

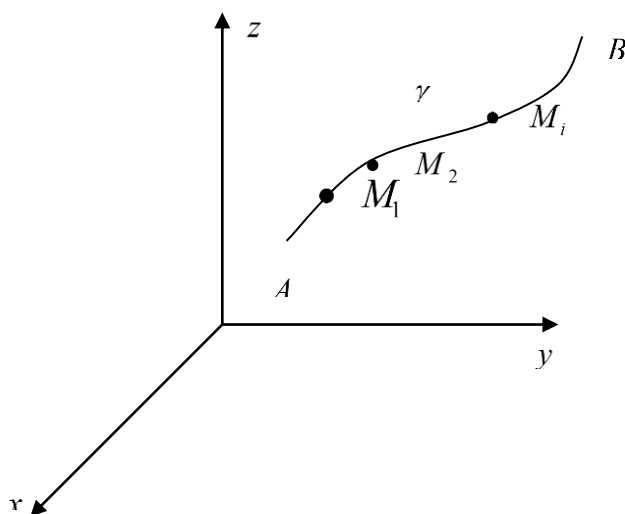
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА (КИ – I).

Пусть в пространстве задана некоторая кривая γ , которая определена параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \text{ и } \alpha \leq t \leq \beta.$$

$$A(x(\alpha); y(\alpha); z(\alpha)), B(x(\beta); y(\beta); z(\beta))$$

Если $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$, $z(\alpha) = z(\beta)$, то кривая γ называется замкнутой.



Если на $[\alpha; \beta]$ производные $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ непрерывны и по крайней мере одна из них отлична от нуля, то есть $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \neq 0$, то кривая γ называется гладкой кривой. Если это условие нарушается в конечном числе точек интервала $(\alpha; \beta)$, то кривая называется кусочно гладкой кривой. Предположим, что на пространственной кривой γ определена некоторая функция $f(x; y; z)$, то есть в каждой точке

кривой мы можем вычислить значение функции. Разобьём кривую γ на n элементарных частей точками: $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n = B$. На каждой элементарной дуге $M_{i-1}M_i$ произвольным образом выбираем точки, с заданными координатами:

$$P_1(x_1; y_1; z_1), P_2(x_2; y_2; z_2), \dots, P_i(x_i; y_i; z_i), \dots, P_n(x_n; y_n; z_n).$$

В каждой выбранной точке вычисляем значение функции: $f(x_i; y_i; z_i), i = \overline{1; n}$. Составляем интегральную сумму $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta l_i$, где $\Delta l_i = |M_{i-1}M_i|$ – расстояние между точками разбиения. Мелкостью разбиения называется величина равная $\lambda_n = \max_i \Delta l_i$. Таких интегральных сумм можно составить сколь угодно много, они зависят от разбиения кривой и выбора точек на элементарных дугах.

Определение. Криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x; y; z)$ по дуге γ называется предел интегральных сумм от данной функции

по длине дуги γ , при мелкости разбиения стремящемся к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$\int_{\gamma} f(x; y; z) dl \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta l_i$$

Такое определение криволинейного интеграла первого рода конструктивно не отличается от определения определенного интеграла. Поэтому свойства КИ – I будут аналогичны свойствам определенного интеграла, с учетом специфики определения КИ – I. Например, теорема о среднем, для КИ – I может быть сформулирована следующим образом:

Теорема. Если функция $f(x; y; z)$ является непрерывной, а кривая γ является гладкой, то существует, по крайней мере, одна точка $\bar{P}(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ в которой справедливо равенство:

$$\int_{\gamma} f(x; y; z) dl = f(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}) \cdot l,$$

где $f(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ называется средним значением функции по дуге γ , а l – длина дуги γ .

На вопрос о существовании КИ – I по дуге γ , отвечает теорема существования.

Теорема. Если функция $f(x; y; z)$ является непрерывной в некоторой области D, то на любой дуге, входящей в данную область, будет существовать КИ – I, как предел интегральных сумм.

Рассмотрим методы вычисления криволинейного интеграла первого рода. Для плоской кривой γ , расположенной, например, в плоскости Oxy, возможны следующие способы задания линии γ :

1) уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a; b]$. Пусть функция $\varphi(x)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a; b]$. Определим дифференциал дуги.

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (\varphi'(x)dx)^2} = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода по длине дуги сводится к вычислению определенного интеграла по отрезку, принадлежащему оси Oх и являющемуся проекцией дуги на эту ось:

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_a^b f(x; \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$$

Аналогично, если кривая γ задана уравнением $x = \psi(y)$, $y \in [c; d]$ и функция $\psi(y)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[c; d]$, то

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_c^d f(\psi(y); y) \sqrt{1 + (\psi'(y))^2} dy;$$

2) пусть функция определена параметрическим образом: $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными на отрезке $[\alpha; \beta]$. В этом случае дифференциал дуги γ равен

$$dl = \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2} = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода по дуге сводится к вычислению определенного интеграла по параметру t :

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Пусть пространственная кривая γ определена параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$, $y(t)$, $z = z(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными на отрезке $[\alpha; \beta]$. В этом случае дифференциал дуги γ равен

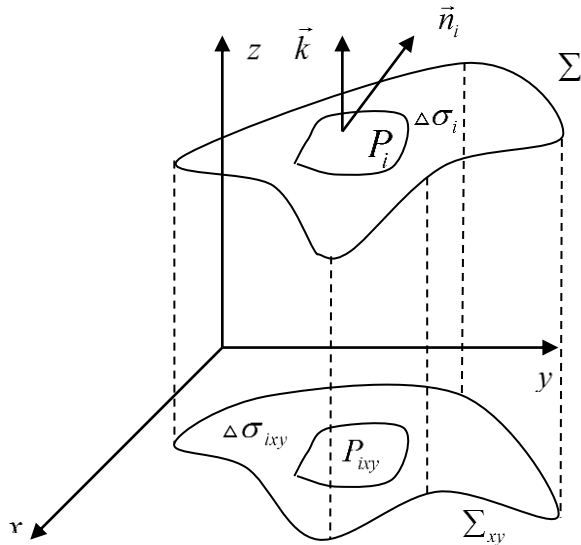
$$dl = \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода по дуге сводится к вычислению определенного интеграла по параметру t :

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА (ПИ – I).

Пусть в пространстве задана некоторая поверхность Σ в некоторой системе координат. А также определено уравнение заданной поверхности: $\Phi(x; y; z) = 0$. Предположим, что на этой поверхности задана функция трех



переменных $f(x; y; z)$. Разобьем поверхность Σ на n элементарных частей. Пусть нам известны площади элементарных поверхностей: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_i, \dots, \Delta\sigma_n$. Будем считать, что поверхность Σ является гладкой, то есть на ней определены и непрерывны частные производные, по крайней мере, одна из которых отлична от нуля. Поэтому направление нормали по поверхности Σ будет меняться непрерывно. На каждой элементарной поверхности произвольным образом выбираем точки $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ и

вычисляем значение функции $f(x; y; z)$ в каждой из них:

$f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_i), \dots, f(P_n)$. Составим интегральные суммы $\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i$ от

функции $f(x; y; z)$ по площади поверхности Σ . Таких сумм можно составить сколь угодно много. Они будут зависеть от разбиения поверхности и выбора точек $P_i (i = \overline{1; n})$. Расстояние между наиболее удаленными точками разбиения, поверхности Σ , назовем диаметром разбиения, а максимум из диаметров разбиения назовем мелкостью разбиения, и обозначим значением λ_n .

Определение. Поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x; y; z)$ по поверхности Σ , называется предел интегральных сумм от этой функции по площади поверхности σ , при мелкости разбиения стремящемся к нулю, и если этот предел существует и конечен.

