_S (5x^2 + 5y^2 + z^2) dx dy$, где S — внешняя сторона части верхней полусферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, вырезанной конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3 ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

3.1 Содержание: поток, циркуляция, дивергенция и ротор векторного поля, виды векторных полей.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Вычислить поток векторного поля

$\vec{a}(M) = (x + y - z)\vec{i} + (2x + y + z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды $OABC$, используя определение потока. Вершины пирамиды располагаются в точках $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.

Решение. РЕШЕНИЕ. Пирамида ограничена гранями OAB , OBC , OAC и ABC . Первые три грани представляют собой треугольники, лежащие в координатных плоскостях Oxy , Oyz и Oxz , соответственно. Найдем уравнение плоскости, в которой лежит контур треугольника ABC . Для определения уравнения плоскости воспользуемся уравнением плоскости в отрезках

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1.$$

Общий вид уравнения плоскости ABC :

$$6x + 3y + 4z - 12 = 0.$$

Следовательно, нормальный вектор этой плоскости имеет координаты $\vec{n}(6;3;4)$. Заданная пирамида изображена на рисунке 18.

Поток векторного поля через полную поверхность пирамиды $OABC$, в направлении внешней нормали, равен сумме потоков векторного поля через грани OAB , OBC , OAC и ABC :

$\Pi_{OABC} = \Pi_{OAB} + \Pi_{OBC} + \Pi_{OAC} + \Pi_{ABC}$. Найдем потоки векторного поля через каждую грань. По определению поток векторного поля вычисляется с помощью поверхностного интеграла $\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 dS$.

Рассмотрим грань OAB , которая лежит в плоскости $z = 0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{k}$, $dS = dxdy$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = ((x + y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x - y)\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) = y - x.$$

Тогда поток векторного поля через грань OAB равен

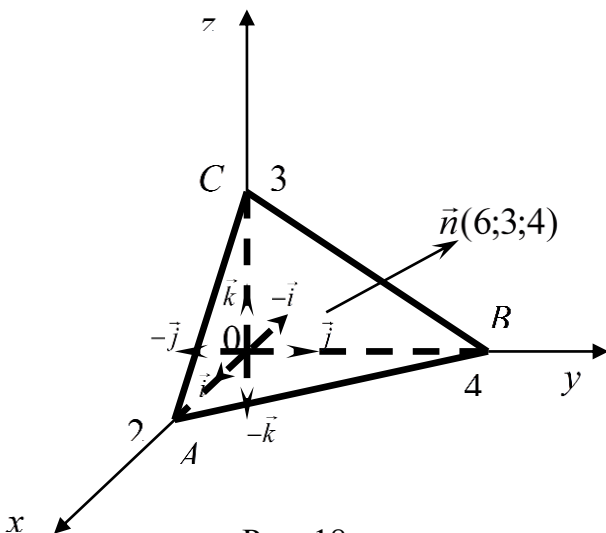


Рис. 18

$$\begin{aligned} \Pi_{OAB} &= \iint_{\Delta OAB} (y-x) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (y-x) dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - xy \right) \Big|_0^{4-2x} dx = \int_0^2 (4x^2 - 12x + 8) dx = \\ &= \left(\frac{4}{3} x^3 - 6x^2 + 8x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим грань OBC , которая лежит в плоскости $x=0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{i}$, $dS = dydz$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = ((y-z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z-y)\vec{k}) \cdot (-\vec{i}) = z-y.$$

Тогда поток векторного поля через грань OBC равен

$$\begin{aligned} \Pi_{OBC} &= \iint_{\Delta OBC} (z-y) dy dz = \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{4}y} (z-y) dz = \int_0^4 \left(\frac{z^2}{2} - yz \right) \Big|_0^{3-\frac{3}{4}y} dy = \\ &= \int_0^4 \left(\frac{33}{32} y^2 - \frac{21}{4} y + \frac{9}{2} \right) dy = \left(\frac{11}{32} y^3 - \frac{21}{8} y^2 + \frac{9}{2} y \right) \Big|_0^4 = -2. \end{aligned}$$

