

# 1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

**1.1 Содержание:** определение числового ряда, частичная сумма ряда, сходимость ряда, необходимый и достаточный признаки сходимости ряда, свойства сходящихся рядов, необходимое и достаточное условия сходимости рядов с положительными членами, достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши).

## 1.2 Примеры решения типовых задач

**1.2.1** Написать первые четыре члена ряда, общий член которого задан формулой  $a_n = (-1)^{n-1} n^2$ .

Решение. Полагая в данной формуле  $n = 1, 2, 3, 4$ , находим первые четыре члена числового ряда:  $a_1 = (-1)^{1-1} 1^2 = 1$ ,  $a_2 = (-1)^{2-1} 2^2 = -4$ ,  $a_3 = (-1)^{3-1} 3^2 = 9$ ,  $a_4 = (-1)^{4-1} 4^2 = -16$ . Таким образом, данный числовой ряд можно записать в виде 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^2 = 1 - 4 + 9 - 16 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 + \dots$$

**1.2.2** Найти общий член ряда  $2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{2}{81} + \frac{4}{243} + \dots$ , считая, что последующие члены подчиняются тому же закону, по которому образованы первые члены ряда.

Решение. Каждый член ряда представляет собой дробь, числитель которой равен двойке для членов с нечётными номерами и четырём для членов с чётными номерами, а знаменатель – соответствующей степени числа три. Следовательно, числитель можно представить формулой  $3 + (-1)^n$ , а знаменатель – формулой  $3^{n-1}$ , поэтому формула  $n$ -го члена ряда имеет вид:  $a_n = \frac{3 + (-1)^n}{3^{n-1}}$ .

**1.2.3** Найти сумму ряда  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$

Решение. Составим  $n$ -ю частичную сумму данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Чтобы упростить выражение для частичной суммы  $S_n$ , преобразуем формулу для общего члена ряда, разлагая  $a_n$  на элементарные дроби. Положим

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1},$$

отсюда

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{(2A+2B)n + (A-B)}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $n$  в числителях обеих частей равенства, получаем:  $2A + 2B = 0$ ,  $A - B = 1$ , откуда  $A = 1/2$ ,  $B = -1/2$ .

Поэтому  $n$ -й член ряда имеет вид

$$a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Запишем  $n$ -ю частичную сумму данного ряда и преобразуем её:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Поскольку  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ , то данный ряд сходится и его сумма равна  $S = 1/2$ .

**1.2.4** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n-7}$ .

Решение. Воспользуемся достаточным признаком расходимости ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n-7} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+5/n}{3-7/n} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Согласно теореме 1.1.2 ряд расходится.

**1.2.5** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$ .

Решение. Воспользуемся признаком сравнения. Так как, для геометрического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$  значение  $q = \frac{1}{5} < 1$ , то он сходится. Для установления сходимости ряда используем неравенство  $a_n = \frac{1}{n \cdot 5^n} \leq \frac{1}{5^n} = b_n$ . Согласно признаку сравнения (теорема 1.1.4) исходный ряд сходится.

**1.2.6** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^3+2n^2-4}$ .

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения, сравнив исходный ряд с расходящимся гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2-1}{3n^3+2n^2-4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-n}{3n^3+2n^2-4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + 2\frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}} = \frac{2}{3} \quad \left( \begin{array}{l} \neq 0; \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

На основании предельного признака сравнения (теорема 1.1.5) ряды сходятся и расходятся одновременно, следовательно, исходный ряд расходится.

**1.2.7** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{n^6 + 3n^4 - 2}$ .

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения, сравнив исходный ряд с обобщённо гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  ( $p = 4 > 1$ ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^2 - n + 5}{n^6 + 3n^4 - 2}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^6 - n^5 + 5n^4}{n^6 + 3n^4 - 2} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^6}} = 4 \quad \left( \begin{array}{l} \neq 0; \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

На основании предельного признака сравнения (теорема 1.1.5) ряды сходятся и расходятся одновременно, следовательно, исходный ряд сходится.

**1.2.8** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n+1)}$ .

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{3^{n+1}(2n+3)}}{\frac{5^n}{3^n(2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot 3^n \cdot (2n+1)}{5^n \cdot 3^{n+1} \cdot (2n+3)} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{3} > 1.$$

На основании признака Даламбера (теорема 1.1.6) ряд расходится.