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta\sigma_i.$$

Такое определение поверхностного интеграла первого рода конструктивно не отличается от определения двойного интеграла. Поэтому свойства ПИ – I будут аналогичны свойствам двойного интеграла, с учетом специфики определения ПИ – I. Например, теорема о среднем, для ПИ – I может быть сформулирована следующим образом:

Теорема. Если функция $f(x; y; z)$ является непрерывной, а поверхность Σ является гладкой, то существует, по крайней мере, одна точка $\bar{P}(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ в которой справедливо равенство:

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma = f(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}) \cdot S_{\Sigma_{xy}},$$

где $f(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ называется средним значением функции по поверхности Σ , а $S_{\Sigma_{xy}}$ – площадь проекции поверхности Σ на плоскость Oxy .

На вопрос о существовании ПИ – I по поверхности Σ , отвечает теорема существования.

Теорема. Если функция $f(x; y; z)$ является непрерывной в некоторой области Ω , то на любой поверхности, входящей в данную область, будет существовать ПИ – I, как предел интегральных сумм.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла.

Уравнение поверхности $\Phi(x; y; z) = 0$, которая заданна в неявном виде, можно записать в явном виде, как $z = \varphi(x; y)$. Спроектируем эту поверхность на плоскость Oxy . При этом элементарная поверхность, с площадью $\Delta\sigma_i$, спроектируется в элементарную поверхность, с площадью $\Delta\sigma_{ixy}$. При этом площади $\Delta\sigma_i$ и $\Delta\sigma_{ixy}$ будут связаны между собой. Нормалью к элементарной поверхности, с площадью $\Delta\sigma_i$, является вектор $\vec{n}_i$, а к поверхности, с площадью $\Delta\sigma_{ixy}$, будет вектор $\vec{k}$, так как он перпендикулярен плоскости Oxy . Тогда справедливо равенство: $\Delta\sigma_{ixy} = \Delta\sigma_i \cdot \cos(\vec{n}_i, \vec{k})$. Следовательно, связь между элементарными площадями $d\sigma_{xy}$ и $d\sigma$ будет определяться формулой: $d\sigma_{xy} = d\sigma \cdot |\cos(\vec{n}, \vec{k})|$.

Учитывая последнее равенство, запишем формулу перехода от поверхностного интеграла первого рода к двойному интегралу:

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} f(x; y; \varphi(x; y)) \frac{d\sigma_{xy}}{|\cos(\vec{n}, \vec{k})|}$$

Преобразуем последнюю формулу. Поверхность $z = \varphi(x; y)$ можно рассматривать как поверхность уровня функции $\Phi(x; y; z) = \varphi(x; y) - z$. Используя свойства поверхности уровня нам известно, что градиент функции всегда перпендикулярен соответствующей поверхности уровня. Градиент функции имеет координаты:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = (\varphi'_x; \varphi'_y; -1).$$

Следовательно,

$$|\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}}$$

Если интеграл вычисляется в декартовой системе координат, то элемент площади определяется по формуле: $d\sigma_{xy} = dx dy$. Следовательно, окончательная формула вычисления поверхностного интеграла первого рода при переходе к двойному интегралу имеет вид:

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} f(x; y; \varphi(x; y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy.$$

Замечание. Если поверхность представлена в виде $x = \psi(y; z)$, то формула преобразуется к виду:

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma = \iint_{\Sigma_{yz}} f(\psi(y; z); y; z) \sqrt{1 + (\psi'_z)^2 + (\psi'_y)^2} dz dy.$$

Аналогично, если поверхность представлена в виде $y = \eta(x; z)$, то формула преобразуется к виду:

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma = \iint_{\Sigma_{xz}} f(x; \eta(x; z); z) \sqrt{1 + (\eta'_x)^2 + (\eta'_z)^2} dx dz.$$

С помощью поверхностно интеграла первого рода можно вычислить площадь поверхности Σ – Q . $Q \approx \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$. За точное значение площади поверхности принимают значение поверхностного интеграла: $Q = \iint_{\Sigma} d\sigma$. Если уравнение поверхности задано формулой $z = \varphi(x; y)$, то площадь полной поверхности определяется формулой:

$$Q = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy.$$

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ. ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ.

Если любой точке M из области Ω , по определенному правилу, сопоставляется некоторое действительное число $u(M)$, то говорят, что в данной области задано скалярное поле. Если область Ω отнести к некоторой декартовой системе координат трехмерного пространства, то точке $M(x; y; z)$ будет соответствовать действительное число $u(x; y; z)$, то есть фактически в области Ω задана скалярная функция трех переменных. Таким образом, задание скалярного поля равносильно заданию функции трех переменных и наоборот. Примером скалярного поля является поле температур.

Предположим, задано пространственное скалярное поле, которое определяется функцией трех переменных $f(x; y; z)$. Поверхностью уровня называется поверхность, в любой точке которой поле принимает постоянное значение. Таким образом, поверхность уровня имеет уравнение: $f(x; y; z) = C$.

Если скалярное поле плоское, то оно определяется функцией двух переменных $f(x; y)$, и в данном случае имеем линию уровня, в любой точке которой поле принимает постоянное значение: $f(x; y) = C$.

Скорость изменения поля в заданном направлении l определяется производной функции $f(x; y; z)$ по направлению вектора $\vec{l}$, которая вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы, заданные направлением l .

$$\vec{l}_0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$$

Направление и наибольшая скорость возрастания поля характеризуется градиентом, который представляет собой вектор:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

Градиент скалярного поля всегда перпендикулярен линии уровня, для плоского поля, или поверхности уровня, для пространственного поля.

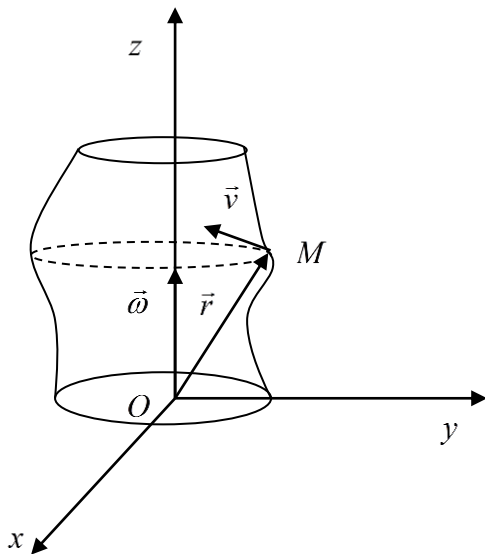
Используя определение скалярного произведения векторов, можно записать производную функции по направлению вектора, как скалярное произведение единичного данного вектора на градиент функции: $\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{l}_0 \cdot \text{grad } f$.

Производная функции по направлению вектора и градиент функции являются характеристиками скалярного поля.

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ.

Если любой точке M из области Ω , по определенному правилу, сопоставляется некоторый вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в данной области задано скалярное поле. Если область Ω отнести к некоторой декартовой системе координат трехмерного пространства, то точке $M(x; y; z)$ будет соответствовать вектор $\vec{a}(x; y; z)$. Таким образом, задание векторного поля равносильно заданию некоторой вектор – функции точки и наоборот.

Пример 1. Поле скоростей точек абсолютно твердого тела, при его вращательном движении вокруг некоторой оси. Любой точке $M(x; y; z)$ некоторого тела, с радиус – вектором $\vec{r}(x; y; z)$, сопоставляется некоторый вектор скорости $\vec{v}(M)$. Линейная скорость $\vec{v}$ связана с угловой скоростью $\vec{\omega}(0; 0; \omega)$ по формуле: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Определим координаты линейной скорости.

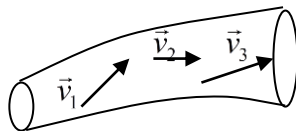


$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega \cdot (y \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}).$$

Таким образом, линейная скорость имеет координаты:

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0.$$

Пример 2. Поле скоростей движущейся не сжимающейся жидкости с постоянной плотностью.



Пример 3. Электростатическое поле. Если в некоторой области присутствует электростатическое поле, то любой точке области сопоставим вектор напряженности $\vec{E}(r) = k \frac{q}{r^2} \vec{r}_0$, где q – точечный заряд, $\vec{r}_0$ – единичный радиус – вектор точки, $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ – коэффициент пропорциональности.