Рассмотрим грань OAC , которая лежит в плоскости $y=0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{j}$, $dS = dx dz$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = ((x-z)\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x+z)\vec{k}) \cdot (-\vec{j}) = -2x-z.$$

Тогда поток векторного поля через грань OAC равен

$$\begin{aligned} \Pi_{OAC} &= - \iint_{\Delta OAC} (z+2x) dx dz = - \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (z+2x) dz = - \int_0^2 \left(\frac{z^2}{2} + 2xz \right) \Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} dx \\ &= - \int_0^2 \left(-\frac{15}{8} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{9}{2} \right) dx = - \left(-\frac{5}{8} x^3 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{9}{2} x \right) \Big|_0^2 = -7. \end{aligned}$$

Рассмотрим грань ABC , которая лежит в плоскости $6x+3y+4z-12=0$.

Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = \frac{6\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{36+9+16}} = \frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}$. Найдем

$dS = \sqrt{1+z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$. По условию $z = 3 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y$, следовательно, $z_x' = -\frac{3}{2}$,

$z_y' = -\frac{3}{4}$. Тогда $dS = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{16}} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{4} dx dy$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = ((x+y-z)\vec{i} + (2x+y+z)\vec{j} + (x-y+z)\vec{k}) \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{61}} \left(15x + \frac{21}{2}y - 18 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y + 9 - 2x - 7y + 12 \right) = \frac{1}{\sqrt{61}} \left(\frac{29}{2}x + \frac{17}{4}y + 3 \right).$$

Тогда поток векторного поля через грань ABC равен

$$\begin{aligned} \Pi_{ABC} &= \iint_{\Delta OAB} \frac{1}{\sqrt{61}} \left(\frac{29}{2}x + \frac{17}{4}y + 3 \right) \frac{\sqrt{61}}{4} dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} \left(\frac{29}{8}x + \frac{17}{16}y + \frac{3}{4} \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{29}{2}xy - \frac{17}{8}y^2 + 3 \right) \Big|_0^{4-2x} dx = \int_0^2 \left(-\frac{41}{8}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{23}{2} \right) dx = \\ &= \left(-\frac{41}{24}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{23}{2}x \right) \Big|_0^2 = \frac{55}{3} \end{aligned}$$

Следовательно, поток векторного поля через внешнюю поверхность пирамиды равен

$$\Pi_{OABC} = \Pi_{OAB} + \Pi_{OBC} + \Pi_{OAC} + \Pi_{ABC} = \frac{8}{3} - 2 - 7 + \frac{55}{3} = 12$$

3.2.2 Вычислить поток векторного поля, который определен вектором $\vec{a}(M) = (x + y - z)\vec{i} + (2x + y + z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды $OABC$, используя теорему Остроградского-Гаусса. Вершины пирамиды располагаются в точках $O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.

Решение. Условие задачи соответствуют примеру 3.2.1, но заданный поток векторного поля необходимо вычислить по теореме Остроградского-Гаусса: $\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(M) dx dy dz$, то есть поток Π векторного поля $\vec{a}(M)$ через

замкнутую поверхность σ , в направлении внешней нормали, численно равен тройному интегралу от дивергенции заданного поля по области Ω , которая ограничивает поверхность σ (рис.18). Дивергенция $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P(x; y; z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x; y; z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x; y; z)}{\partial z}.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x + y - z)}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(2x + y + z)}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(x - y + z)}{\partial z} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi_{OABC} &= \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) dx dy dz = 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y} dz = \\ &= 3 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} z \Big|_0^{3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y} dy = 3 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} \left(3 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y \right) dy = 3 \int_0^2 \left(3y - \frac{3}{2}xy - \frac{3}{8}y^2 \right) \Big|_0^{4-2x} dx = \\ &= 3 \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 \right) dx = 3 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x \right) \Big|_0^2 = 3(4 - 12 + 12) - 0 = 12. \end{aligned}$$

3.2.3 Вычислить циркуляцию векторного поля

$\vec{a}(M) = (x + y - z)\vec{i} + (2x + y + z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}$ по контур треугольника ABC при положительном направлении обхода относительно нормального вектора (к плоскости треугольника ABC) $\vec{n}$, составляющего с осью Oz острый угол, по определению циркуляции векторного поля. Вершины контура располагаются в точках $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.