**1.2.9** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n!}$ .

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n+5}{(n+1)!}}{\frac{3n+2}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (3n+5)}{(n+1)! \cdot (3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{3n^2 + 5n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} = 0 < 1.$$

На основании признака Даламбера (теорема 1.1.6) ряд сходится.

**1.2.10** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{\sqrt{3n+5}}{2n+12}$ .

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 1.1.7).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\arccos^n \frac{\sqrt{3n+5}}{2n+12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{\sqrt{3n+5}}{2n+12} = \\ &= \left( \arccos \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{\sqrt{3} + 5/n}{2 + 12/n} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} < 1. \end{aligned}$$

На основании радикального признака Коши ряд сходится.

**1.2.11** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{3n+5}{3n+1} \right)^{3n^2/4}$ .

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 1.1.7).

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{3n^2/4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{3n/4} = (1^\infty) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n+5}{3n+1} - 1\right)^{3n/4} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n+5-3n-1}{3n+1}\right)^{3n/4} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3n+1}\right)^{3n/4} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{(3n+1)/4}\right)^{\frac{3n+1}{4}}\right)^{\frac{4}{3n+1} \cdot \frac{3n}{4}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3n+1}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3+1/n}} = \frac{1}{2} \cdot e > 1.
\end{aligned}$$

На основании радикального признака Коши ряд расходится.

**1.2.12** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .

Решение. Для доказательства воспользуемся необходимым признаком сходимости ряда (теорема 1.1.1). Рассмотрим числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ , у которого

$n$ -й член равен  $a_n = \frac{2^n}{n!}$ . Исследуем числовой ряд на сходимость, воспользовавшись признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^n} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 2 \cdot 0 = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера (теорема 1.1.6) ряд сходится. На основании необходимого признака сходимости ряда: если ряд сходится, то предел  $n$ -го члена равен нулю, то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .

### 1.3 Задания для решения на практическом занятии

**1.3.1.** Написать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

$$\text{1.3.1.1 } a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^n. \quad \text{1.3.1.2 } a_n = \frac{2^n}{n!}. \quad \text{1.3.1.3 } a_n = \sin \frac{\pi(n-1)}{4}.$$

**1.3.2.** Найти общий член ряда, считая, что последующие члены подчиняются тому же закону, по которому образованы первые члены ряда.

$$\text{1.3.2.1 } \frac{1}{2} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{5}{6 \cdot 25} + \frac{7}{8 \cdot 125} + \frac{9}{10 \cdot 625} + \dots$$

$$\text{1.3.2.2 } \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \frac{9}{16 \cdot 25} + \frac{11}{25 \cdot 36} + \dots$$

$$\text{1.3.2.3 } 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{6} + \frac{5}{24} + \frac{6}{120} + \frac{7}{720} + \frac{8}{5040} + \dots$$

**1.3.3.** Найти сумму ряда, считая, что последующие его члены образованы по усматриваемому правилу:

$$1.3.3.1 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

$$1.3.3.2 \quad \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{1}{8 \cdot 11 \cdot 14} + \frac{1}{11 \cdot 14 \cdot 17} + \frac{1}{14 \cdot 17 \cdot 20} + \dots$$

$$1.3.3.3 \quad \frac{3+4-6}{12} + \frac{9+16-36}{144} + \frac{27+64-216}{1728} + \frac{81+256-1296}{20736} + \dots$$

**1.3.4.** Используя достаточный признак расходимости числового ряда, доказать, что каждый из следующих рядов является расходящимся:

$$1.3.4.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 5n - 3}{2n^2 - 3n + 4}.$$

$$1.3.4.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{5n}.$$

$$1.3.4.3 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1-1/n)^n}.$$

**1.3.5.** Используя достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, исследовать на сходимость указанные ряды:

$$1.3.5.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot 3^n}.$$

$$1.3.5.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{1+4^{2n}}.$$

$$1.3.5.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+5)}.$$

$$1.3.5.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 2n}{3n^4 - 7}.$$

$$1.3.5.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n} + 7}{5\sqrt[6]{n^{13}} + 3}.$$