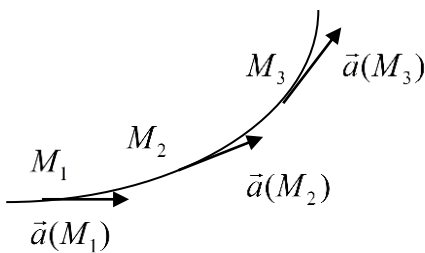
Предположим, что задано некоторое векторное поле $\vec{a}(M)$ в некоторой декартовой системе координат. Тогда в любой точке данный вектор можно разложить по базису:

$$\vec{a}(M) = a_x(M) \cdot \vec{i} + a_y(M) \cdot \vec{j} + a_z(M) \cdot \vec{k}$$

Таким образом, в определенной системе координат, задание векторного поля равносильно заданию трех скалярных функций:

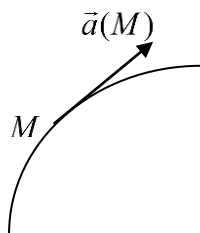
$$\begin{cases} a_x = a_x(x; y; z), \\ a_y = a_y(x; y; z), \\ a_z = a_z(x; y; z). \end{cases}$$

Геометрической характеристикой любого векторного поля являются векторные линии. Векторными линиями поля $\vec{a}(M)$ называются линии, в любой точке которых направление касательных совпадают с направлением поля. Если поле является силовым, то векторные линии представляют собой силовые линии данного поля. Возникает вопрос: как по заданному вектору $\vec{a}(M)$ определить векторные линии? Возьмем на векторной линии произвольную точку M и отнесем ее к декартовой системе координат. Тогда этой точке в заданном векторном поле будет соответствовать вектор:



$$\vec{a}(M) = (a_x(x; y; z); a_y(x; y; z); a_z(x; y; z)).$$

Выбираем произвольный касательный вектор $\vec{dl} = (dx; dy; dz)$. По определению векторной линии данные вектора являются коллинеарными: $\vec{dl} \parallel \vec{a}(M)$. Но если вектора являются коллинеарными, то их координаты пропорциональны:



$$\frac{dx}{a_x(x; y; z)} = \frac{dy}{a_y(x; y; z)} = \frac{dz}{a_z(x; y; z)} \quad (1).$$

Данное уравнение можно записать в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{a_x(x; y; z)} = \frac{dy}{a_y(x; y; z)}, \\ \frac{dx}{a_x(x; y; z)} = \frac{dz}{a_z(x; y; z)}. \end{cases} \quad (2)$$

Решив полученную систему дифференциальных уравнений, получим семейство векторных линий заданного векторного поля.

Пример 4. Найти векторные линии векторного поля скоростей точек абсолютно твердого тела, при его вращательном движении вокруг некоторой оси.

В примере 1 предыдущего вопроса мы определили координаты линейной скорости $\vec{v} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$. Подставляя координаты линейной скорости в равенство (1), получаем уравнение:

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{0},$$

которое равносильно системе дифференциальных уравнений:

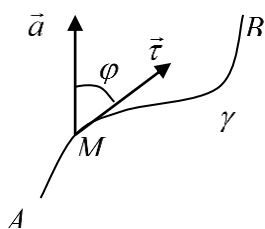
$$\begin{cases} dz = 0 \\ \frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = 0 \\ xdx + ydy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = Const \\ x^2 + y^2 = C^2 \end{cases}$$

Полученная система определяет семейство окружностей. В любой плоскости $z = Const$ картина поля будет одной и той же. Такие поля называются плоско параллельными.

Дальнейшее изучение векторных полей связано с понятиями криволинейного и поверхностного интегралов второго рода.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА (КИ – II).

Пусть в пространстве задана некоторая кривая γ , которая определяется параметрическими уравнениями:



$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Если указывается направление прохождения по данной кривой γ , то говорят, что кривая является ориентуемой. Чаще всего направление на кривой задается с помощью касательного вектора $\vec{\tau}$. Обычно в качестве вектора $\vec{\tau}$ выбирают единичный вектор.

За положительное направление прохождения кривой γ принимают такое направление, при котором параметр t возрастает. Если кривая является замкнутой, то за положительное направление принимают такое направление кривой, при котором при прохождении по кривой, если смотреть с конца нормального области, ограниченная данной кривой, данная область остается слева. Если указано направление прохождения по кривой, то кривая называется ориентуемой.

Предположим, что кривая γ является ориентуемой, и в каждой ее точке определена вектор – функция $\vec{a}(x; y; z)$. Найдем скалярное произведение вектор – функции на единичный касательный вектор.

$$\vec{a} \cdot \vec{\tau} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\tau}| \cdot \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \text{pr}_{\vec{\tau}} \vec{a} = a_{\tau}(x; y; z).$$

Определение. Криволинейным интегралом второго рода вектор – функции $\vec{a}(x; y; z)$ вдоль ориентуемой кривой γ называется криволинейный интеграл первого рода скалярной функции $\vec{a} \cdot \vec{\tau} = \text{pr}_{\vec{\tau}} \vec{a} = a_{\tau}(x; y; z)$ по указанной дуге.

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau} \, dl \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} a_{\tau} \, dl$$

Координатами любого касательного вектора являются частные производные: $(\dot{x}(t); \dot{y}(t); \dot{z}(t))$. Следовательно, единичный касательный вектор $\vec{\tau}$ будет иметь координаты:

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right)$$

Данный единичный касательный вектор $\vec{\tau}$ определяет ориентацию кривой. Учитывая, что дифференциал дуги dl равен $dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$, и используя свойства скалярного произведения, криволинейный интеграл второго рода можно записать в виде:

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{\gamma} \left(a_x \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + a_y \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + a_z \cdot \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (1)$$

По определению дифференциала функции справедливы равенства: $\dot{x}(t)dt = dx$, $\dot{y}(t)dt = dy$, $\dot{z}(t)dt = dz$. Тогда выражение (1) имеет вид:

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{\gamma} a_x(x; y; z)dx + a_y(x; y; z)dy + a_z(x; y; z)dz. \quad (2)$$

Если ввести обозначения $a_x(x; y; z) = P(x; y; z)$, $a_y(x; y; z) = Q(x; y; z)$, $a_z(x; y; z) = R(x; y; z)$, то криволинейный интеграл второго рода можно записать в виде:

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{\gamma} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz.$$

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла. Если кривая γ полностью ориентирована, то справедлива формула:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t); y(t); z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t); y(t); z(t))\dot{y}(t) + R(x(t); y(t); z(t))\dot{z}(t))dt. \end{aligned}$$

Поскольку КИ – II определяется через КИ – I, то все свойства КИ – I переносятся на КИ – II, за исключением одного. КИ – I не зависит от ориентации кривой, а КИ – II существенно зависит от ориентации заданной кривой, а именно при изменении ориентации значение криволинейного интеграла второго рода изменяет свой знак.

$$\int_{\gamma^+} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz = - \int_{\gamma^-} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz$$

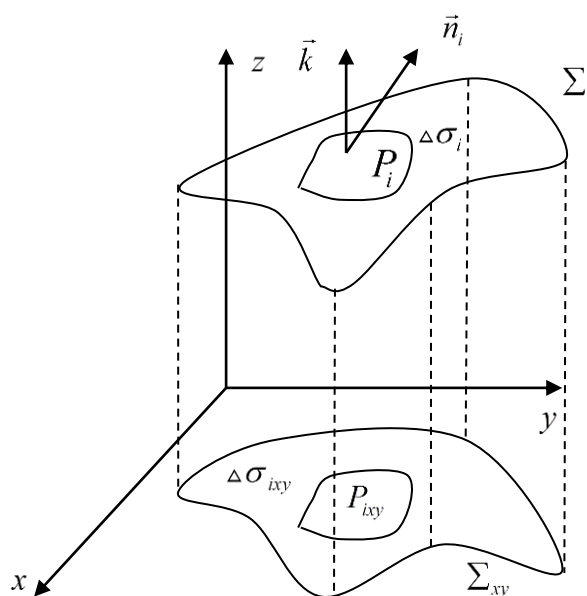
Рассмотрим плоское векторное поле, определяемое вектором $\vec{a}(P(x; y); Q(x; y))$. Пусть на плоскости Oxy задана некоторая кривая $\gamma: y = f(x)$, $x \in [a; b]$. Тогда криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой γ вычисляется, путем перехода к определенному интегралу, по формуле:

$$\int_{\gamma} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_a^b (P(x; f(x)) + Q(x; f(x)) \cdot f'(x)) dx.$$

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА (ПИ – II).