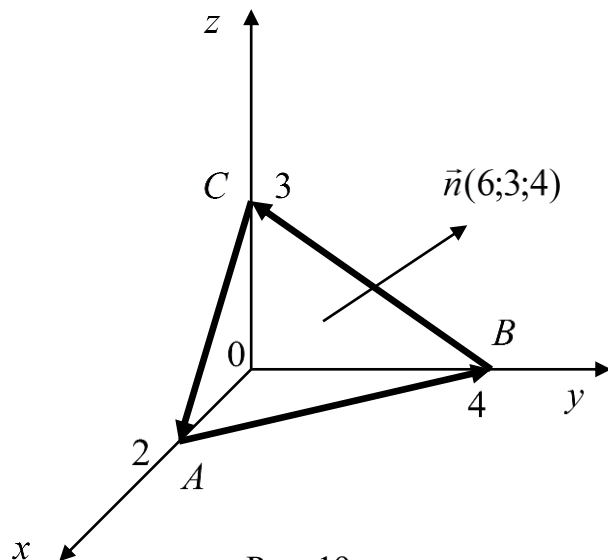


Рис. 19

Решение. Контур треугольника ABC , с направлением обхода по нему, изображен на рисунке 19. Вычислим циркуляцию векторного поля по формуле $\mathcal{C} = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau}^0 dl = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{dl}$. Используя свойство аддитивности области интегрирования, получаем, что

$$\mathcal{C} = \oint_{ABCA} \vec{a} \cdot \vec{dl} = \int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{dl} + \int_{BC} \vec{a} \cdot \vec{dl} + \int_{CA} \vec{a} \cdot \vec{dl}.$$

На отрезке AB получаем: $z = 0$, $y = 4 - 2x$, $dy = -2dx$, x лежит от 2 до 0, $\vec{dl} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$, векторное поле

$$\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x - y)\vec{k},$$

скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{dl} = (x + y)dx + (2x + y)dy$,

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{dl} &= \int_{AB} (x + y)dx + (2x + y)dy = \int_2^0 (x + 4 - 2x)dx + (2x + 4 - 2x) \cdot (-2)dx = \\ &= \int_2^0 (-x - 4)dx = \left(-\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_2^0 = 0 - (-2 - 8) = 10. \end{aligned}$$

На отрезке BC получаем: $x = 0$, $z = 3 - \frac{3}{4}y$, $dz = -\frac{3}{4}dy$, y лежит от 4 до 0, $\vec{dl} = dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (y - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{dl} = (y + z)dy + (z - y)dz$,

$$\begin{aligned} \int_{BC} \vec{a} \cdot \vec{dl} &= \int_{BC} (y + z)dy + (z - y)dz = \int_4^0 \left(y + 3 - \frac{3}{4}y \right)dy + \left(3 - \frac{3}{4}y - y \right) \cdot \left(-\frac{3}{4} \right)dy = \\ &= \int_4^0 \left(\frac{25}{16}y + \frac{3}{4} \right)dy = \left(\frac{25}{32}y^2 + \frac{3}{4}y \right) \Big|_4^0 = 0 - \left(\frac{25}{2} + 3 \right) = -\frac{31}{2}. \end{aligned}$$

На отрезке CA получаем: $y = 0$, $z = 3 - \frac{3}{2}x$, $dz = -\frac{3}{2}dx$, x лежит от 0 до 2, $\vec{dl} = dx \cdot \vec{i} + dz \cdot \vec{k}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (x - z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{dl} = (x - z)dx + (x + z)dz$,

$$\begin{aligned}\int_{CA} \vec{a} \cdot d\vec{l} &= \int_{CA} (x-z)dx + (x+z)dz = \int_0^2 \left(x-3+\frac{3}{2}x\right)dx + \left(x+3-\frac{3}{2}x\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{13}{4}x - \frac{15}{2}\right)dx = \left(\frac{13}{8}x^2 - \frac{15}{2}x\right) \Big|_0^2 = \left(\frac{13}{2} - 15\right) - 0 = -\frac{17}{2}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{U} = 10 - \frac{31}{2} - \frac{17}{2} = -14$.