$$1.3.5.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[6]{n^5}}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}.$$

$$1.3.5.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2n+3)}{4^n(7n+8)}.$$

$$1.3.5.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^n}.$$

$$1.3.5.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n!}.$$

$$1.3.5.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{2n+1}{4n+1}.$$

$$1.3.5.11 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{n+7}{n+4} \right)^{5n^2+n}.$$

$$1.3.5.12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \sin^n \frac{1}{3n}.$$

$$1.3.6. \text{ Доказать, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arctg \frac{2n^3 + 7n^2 + 2n + 6}{2n^3 + 4n^2 - 5n + 1} \right)^n = 0.$$

## 1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

**1.4.1** Доказать сходимость числового ряда и найти его сумму.

$$1.4.1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)}.$$

$$1.4.1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n - 4^n}{12^n}.$$

$$1.4.1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+5)}.$$

$$1.4.1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2) \cdot (2n+4)}.$$

$$1.4.1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 4^n + 5^n}{60^n}.$$

$$1.4.1.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+3)}.$$

$$1.4.1.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \cdot (3n+5)}.$$

$$1.4.1.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n - 6^n}{60^n}.$$

$$1.4.1.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+5)}.$$

$$1.4.1.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5) \cdot (2n+7)}.$$

$$1.4.1.11 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 6^n + 7^n}{210^n}.$$

$$1.4.1.12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot (n+6)}.$$

$$1.4.1.13 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1) \cdot (3n+4)}.$$

$$1.4.1.14 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 7^n - 8^n}{168^n}.$$

$$1.4.1.15 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+7)}.$$

$$\begin{array}{lll}
1.4.1.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+7) \cdot (2n+9)} & 1.4.1.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n - 4^n}{20^n} & 1.4.1.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \cdot (n+8)} \\
1.4.1.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)} & 1.4.1.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{6^n} & 1.4.1.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6) \cdot (n+9)} \\
1.4.1.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+3)} & 1.4.1.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 3^n - 2^n}{30^n} & 1.4.1.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+3)} \\
1.4.1.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2) \cdot (5n+3)} & 1.4.1.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n - 8^n}{12^n} & 1.4.1.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+4)} \\
1.4.1.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n-1) \cdot (6n+5)} & 1.4.1.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n + 4^n - 2^n}{24^n} & 1.4.1.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot (n+5)}
\end{array}$$

**1.4.2** Используя достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, исследовать на сходимость указанные ряды.

$$\begin{array}{lll}
1.4.2.1 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 5}{2n^4 - n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n(3n+2)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left( \frac{3n^2 + 3}{3n^2 - 1} \right)^{2n^3 - 5n} \\
1.4.2.2 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{7^n n!}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{\sqrt{3} n^4 + 2n + 2}{2n^4 - n^3 + 7} \\
1.4.2.3 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + n}{5n^4 - 2}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^n(4n+1)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2} \right)^n \sin^n \frac{5}{n} \\
1.4.2.4 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{2^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n(n+1)!}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3} \right)^{2n} \left( 1 - \cos \frac{2}{5n} \right)^n \\
1.4.2.5 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt[3]{n^4 - n}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{6^{2n-1}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{2n+5}{2n-3} \right)^{3n^2 + 2n} \\
1.4.2.6 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)4^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{7^n(6n+5)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n^3 - 5n^2 + 2n + 1}{7n^3 + 4n^2 + 3n - 2} \right)^{n+2} \\
1.4.2.7 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^5 + 2}{2n^8 - n^6}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(4n-3)}{3^n(2n-1)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{\sqrt{3} n^2 - 3n}{n^2 + 2n + 1} \\
1.4.2.8 & \text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{1}{n+1}; & \text{в) } \log_2^n \left( \frac{16n^2 + 3n - 1}{4n^2 + 7n + 2} \right) \\
1.4.2.9 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)6^n}{5^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-2}{5^{5n+2}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccctg}^n \frac{\sqrt{3} n^3 - 5n}{n^3 - 3n + 2} \\
1.4.2.10 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt[7]{n^6} + 4}{3n^2 - 2}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(n^2 + 1)}{9^n(3n^2 + 1)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{4n^3 + 7}{4n^3 - 5} \right)^{3n^3 - 3n^2} \\
1.4.2.11 & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 4}{3n^5 - 2n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{n+2}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{3n^4 + 2n + 5}{6n^4 - 6n^3 + 12}
\end{array}$$