Криволинейный интеграл второго рода связан с ориентацией кривой. Поверхностный интеграл второго рода связан с ориентацией поверхности. Ориентировать поверхность означает задать одну из ее сторон. Двухсторонние поверхности являются ориентируемыми, если указана одна из её сторон. Если поверхность имеет одну сторону, то она называется не ориентируемой.

Поверхность называется двусторонней, если, перемещаясь по любой кривой, лежащей на данной поверхности, мы возвращаемся в исходную точку, при этом направление нормали не меняется. При перемещении направление нормали должно меняться непрерывно. Если существует кривая, при перемещении вдоль которой по поверхности, при возвращении в исходную точку, направление нормали изменяется, то такая поверхность называется односторонней.



Пусть задана ориентируемая поверхность Σ , с единичным вектором нормали $\vec{n}_0$. Координаты нормального вектора представляют собой направляющие косинусы: $\vec{n}_0(\cos(\vec{n}; x); \cos(\vec{n}; y); \cos(\vec{n}; z))$. Допустим, что на данной поверхности определена некоторая вектор – функция $\vec{a}(x; y; z) = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$. Составим скалярное произведение вектор – функции на нормальный единичный вектор: $\vec{a} \cdot \vec{n}_0 = a_n(x; y; z)$, где $a_n(x; y; z)$ – проекция вектор – функции на нормальный единичный вектор.

Определение. Поверхностным интегралом второго рода от вектор – функции $\vec{a}(x; y; z)$ по ориентируемой поверхности Σ называется поверхностный интеграл первого рода от скалярной функции $\vec{a} \cdot \vec{n}_0 = a_n(x; y; z)$.

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} a_n d\sigma.$$

Используя свойства скалярного произведения, последнее равенство можно записать в виде:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} (P(x; y; z) \cdot \cos(\vec{n}, x) + Q(x; y; z) \cdot \cos(\vec{n}, y) + R(x; y; z) \cdot \cos(\vec{n}, z)) d\sigma.$$

Преобразуем, подынтегральное выражение в правой части последнего равенства.

$d\sigma \cdot \cos(\vec{n}, x) = d\sigma_{yz} = \pm dydz$ – алгебраическая проекция поверхности на плоскость Oyz .

$d\sigma \cdot \cos(\vec{n}, y) = d\sigma_{xz} = \pm dx dz$ – алгебраическая проекция поверхности на плоскость Oxz .

$d\sigma \cdot \cos(\vec{n}, z) = d\sigma_{xy} = \pm dx dy$ – алгебраическая проекция поверхности на плоскость Oxy .

Тогда поверхностный интеграл второго рода можно записать в виде:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} P(x; y; z) dydz + Q(x; y; z) dx dz + R(x; y; z) dx dy$$

В подынтегральном выражении правой части стоит алгебраическая сумма. Знаки учитываются при вычислении поверхностного интеграла второго рода.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводятся к вычислению обычного двойного интеграла.

Допустим, что уравнение поверхности $\Sigma: z = f(x; y)$. Тогда справедливо равенство:

$$\iint_{\Sigma} R(x; y; z) dx dy = \pm \iint_{\Sigma_{xy}} R(x; y; f(x; y)) dx dy.$$

Допустим, что уравнение поверхности $\Sigma: y = \varphi(x; z)$. Тогда справедливо равенство:

$$\iint_{\Sigma} Q(x; y; z) dx dz = \pm \iint_{\Sigma_{xz}} Q(x; \varphi(x; z); z) dx dz.$$

Допустим, что уравнение поверхности $\Sigma: x = \psi(y; z)$. Тогда справедливо равенство:

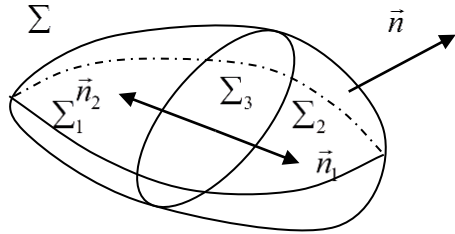
$$\iint_{\Sigma} P(x; y; z) dy dz = \pm \iint_{\Sigma_{yz}} P(\psi(y; z); y; z) dy dz.$$

Если поверхность не удовлетворяет выше перечисленным условиям, то её необходимо разбить на части и применить свойство аддитивности области интегрирования.

При вычислении поверхностного интеграла второго рода знак “+” берется в том случае, если угол между нормалью к поверхности и соответствующей осью острый, и знак “-” если угол является тупым.

Поверхностный интеграл второго рода непосредственно выражается через поверхностный интеграл первого рода, а следовательно, все свойства поверхностного интеграла первого рода переносятся на поверхностный интеграл второго рода, за исключением тех, которые связаны с ориентацией поверхности.

Рассмотрим внешнюю сторону ориентируемой замкнутой поверхности. Если тело, ограниченного ориентируемой замкнутой поверхностью Σ , разбить



на конечное число частей, то поверхностный интеграл второго рода в направлении внешней нормали, равен сумме интегралов по всем замкнутым поверхностям, ограничивающую каждую из частей, и имеющих аналогичную ориентацию с исходной поверхностью.

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$$\Sigma = (\Sigma_1 \cup \Sigma_3) \cup (\Sigma_2 \cup \Sigma_3)$$

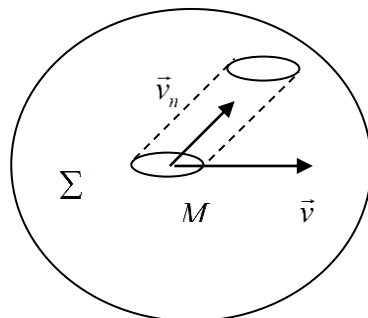
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_3} a_n d\sigma + \iint_{\Sigma_2 \cup \Sigma_3} a_n d\sigma &= \iint_{\Sigma_1} a_n d\sigma + \iint_{\Sigma_3} a_{n_1} d\sigma + \iint_{\Sigma_3} a_{n_2} d\sigma + \\ &+ \iint_{\Sigma_2} a_n d\sigma = \iint_{\Sigma_1} a_n d\sigma + \iint_{\Sigma_2} a_n d\sigma = \iint_{\Sigma} a_n d\sigma. \end{aligned}$$

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть в пространстве задано векторное поле $\vec{a}(x; y; z)$. Выберем в этом пространстве некоторую поверхность Σ и ориентируем её с помощью нормального вектора $\vec{n}(M)$, заданного в любой точке поверхности.

Определение. Поток векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ через ориентируемую поверхность Σ называется поверхностный интеграл второго рода вектор – функции $\vec{a}(x; y; z)$ через заданную поверхность Σ .

$$\Pi = \iint_{\Sigma} a_n d\sigma.$$



Рассмотрим физический смысл потока векторного поля. Обратимся к полю скоростей несжимаемой жидкости. В переносе жидкости через поверхность основную роль составляет нормальная составляющая скорости. Подсчитаем количество жидкости, которая протекает через элемент площади $d\sigma$ за единицу времени.