3.2.4 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = (x+y-z)\vec{i} + (2x+y+z)\vec{j} + (x-y+z)\vec{k}$ по контуру треугольника ABC при положительном направлении обхода относительно нормального вектора (к плоскости треугольника ABC) $\vec{n}$, составляющего с осью Oz острый угол, по теореме Стокса. Вершины контура располагаются в точках $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$.

Решение. Контур треугольника ABC , с направлением обхода по нему, изображен на рисунке 19. Вычислим циркуляцию векторного поля по теореме Стокса, которая в векторной форме имеет вид:

$$\mathcal{U} = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau}^0 dl = \iint_{\sigma} \text{rot} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 dS,$$

то есть циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутого контура γ равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность σ , краем которого является контур γ . В условиях задачи контур γ представляет собой контур $ABCA$. В качестве поверхности σ , краем которого является контур γ , выберем треугольник ABC . Найдем ротор векторного поля.

$$\text{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y-z & 2x+y+z & x-y+z \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Нормальный единичный вектор $\vec{n}^0 = \frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}$ определен в примере 23. Тогда

$$\text{rot} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = (-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}\right) = -\frac{14}{\sqrt{61}}.$$

Элемент $dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dxdy = \frac{\sqrt{61}}{4} dxdy$ определен в примере 23.

Следовательно,

$$\mathcal{U} = \iint_{\sigma} \left(-\frac{14}{\sqrt{61}}\right) dS = \iint_{OAB} \left(-\frac{14}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{4}\right) dxdy = -\frac{7}{2} \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy =$$

$$= -\frac{7}{2} \int_0^2 y|_0^{4-2x} dx = -\frac{7}{2} \int_0^2 (4-2x) dx = -\frac{7}{2} (4x - x^2) \Big|_0^2 = -\frac{7}{2} \cdot (8-4) + \frac{7}{2} \cdot 0 = -14.$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды $ABCO$ (точка O — начало координат) используя определение потока. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника ABC , при положительном направлении обхода относительно нормального (к плоскости треугольника ABC) вектора $\vec{n}$, составляющего с осью OZ острый угол, с помощью формулы Стокса.

а) $\vec{a}(M) = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$, $A(1,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,-2)$;

б) $\vec{a}(M) = y\vec{i} - x\vec{j} - z\vec{k}$, $A(-1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$.

3.3.2 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды $ABCO$ (точка O — начало координат) используя формулу Остроградского-Гаусса. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника ABC , при положительном направлении обхода относительно нормального (к плоскости треугольника ABC) вектора $\vec{n}$, составляющего с осью OZ острый угол, по определению циркуляции векторного поля.

а) $\vec{a}(M) = y\vec{i} - (x+y)\vec{j} + x\vec{k}$, $A(2,0,0)$, $B(0,-4,0)$, $C(0,0,3)$;

б) $\vec{a}(M) = (x-y)\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$, $A(-2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,-1)$.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды $ABCO$ (точка O — начало координат) используя определение потока. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника ABC , при положительном направлении обхода относительно нормального (к плоскости треугольника ABC) вектора $\vec{n}$, составляющего с осью OZ острый угол, с помощью формулы Стокса.

а) $\vec{a}(M) = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$, $A(-2,0,0)$, $B(0,-5,0)$, $C(0,0,4)$;

б) $\vec{a}(M) = (x-z)\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$, $A(4,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$.

3.4.2 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды $ABCO$ (точка O — начало координат) используя формулу Остроградского-Гаусса. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника ABC , при положительном направлении обхода относительно нормального (к плоскости треугольника ABC) вектора $\vec{n}$, составляющего с осью OZ острый угол, по определению циркуляции векторного поля.

а) $\vec{a}(M) = y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$, $A(-4,0,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(0,0,3)$;

б) $\vec{a}(M) = 2y\vec{i} - (x+y)\vec{j} + z\vec{k}$, $A(5,0,0)$, $B(0,-3,0)$, $C(0,0,1)$.