|          |                                                             |                                                                                                         |                                                                                                 |
|----------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.4.2.12 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)4^n};$              | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n+2}}{4^n(n+2)!};$                                                 | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{n^3+3n^2+2}{2n^3-n^2+11}.$                              |
| 1.4.2.13 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+n^2}{6n^5-3};$           | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{9^n(2n+3)};$                                                         | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3}\right)^n \sin^n \frac{6}{n+1}.$                     |
| 1.4.2.14 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{3^n};$              | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^{n+3}}{5^n(n+3)!};$                                                 | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4}\right)^{2n} \left(1 - \cos \frac{6}{n+1}\right)^n.$ |
| 1.4.2.15 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt[3]{n^7}+n};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{3n}(7n+2)};$                                                        | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{5n+1}{5n+3}\right)^{-2n^2+3n}.$               |
| 1.4.2.16 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)5^n};$              | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n};$     | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3+2n^2-2n-1}{2n^3+5n^2+6n-3}\right)^{2n+3}.$             |
| 1.4.2.17 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^6+3}{3n^9-n^7};$           | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \operatorname{tg} \frac{1}{n};$                                 | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{n^2+2n+5}{\sqrt{3}n^2+2n+1}.$              |
| 1.4.2.18 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)};$                | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n(2n-1)}{3^n(3n+2)};$                                                   | B) $\log_3^n \left(\frac{\sqrt{3}n^2+n-5}{n^2+7n+2}\right).$                                    |
| 1.4.2.19 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)7^n}{6^n};$              | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{7^n(3n-2)};$                                                      | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}^n \frac{n^4+2n^2+5}{\sqrt{3}n^4-7n+1}.$           |
| 1.4.2.20 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sqrt[8]{n^7}+5}{4n^2-2};$   | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(n^2+2)};$                                                        | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \left(\frac{6n^3-2}{6n^3+2}\right)^{4n^4+3n}.$            |
| 1.4.2.21 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+6}{4n^6-n};$              | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n} \operatorname{tg} \frac{1}{2n+1};$                              | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{\sqrt{3}n^3+2n^2}{2n^3-4n^2+13}.$                       |
| 1.4.2.22 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)5^n};$              | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)^{n+4}}{8^n(n+4)!};$                                                 | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{n^4+n^3+n}{n^4-n^2+8}.$                                 |
| 1.4.2.23 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^4-n}{3n^8+2};$             | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n^2+2)}{4^n(n^2+8)};$                                                 | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{5}\right)^n \sin^n \frac{8}{n+2}.$                     |
| 1.4.2.24 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)8^n}{3^n};$              | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)};$      | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{8}\right)^{2n} \left(1 - \cos \frac{4}{n+3}\right)^n.$ |
| 1.4.2.25 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt[4]{n^5}+1};$ | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \sin \frac{1}{n^2};$                                              | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \left(\frac{7n-6}{7n+2}\right)^{5n^2-4n}.$                |
| 1.4.2.26 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+5)9^n};$              | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (5n-3)}{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)};$ | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^3+n^2-9n-10}{6n^3+5n^2+4n+3}\right)^{2n+5}.$             |
| 1.4.2.27 | a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2+5}{5n^5-n^4};$           | б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n^3+1)}{5^n(n^3+6)};$                                                 | B) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{n^2+2n+3}{n^2-2n-3}.$                      |

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{1.4.2.28} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}; & \text{в) } \log_4^n \left( \frac{64n^2 + n + 5}{2n^2 + 3n - 2} \right). \\
\mathbf{1.4.2.29} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)8^n}{7^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccctg}^n \frac{n^5 + 2n^4 + 5}{n^5 - 7n^3 + 2}. \\
\mathbf{1.4.2.30} & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\sqrt[8]{n^7} + 8}{4n^2 - 3}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2 + 1)}{n^2 + 3n + 1}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccos}^n \frac{\sqrt{2}n^3 - n^2 + n}{2n^3 + n^2 + 12}.
\end{array}$$

## 2 ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

**2.1 Содержание:** интегральный признак Коши рядов с положительными членами, знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, знакочередующиеся ряды, признак Лейбница и следствие из него.