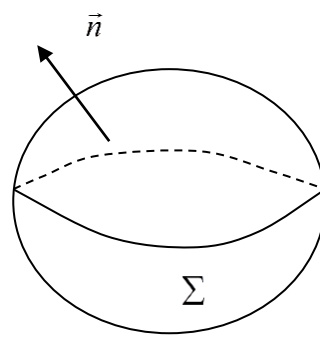
$$d\Pi = v_n d\sigma$$

Следовательно, в заданном направлении, поток векторного поля будет равен:

$$\Pi = \iint_{\Sigma} v_n d\sigma.$$

Рассмотрим замкнутую поверхность Σ . Тогда поток количества жидкости, протекающую через данную поверхность определяется поверхностным интегралом второго рода:

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} v_n d\sigma.$$



1. $\Pi = 0$. Это означает, что, сколько жидкости втекает в данный объем, столько же вытекает. Отсутствуют источники и стоки.
2. $\Pi > 0$. Вытекает больше жидкости, чем втекает. Имеются источники в течение жидкости, жидкости вытекает больше, чем поступает.
3. $\Pi < 0$. В данном случае можно говорить о наличии стоков в течение жидкости, так как вытекает меньше жидкости, чем поступает.

Таким образом, поток поля скоростей характеризуется наличием источников и стоков жидкости. Это утверждение справедливо и для любого другого поля. Любое векторное поле будет характеризоваться наличием или отсутствием источников и стоков.

Например, источником электрического поля является заряд $q = \oiint_{\Sigma} D_n d\sigma$. В магнитном поле не существует источников, подобно электрическому полю, а следовательно, $\oiint_{\Sigma} B_n d\sigma = 0$.

Второй интегральной характеристикой векторного поля является циркуляция векторного поля.

Определение. Циркуляцией векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ по замкнутому ориентируемому контуру γ называется криволинейный интеграл второго рода от данной вектор – функции по заданному ориентируемому контуру γ .

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} a_{\tau} dl = \oint_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Если векторное поле $\vec{a}(x; y; z)$ является силовым полем, то циркуляция векторного поля представляет собой работу вдоль заданного контура.

$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} E_{\tau} dl$ – работа по перемещению положительного единичного заряда вдоль заданного замкнутого контура γ .

Таким образом, векторные поля обладают двумя интегральными характеристиками: поток и циркуляция, нахождение которых сводится к вычислению поверхностного и криволинейного интеграла второго рода, соответственно.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Одной из дифференциальных характеристик векторного поля является дивергенция (расходимость векторного поля). Предположим в некоторой области Ω задано некоторое векторное поле $\vec{a}(M) = \vec{a}(x; y; z)$. Выберем внутри области Ω произвольную точку M и окружим ее некоторой замкнутой поверхностью Σ , которая входит в заданную область. Обозначим объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью Σ , через ΔV . Составим отношение потока векторного поля через замкнутую поверхность Σ к элементу объема.

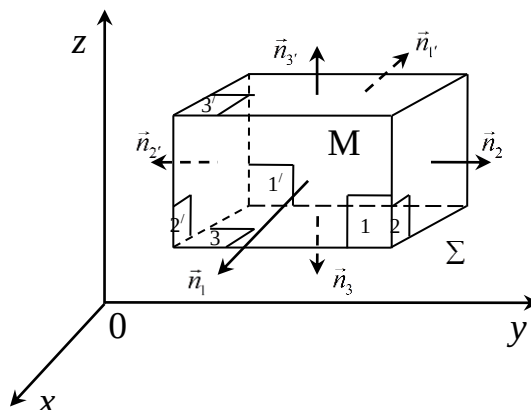
$$\frac{\oint_{\Sigma} \vec{a}_n d\sigma}{\Delta V}$$

Определение. Дивергенцией векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля, через замкнутую поверхность Σ , внутри которого располагается точка M , к величине объема тела, ограниченного данной поверхностью, при стягивании поверхности Σ в точку M .

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\Sigma \rightarrow M \\ (\Delta V \rightarrow 0)}} \frac{\oint_{\Sigma} \vec{a}_n d\sigma}{\Delta V}$$

С учетом физического смысла потока векторного поля дивергенция характеризует плотность потока, отнесенную к единице объема исходящую из точки M . Если $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$, то получаем плотность потока, исходящую из источника, $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$, то плотность стока. Если $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$, то нет ни источника, ни стока.

найдем выражение для дивергенции векторного поля в декартовой системе координат. В силу произвольности поверхности Σ , ограничивающую точку M , выберем в качестве поверхности прямоугольный параллелепипед, стороны которого параллельны осям координат. Определим поток через внешнюю поверхность параллелепипеда, пронумеровав грани, как показано на рисунке.



Будем вычислять потоки векторного поля через пары параллельных граней. В силу малостей граней можно считать, что поток через грань (1) и (1') определяется по формуле:

$$\Pi^{(1)} = \Pi_1 + \Pi_{1'} = \oiint_{\Sigma^{(1)}} a_n d\sigma = \oiint_{\Sigma_1} a_n d\sigma + \oiint_{\Sigma_{1'}} a_n d\sigma$$

Используя теорему о среднем, для поверхностного интеграла второго рода, получаем значение потока через поверхности (1) и (1').

$$\Pi^{(1)} = a_{x1} \Delta y \Delta z - a_{x1'} \Delta y \Delta z = (a_{x1} - a_{x1'}) \Delta y \Delta z .$$

Аналогично, поток векторного поля, через грани (2) и (2') равен

$$\Pi^{(2)} = a_{y2'} \Delta x \Delta z - a_{y2} \Delta x \Delta z = (a_{y2'} - a_{y2}) \Delta x \Delta z ,$$

а через поверхности (3) и (3')

$$\Pi^{(3)} = a_{z3'} \Delta x \Delta y - a_{z3} \Delta x \Delta y = (a_{z3'} - a_{z3}) \Delta x \Delta y .$$

Тогда дивергенция векторного поля определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a}(M) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\oiint_{\Sigma} a_n d\sigma}{\Delta V} = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}}{\Delta V} = \\ &= \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{(a_{x1} - a_{x1'}) \Delta y \Delta z + (a_{y2'} - a_{y2}) \Delta x \Delta z + (a_{z3'} - a_{z3}) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a_{x1} - a_{x1'}}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{a_{y2'} - a_{y2}}{\Delta y} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{a_{z3'} - a_{z3}}{\Delta z} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} . \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем формулу вычисления дивергенции:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} .$$

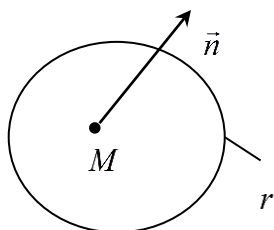
РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Если дивергенция является скалярной характеристикой векторного поля, то ротор является векторной характеристикой векторного поля. Ротор векторного поля будет определен, если будут определены его координаты в рассматриваемом пространстве.

Обозначение: $\text{rot } \vec{a}(M)$.

Так как координаты вектора представляют собой проекции этого вектора на базисные вектора, то для нахождения ротора векторного поля необходимо указать проекции вектора на соответствующие базисные вектора в точке M .

Пусть в пространстве задано векторное поле $\vec{a}(M)$. Вокруг произвольной точки M проведём плоскую, замкнутую гладкую кривую r . Фигуру, ограниченную кривой r , ориентируем следующим образом: если смотреть с конца нормального вектора $\vec{n}$ площадки, она остаётся слева, при движении по кривой против часовой стрелки.

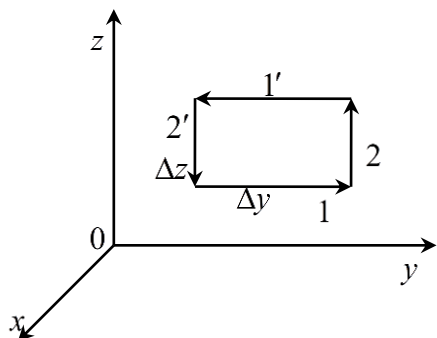


Определение. Проекцией ротора векторного поля $\vec{a}(M)$ по направлению нормального вектора $\vec{n}$ называется предел отношения циркуляции векторного поля по выбранной замкнутой кривой r к площади $\Delta\sigma$ соответствующей поверхности, ограниченной данной кривой, при стягивании кривой r в точку M .

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \lim_{r \rightarrow M} \frac{\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l}}{\Delta\sigma}$$

Данное определение является инвариантным, так как оно не зависит от выбора системы координат.

Найдём выражение, которое определит вычисление ротора в декартовой системе координат.



Определим проекцию $\text{rot}_x \vec{a}(M)$ ротора векторного поля на ось Ox . В этом случае данная ось должна являться нормалью к площадке, ограниченной кривой r . Выберем в качестве фигуры, ограниченной линией r , прямоугольник со сторонами Δy и Δz , с площадью $\Delta\sigma_{xy} = \Delta x \Delta y$. По определению проекции ротора по направлению вектора, получаем проекцию ротора на ось Ox :

$$\begin{aligned}
\oint \vec{a}_r dl \\
rot_x \vec{a}(M) &= \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{r_{yz}}{\Delta y \Delta z} = \\
&= \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{a_{y1} \Delta y + a_{z2} \Delta z - a_{y1'} \Delta y - a_{z2'} \Delta z}{\Delta y \Delta z} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \left(\frac{a_{z2} - a_{z2'}}{\Delta y} - \frac{a_{y1'} - a_{y1}}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{a_{z2} - a_{z2'}}{\Delta y} - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{a_{y1'} - a_{y1}}{\Delta z}.
\end{aligned}$$

По определению частных производных, получаем выражения проекции ротора векторного поля на ось Ox :

$$rot_x \vec{a}(M) = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}.$$

Аналогично получаем формулы проекций на ось Oy и Oz :

$$rot_y \vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \text{ и } rot_z \vec{a}(M) = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Таким образом, получили разложение ротора векторного поля по базисным векторам:

$$rot \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{k},$$

или

$$rot \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{k},$$

или

$$rot \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Введём символический вектор «набла»

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

который называется оператором Гамильтона. Его действие на скалярную функцию φ определяется по правилу

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \text{grad} \varphi,$$

то есть градиент равен $\text{grad} \varphi = \nabla \varphi$.

Рассмотрим векторную функцию $\vec{a}(M) = a_x(x; y; z) \vec{i} + a_y(x; y; z) \vec{j} + a_z(x; y; z) \vec{k}$. Тогда скалярное произведение оператора Гамильтона на вектор-функцию

$$\nabla \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div} \vec{a},$$

то есть дивергенция векторного поля равна $\text{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$.

Найдем векторное произведение оператора Гамильтона на вектор-функцию

$$\nabla \times \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot} \vec{a},$$

то есть ротор векторного поля равен $\text{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$.

Пример. Рассмотрим поле скоростей несжимаемой жидкости абсолютно твёрдого тела. Как мы показали выше, линейная скорость связана с угловой скоростью:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} + 0 \vec{k}.$$

Тогда ротор векторного поля скоростей равен:

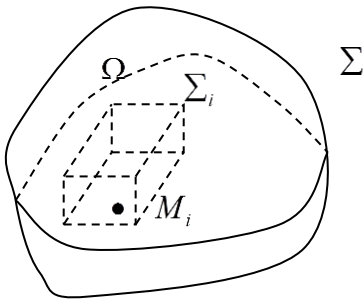
$$\text{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} - 0 \cdot \vec{j} + 2\omega \vec{k} = 2\omega \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Эта теорема устанавливает связь между поверхностным интегралом второго рода через замкнутую поверхность и тройным интегралом по области, которую ограничивает данная замкнутая поверхность.

Предположим, задана некоторая гладкая поверхность Σ ограничивающая область Ω , а также в этой замкнутой области определено векторное поле

$$\vec{a}(M) = a_x(x; y; z)\vec{i} + a_y(x; y; z)\vec{j} + a_z(x; y; z)\vec{k}.$$



Для установления связи между ПИ-II и тройным интегралом разобьём поверхность Σ на n элементарных поверхностей $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_i, \dots, \Sigma_n$, произвольным образом. В каждой области ограниченной элементарной поверхностью Σ_i выбираем точки M_i ($i = \overline{1; n}$), произвольным образом. Тогда по определению дивергенции, дивергенция векторного поля в точке M_i равна

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_i) = \lim_{\substack{\Sigma_i \rightarrow M_i \\ (\Delta V_i \rightarrow 0)}} \frac{\oiint_{\Sigma_i} a_n d\sigma}{\Delta V_i}.$$

Следовательно, $\oiint_{\Sigma_i} a_n d\sigma \approx \Delta V_i \cdot \operatorname{div} \vec{a}(M_i)$, где $i = \overline{1; n}$. Просуммируем

последнее равенство по всем i : $\sum_{i=1}^n \oiint_{\Sigma_i} a_n d\sigma \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i \cdot \operatorname{div} \vec{a}(M_i)$. На основании

свойства аддитивности для поверхностного интеграла второго рода получаем, что левая часть приближённого равенства равна поверхностному интегралу по

всей поверхности Σ : $\sum_{i=1}^n \oiint_{\Sigma_i} a_n d\sigma = \oiint_{\Sigma} a_n d\sigma$. В приближённом равенстве перейдём

к пределу, при мелкости разбиения стремящемуся к нулю $\lambda_n \rightarrow 0$:

$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \oiint_{\Sigma_i} a_n d\sigma = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \operatorname{div} \vec{a}(M_i) \Delta V_i$. В правой части получаем предел трёхмерных

интегральных сумм от дивергенции, то есть тройной интеграл от дивергенции векторного поля. Таким образом, получили инвариантную формулу:

$$\oiint_{\Sigma} a_n d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(M_i) dV.$$

Теорема (Остроградского-Гаусса). Если векторное поле $\vec{a}(M)$ определено в замкнутой области Ω и имеет непрерывные частные производные от координат векторного поля, то поток векторного поля через внешнюю сторону гладкой замкнутой поверхности Σ , ограничивающую область Ω , равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по области Ω .

Учитывая выражение для дивергенции векторного поля $\vec{a}(x; y; z) = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$, запишем формулу Остроградского-Гаусса в декартовой системе координат.

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} P(x; y; z) dydz + Q(x; y; z) dx dz + R(x; y; z) dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

ТЕОРЕМА СТОКСА

Теорема Стокса устанавливает связь между поверхностным интегралом второго рода и криволинейным интегралом второго рода по замкнутому контуру.

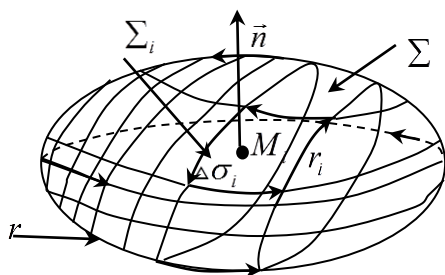
Пусть задано векторное поле $\vec{a}(x; y; z) = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$ в некоторой области пространства.

Теорема (Стокса). Если функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$ векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ непрерывны вместе со своими частными производными, то поверхностный интеграл второго рода по поверхности Σ от проекции $\text{rot}_n \vec{a}(M)$ ротора на нормаль равен циркуляции векторного поля вдоль контура r на который натянута данная поверхность, при соответствующей ориентации поверхности и направлении обхода контура.

$$\iint_{\Sigma} \text{rot}_n \vec{a} d\sigma = \oint_r a_{\tau} dl.$$

Таким образом, циркуляция векторного поля равна поверхностному интегралу второго рода от ротора векторного поля

Доказательство. Разобьём поверхность Σ произвольным образом



системой пересекающихся линий на n элементарных поверхностей. Каждую элементарную поверхность Σ_i ориентируем также как и поверхность Σ , а для элементарного контура r_i сохраним то же направление обхода, что и для контура r . Тогда, по определению, проекция ротора векторного поля в

точке M_i по направлению нормального вектора равна $\text{rot}_{\vec{n}_i} \vec{a}(M) = \lim_{r_i \rightarrow M_i} \frac{\oint_{r_i} a_{\tau} dl}{\Delta \sigma_i}$.