### 2.2 Примеры решения типовых задач

**2.2.1** С помощью интегрального признака Коши доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Решение. Общий член ряда определяется формулой  $a_n = f(n) = \frac{1}{1+n^2}$ .

Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака Коши (теорема 2.1.2): она принимает положительные значения и монотонно убывает на промежутке  $[1; +\infty)$ . Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится исходный ряд.

**2.2.2** С помощью интегрального признака Коши исследовать, сходится или расходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2}$ .

Решение. Функция  $f(x) = \frac{x+3}{x^2}$  удовлетворяет условиям интегрального признака Коши (теорема 2.1.2). Поскольку

$$\int_1^{\infty} \frac{x+3}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \left( \ln|x| - \frac{3}{x} \right) \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln|x| - \frac{3}{x} \right) - 0 + 3 = \infty,$$

то несобственный интеграл расходится, то есть будет расходиться и заданный ряд.

**2.2.3** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ .

Решение. Общий член ряда определяется формулой  $a_n = f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n}$ , где  $n \geq 2$ . Обратим внимание на то, что суммирование начинается со значения  $n=2$  (если  $n=1$ , то соответствующий член не определён, так как в знаменателе содержится множитель  $\ln 1=0$ ). Из формулы для общего члена ряда находим функцию  $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$ , которая удовлетворяет условиям интегрального признака Коши на промежутке  $[2; +\infty)$ . Вычислим интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2} = 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, а, следовательно, сходится и ряд.

**2.2.4** Исследовать на сходимость знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ .

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}. \text{ Так как } |\cos n| \leq 1, \text{ то каждый член последнего ряда не превышает}$$

соответствующего члена, сходящегося обобщённо гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Согласно признаку сравнения (теорема 1.1.4), ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$  сходится. Поэтому сходится и данный ряд, причём абсолютно (теорема 2.1.2).

**2.2.5** Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ .

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}. \text{ Полученный геометрический ряд сходится (пример 1.1.3 и } q = \frac{1}{2} < 1).$$

Следовательно, сходится и исходный ряд, причём абсолютно (теорема 2.1.2).

**2.2.6** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{3n+5}$ .

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n+5}. \text{ Так как } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2/n}{3+5/n} = \frac{1}{3} \neq 0, \text{ то, согласно}$$

необходимому признаку сходимости (теорема 1.1.1), ряд расходится. Рассмотрим исходный ряд. Предел его  $n$ -го члена равен  $1/3$ , если значения числа  $n$  является нечётным. Если число  $n$  - чётное, то предел его  $n$ -го члена равен  $(-1/3)$ . Следовательно, предела  $n$ -го члена не существует, в виду свойства единственности предела числовой последовательности. На основании необходимого признака сходимости числовых рядов (теорема 1.1.1), заданный числовой ряд расходится.

**2.2.7** Исследовать на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ .

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}. \text{ Воспользуемся признаком Даламбера.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, по теореме Даламбера, ряд, составленный из абсолютных величин, является сходящимся. Согласно теореме 2.1.2, исходный ряд сходится абсолютно.

**2.2.8** Исследовать на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ .

Решение. Поскольку ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то есть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ , расходится, то о сходимости исходного ряда пока ничего нельзя сказать (пример 1.1.2). Применим к данному ряду признак Лейбница. Условия признака Лейбница в данном случае выполнены:

$$1 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из абсолютных величин расходится, то исходный ряд сходится условно.