Следовательно, $\oint_{r_i} a_\tau dl \approx \text{rot}_{\vec{n}_i} \vec{a}(M) \cdot \Delta\sigma_i$, где $i = \overline{1; n}$. Просуммируем последнее равенство по всем i :

$$\sum_{i=1}^n \oint_{r_i} a_\tau dl \approx \sum_{i=1}^n \text{rot}_{\vec{n}_i} \vec{a}(M) \cdot \Delta\sigma_i.$$

На основании свойства аддитивности для криволинейного интеграла второго рода получаем, что левая часть приближённого равенства равна криволинейному интегралу по всему контуру r :

$$\sum_{i=1}^n \oint_{r_i} a_\tau dl = \oint_r a_\tau dl.$$

В приближённом равенстве перейдём к пределу, при стремлении к нулю максимального из диаметров элементарных областей:

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \text{rot}_{\vec{n}_i} \vec{a}(M) \cdot \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \oint_{r_i} a_\tau dl.$$

В левой части последнего равенства, по определению, получаем поверхностный интеграл от ротора векторного поля. Таки образом, приходим к доказательству теоремы:

$$\iint_{\Sigma} \text{rot}_n \vec{a} d\sigma = \oint_r a_\tau dl \quad \text{или} \quad \iint_{\Sigma} (\text{rot}_n \vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma = \oint_r a_\tau dl.$$

Запишем формулу Стокса в декартовой системе координат:

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_r P dx + Q dy + R dz.$$

Замечание. Символически формула Стокса может быть записана в виде

$$\oint_r P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Частным случаем формулы Стокса является формула Грина. Пусть задано плоское поле $\vec{a}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y); R(x; y))$. Тогда $dz = 0$, а, следовательно

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_r P dx + Q dy.$$

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Определение. Векторное поле $\vec{a}(M) = (a_x; a_y; a_z)$ называется потенциальным, если его можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции, то есть

$$\vec{a}(M) = \text{grad } \varphi(M),$$

где $\varphi(M)$ – потенциал поля.

Теорема. Если векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным, то криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точки.

Замечание: Если векторное поле является силовым, то физический смысл данной теоремы состоит в том, что работа поля не зависит от формы пути.

Доказательство. По условию теоремы векторное поле является потенциальным, а, следовательно, векторное поле можно представить в

виде $\vec{a}(M) = \text{grad } \varphi(M) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$. Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода

$$\iint_r a_i dl = \int_{(B)}^{(C)} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{(B)}^{(C)} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz}_{\text{полный дифференциал функции } \varphi} = \int_{(B)}^{(C)} d\varphi = \varphi|_{(B)}^{(C)} = \varphi(C) - \varphi(B).$$

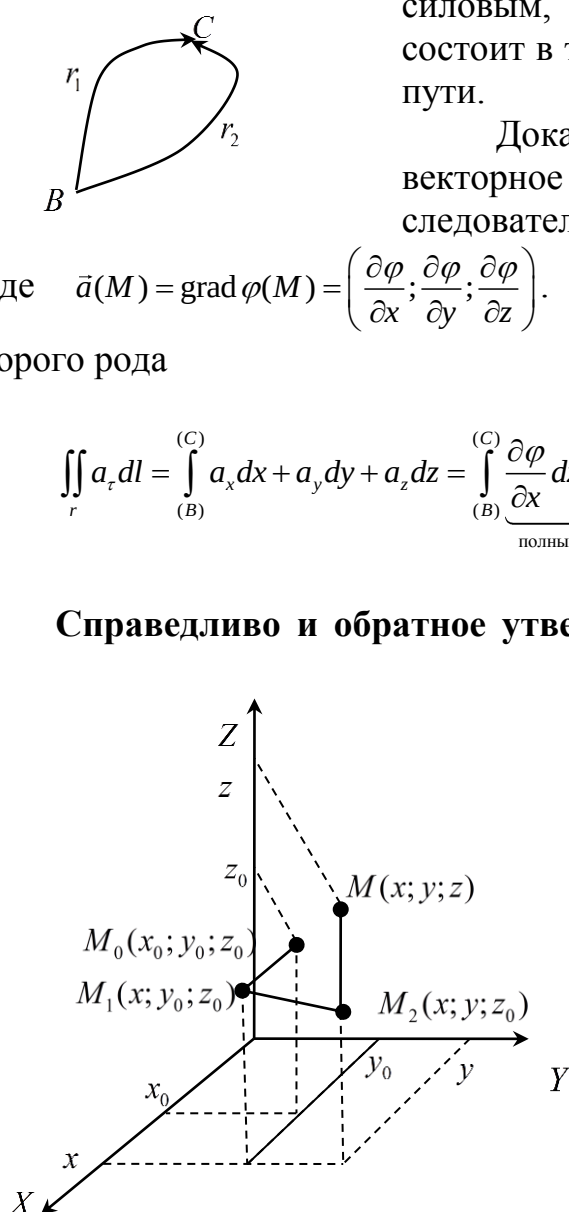
Справедливо и обратное утверждение: если криволинейный интеграл второго рода $\int_r a_i dl$ не зависит от

формы пути r , соединяющей точки начальную точку B и конечную точку C , то векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным.

Найдём по известному потенциалу векторного поля $\vec{a}(M)$ его потенциал.

Так как, функции $a_x(x; y; z)$, $a_y(x; y; z)$, $a_z(x; y; z)$, которые являются координатами

векторного поля $\vec{a}(M)$, непрерывны и имеют непрерывные частные производные во всех точках трёхмерного пространства, то в качестве



начальной точки выбираем произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, в частности можно выбрать начало координат точку $O(0; 0; 0)$, а в качестве конечной точки произвольную точку пространства $M(x; y; z)$. Тогда $\varphi(M) - \varphi(M_0) = \int_r a_x dx + a_y dy + a_z dz$. Следовательно, потенциал векторного поля

$$\varphi(M) = \int_r a_x dx + a_y dy + a_z dz + C = \int_{x_0}^x a_x dx + \int_{y_0}^y a_y dy + \int_{z_0}^z a_z dz + C$$

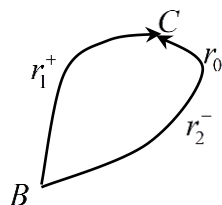
Потенциал векторного поля $\vec{a}(M)$ определяется с точностью до постоянной. Поэтому физический смысл имеет не потенциал векторного поля, а разность потенциалов, для того чтобы учитывалась постоянная $\varphi(M_0)$.

Теорема (необходимое и достаточное условия независимости криволинейного интеграла второго рода от формы пути интегрирования).

Для того, чтобы криволинейный интеграл второго рода $\int_r a_r dl$ не зависел от формы пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру был бы равен нулю.

Доказательство. Предположим, что задано векторное пространство $\vec{a}(M)$. В заданном векторном пространстве произвольным образом выбираем точки B и C .

Необходимость. Если криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы пути интегрирования, то по любому замкнутому контуру он равен нулю.



Действительно, выбираем любой замкнутый контур r_0 и разбиваем его на два контура с выбором противоположных направлений r_1^+ и r_2^- .

Тогда, так как по условию криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы пути интегрирования, то $\int_{r_1^+} a_r dl = \int_{r_2^-} a_r dl$. Следовательно,

$$\int_{r_1^+} a_r dl - \int_{r_2^-} a_r dl = 0. \text{ Тогда } \int_{r_1^+} a_r dl + \int_{r_2^+} a_r dl = 0, \text{ или } \int_{r_1^+ \cup r_2^+} a_r dl = 0, \text{ то есть интеграл } \int_{r_0} a_r dl = 0$$

. Таким образом, криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру равен нулю, если он не зависит от пути интегрирования.

Достаточность. Предположим, что криволинейный интеграл второго рода по произвольному замкнутому контуру r_0 равен нулю, то есть $\int_{r_0} a_r dl$. Разобьём

контур r_0 на два контура. Тогда $\int_{r_1^+} a_r dl + \int_{r_2^+} a_r dl = 0$. Следовательно, $\int_{r_1^+} a_r dl = \int_{r_2^-} a_r dl$.

Но тогда криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования и теорема доказана.

Теорема. Для того чтобы векторное поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы векторное поле по любому замкнутому контуру равнялось нулю.

Так как, поверхностный интеграл второго рода вектор - функции $\vec{a}(M)$, равен циркуляции этого векторного поля, то приходим к теореме.

Теорема. Для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ являлось потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы ротор заданного векторного поля был бы равен нулю, то есть $(\text{rot}(\vec{a}(M))) = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным полем, то есть его можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции $\vec{a}(M) = \text{grad } \varphi(M) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$. Найдём ротор векторного поля

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

Достаточность. Предположим, что ротор векторного поля $\vec{a}(M)$ равен нулю. Выбираем произвольный замкнутый контур r на поверхности Σ . Вычислим криволинейный интеграл второго рода, используя теорему Стокса:

$$\oint_r \vec{a}_\tau dl = \iint_{\Sigma} \text{rot}_{\vec{n}} \vec{a} d\sigma = \iint_{\Sigma} 0 d\sigma = 0.$$

Теорема доказана.

Укажем аналитические условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

1 Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода в трёхмерном пространстве: $\oint_r P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz$, который можно рассматривать как криволинейный интеграл от вектор-функции $\vec{a}(P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$. Тогда на основании предыдущей теоремы, данный интеграл не зависит от формы пути интегрирования, если $\text{rot}(\vec{a}(M)) = 0$, то есть

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x; y; z) & Q(x; y; z) & R(x; y; z) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0},$$

что равносильно условиям

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

при этом все частные производные должны быть непрерывны.

2 Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода на плоскости: $\oint_r P(x; y)dx + Q(x; y)dy$, который можно рассматривать как криволинейный интеграл от вектор – функции $\vec{a}(P(x; y); Q(x; y))$. Тогда на основании предыдущей теоремы, данный интеграл не зависит от формы пути интегрирования, если $\text{rot}(\vec{a}(M)) = 0$, что равносильно условию $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, при этом все частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ должны быть непрерывны.

Скалярные равенства $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в пространстве R^3 и равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в пространстве R^2 являются дифференциальными уравнениями для определения потенциала $\varphi = \varphi(x; y; z)$ или $\varphi = \varphi(x; y)$, соответственно. При выполнении указанных условий криволинейный интеграл не зависит от пути соединяющую начальную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и конечную точку $M(x; y; z)$, а, следовательно, для потенциального поля $\vec{a}(P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$ справедлива формула для нахождения потенциала поля:

$$\varphi(x; y; z) = \int_{M_0 M} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz + C, \text{ где } C = \text{Const}.$$

Из полученной формулы следует формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода, который независим от пути интегрирования:

$$\int_{M_0 M} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz = \varphi(M) - \varphi(M_0),$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – некоторая фиксированная точка пространства V^3 , $M(x; y; z)$ – произвольная точка этого пространства.

Потенциал поля определяется неоднозначно, с точностью до произвольной постоянной. Если φ – потенциал векторного поля, то $\vec{a} = \text{grad } \varphi = \text{grad}(\varphi + C)$, где C – произвольная постоянная, то есть $\varphi + C$ также является потенциалом векторного поля.

СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется соленоидальным в некоторой односвязанной области Ω , если в каждой точке этого поля плотность источника равна нулю, то есть дивергенция векторного поля равна нулю.

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0.$$

Примером соленоидального поля является магнитное поле, так как согласно четвёртого уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

Рассмотрим свойства соленоидальных полей.

1 Если векторное поле $\vec{a}(M)$ является соленоидальным в некоторой односвязанной области Ω , то поток векторного поля через любую замкнутую поверхность, целиком расположенную в области Ω , равен нулю.

Действительно, на основании теоремы Остроградского – Гаусса, получаем

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} a_n d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dV = \iiint_{\Omega} 0 dV = 0.$$

2 Если векторное поле $\vec{a}(M)$ является соленоидальным в некоторой односвязанной области Ω , то поток поля через поверхность Σ натянутую на контур r не зависит от формы поверхности.

Предположим, что $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. На основании первого свойства

$$\Pi = \oiint_{\Sigma_{\text{замкн}}} a_n d\sigma = 0.$$

По свойству аддитивности для поверхностного интеграла второго рода, получаем, что

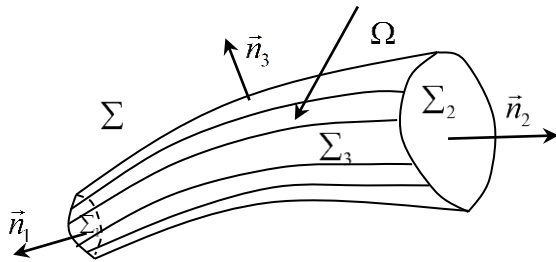
$$\oiint_{\Sigma_1^{\text{внешняя}}} a_n d\sigma + \oiint_{\Sigma_2^{\text{внешняя}}} a_n d\sigma = 0.$$

Откуда,

$$\oiint_{\Sigma_1^{\text{внешняя}}} a_n d\sigma = - \oiint_{\Sigma_2^{\text{внешняя}}} a_n d\sigma = \oiint_{\Sigma_2^{\text{внутренняя}}} a_n d\sigma.$$

3 (принцип сохранения интенсивности векторной трубки) Векторной трубкой называется поверхность, состоящая из векторных линий. Интенсивностью векторной трубки называется поток через любое сечение векторной трубки.

4 В соленоидальном поле потоки векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой.



Рассмотрим два сечения Σ_1 и Σ_2 векторной трубки, которые вместе с боковой поверхностью Σ_3 образуют замкнутую поверхность Σ . Тогда, в следствии соленоидальности векторного поля $\vec{a}(M)$, получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} (\vec{a} \cdot \vec{n}_1^0) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (\vec{a} \cdot \vec{n}_2^0) d\sigma + \iint_{\Sigma_3} (\vec{a} \cdot \vec{n}_3^0) d\sigma = \\ = \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(M) dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Так как, нормаль к боковой поверхности Σ_3 перпендикулярна векторному полю $\vec{a}(M)$, направленному по касательной к векторной трубке, то скалярное произведение векторного поля на нормальный вектор векторного поля, равен нулю ($\vec{a} \cdot \vec{n}_3^0 = 0$). Следовательно, если изменить направление одной из поверхностей Σ_1 или Σ_2 на противоположное направление, получаем справедливое равенство $\iint_{\Sigma_1^{\text{внешняя}}} (\vec{a} \cdot \vec{n}_1^0) d\sigma = \iint_{\Sigma_2^{\text{внутренняя}}} (\vec{a} \cdot \vec{n}_2^0) d\sigma$. Таким образом, поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через любое сечение векторной трубки имеет одно и тоже значение.

Физическая интерпретация. В случае течения несжимаемой жидкости в некоторой области Ω , где отсутствуют стоки, количество жидкости протекающей через поперечное сечение векторной трубки, одна и та же.

5 Если векторное поле $\vec{a}(M)$ является соленоидальным и является непрерывным в односвязанной области Ω , то внутри области Ω векторные линии этого поля не могут начинаться и заканчиваться (они будут либо замкнутыми, либо уходят на бесконечность, либо начинаются и заканчиваются на границе области).

Определение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется гармоническим в некоторой односвязанной области Ω , если в каждой точке этого поля оно является одновременно потенциальным и соленоидальным, то есть $\operatorname{rot}(\vec{a}(M)) = 0$ и $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$.