**2.2.9** Вычислить сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$  с точностью  $\varepsilon = 0,001$ .

Решение. Данный знакочередующийся ряд является абсолютно сходящимся (пример 2.2.7). На основании следствия из признака Лейбница, величина отброшенного при вычислении остатка ряда не превосходит первого отброшенного члена. Необходимое число членов  $n$  находим путём подбора из неравенства  $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq 0,001$ . При значении  $n=8$  последнее неравенство справедливо. Следовательно, если отбросить в исходном ряде все члены, начиная с восьмого, то требуемая точность будет достигнута. Таким образом,

$$S \approx S_7 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} = 0,406.$$

## 2.3 Задания для решения на практическом занятии

**2.3.1** С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость ряд.

$$\text{2.3.1.1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \ln^3(3n+2)}. \quad \text{2.3.1.2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}. \quad \text{2.3.1.3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}.$$

**2.3.2** Исследовать на сходимость знакопеременные ряды.

$$\begin{array}{lll} \text{2.3.2.1} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+(-2)^{2n}}. & \text{2.3.2.2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3}. \quad \text{2.3.2.3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+4}. \\ \text{2.3.2.4} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+7) \cdot \ln(2n+7)}. & \text{2.3.2.5} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}. \quad \text{2.3.2.6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}. \end{array}$$

$$2.3.2.7 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}. \quad 2.3.2.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+3}}. \quad 2.3.2.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln^5 n}.$$

2.3.3 Вычислить сумму указанного ряда с точностью  $\varepsilon = 0,001$ .

$$2.3.3.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}. \quad 2.3.3.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}. \quad 2.3.3.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

## 2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Исследовать на сходимость указанные ряды. В пункте а) необходимо

исследовать ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ , используя интегральный признак Коши, а в пункте б)

указать характер сходимости знакопеременующегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (условная или абсолютная сходимость), если ряд сходится.

$$2.4.1.1 \text{ а) } a_n = \frac{n}{n^2 + 2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5n}. \quad 2.4.1.2 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

$$2.4.1.3 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln \sqrt{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}. \quad 2.4.1.4 \text{ а) } a_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}.$$

$$2.4.1.5 \text{ а) } a_n = \frac{n}{e^{-n^2}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{5n+4}. \quad 2.4.1.6 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{7^n}.$$

$$2.4.1.7 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2} \cos \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 + 9}. \quad 2.4.1.8 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

$$2.4.1.9 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2 + 1}. \quad 2.4.1.10 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2 + 9}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^n}.$$

$$2.4.1.11 \text{ а) } a_n = \frac{n+5}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}. \quad 2.4.1.12 \text{ а) } a_n = \frac{1}{(n+1)^5}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n}.$$

$$2.4.1.13 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln \sqrt[3]{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+2)}. \quad 2.4.1.14 \text{ а) } a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}.$$

$$2.4.1.15 \text{ а) } a_n = \frac{3n}{n^2 + 5}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{6^n}. \quad 2.4.1.16 \text{ а) } a_n = \frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n^2}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{2n+3}.$$

$$2.4.1.17 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \sin \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n^6}}. \quad 2.4.1.18 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \cos \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3n^3 + 8}.$$

$$2.4.1.19 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)^n}. \quad 2.4.1.20 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \operatorname{ctg} \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n^3}{4n^3 + 8}.$$

$$2.4.1.21 \text{ а) } a_n = \frac{1}{(n+3)^7}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{10n}. \quad 2.4.1.22 \text{ а) } a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{2n+5}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[9]{n^2}}.$$

$$2.4.1.23 \text{ а) } a_n = \frac{n^4}{n^5 + 32}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)!}. \quad 2.4.1.24 \text{ а) } a_n = \frac{n^2}{e^{-n^3}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+3)}.$$

$$\mathbf{2.4.1.25} \text{ a) } a_n = \frac{1}{n^9} \operatorname{tg} \frac{1}{n^8}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{7n+8}. \quad \mathbf{2.4.1.26} \text{ a) } a_n = \frac{1}{n^5} \sin \frac{1}{n^4}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{9^n}.$$

$$\mathbf{2.4.1.27} \text{ a) } a_n = \frac{1}{n^4} \operatorname{ctg} \frac{1}{n^3}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5n^4+3}. \quad \mathbf{2.4.1.28} \text{ a) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln \sqrt[6]{n}} \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[9]{n^{10}}}.$$

$$\mathbf{2.4.1.29} \text{ a) } a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{5n+9}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} n^5}{5n^5+7}. \quad \mathbf{2.4.1.30} \text{ a) } a_n = \frac{1}{n^7} \cos \frac{1}{n^6}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(8n-3)^n}.$$