

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, где $a_n = f(n)$ – функция натуральных чисел.

Определение 1.1.1 Бесконечным числовым рядом называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, где $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ некоторые действительные или комплексные числа, которые называются членами ряда, а $a_n = f(n)$ – общим или n -м членом ряда.

Ряд считается вполне определённым, если задан общий член ряда.

Числовой ряд часто записывают в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Например, гармонический ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, а геометрический ряд может быть записан в виде $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} + \dots$, где b и q – числа отличные от нуля.

Определение 1.1.2 Сумма конечного числа первых членов ряда называется *частичной суммой* ряда.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ – n частичная сумма ряда.

Частичные суммы ряда представляют числовую последовательность.

Определение 1.1.3 Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует предел последовательности частичных сумм ряда, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, при этом число S называется суммой ряда. Если указанный предел не существует или, в частности, равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся*.

Пример 1.1.1 Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится.

Пример 1.1.2 Обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – расходится, если $\alpha \leq 1$, и сходится, если $\alpha > 1$. Сумма обобщённого гармонического ряда порядка α равна значению дзета-функции Римана $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Для чётных чисел α значение выражается через число π , например $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, а для $\alpha = 3$ его значение аналитически неизвестно.

Пример 1.1.3 Геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ – расходится, если $|q| \geq 1$, и сходится, если $|q| < 1$, а его сумма равна $S = \frac{b}{1-q}$.

Теорема 1.1.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел n -го члена равен нулю, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Этот признак является необходимым, но не достаточным, так, например, гармонический ряд расходится, но предел n -го члена равен нулю.

Теорема 1.1.2 (достаточный признак расходимости ряда). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Сформулируем основные свойства числовых рядов:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна числу S , то будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, причём сумма последнего ряда равна αS ;

2) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S и σ , соответственно, то будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, причём сумма последнего ряда равна $S \pm \sigma$;

3) сходимость или расходимость числового ряда не изменится, если в нём приписать или отбросить конечное число слагаемых.

Рассмотрим ряды с положительными членами.

Теорема 1.1.3 Для того, чтобы числовой ряд с положительными членами сходилсся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Перечислим основные достаточные признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Теорема 1.1.4 (признак сравнения). Пусть дан ряд $(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряд $(2) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причём для каждого члена рядов выполняется неравенство $0 < a_n \leq b_n$. Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Признак остаётся в силе, если соответствующее неравенство выполняется не с первых членов ряда, а лишь начиная с некоторого члена N .

Теорема 1.1.5 (предельный признак сравнения). Пусть дан ряд $(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряд $(2) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ($c \neq 0, c \neq \infty$). Тогда ряды сходятся и расходятся одновременно. Если $c = 0$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Если $c \rightarrow \infty$, то из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

Теорема 1.1.6 (предельный признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда

- 1) если $l < 1$, ряд сходится;
- 2) если $l > 1$, ряд расходится;
- 3) если $l = 1$, сомнительный случай, требуются дополнительные исследования.

Теорема 1.1.7 (предельный радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда

- 1) если $l < 1$, ряд сходится;
- 2) если $l > 1$, ряд расходится;
- 3) если $l = 1$, сомнительный случай, требуются дополнительные исследования.

Экономические приложения числовых рядов: формула наращенной суммы по дискретно изменяющимся процентным ставкам (нормам). Если P – первоначальная сумма, r_j ($j = \overline{1, k}$) – j -я ставка, действующая t_j времени, то итоговая сумма равна:

$$S = P(1 + r_1 t_1 + r_2 t_2 + \dots + r_k t_k) = P(1 + \sum_{j=1}^k r_j t_j).$$

Множитель наращения в этом случае равен: $\mu = 1 + \sum_{j=1}^k r_j t_j$.

Теорема 1.1.8 (интегральный признак Коши). Если функция $f(x)$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая на интервале $[1; +\infty)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, является ли несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходящимся или расходящимся.

Признак остаётся в силе, если соответствующие условия для функции начинают выполняться не со значения равного 1, а с некоторого значения $x > 1$.

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Определение 1.1.4 Числовой ряд называется *знакопеременным*, если он содержит положительные и отрицательные члены.

Пусть задан знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (1), где a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$) могут принимать как отрицательные, так и положительные значения. Рассмотрим ряд (2), составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, то есть ряд вида $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$.

Возможны три случая:

- 1) ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится;
- 2) ряд (1) сходится и ряд (2) сходится;
- 3) ряд (1) расходится и ряд (2) расходится.

Теорема 1.1.9 Если ряд составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда сходится, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Определение 1.1.5 Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, расходится, а знакопеременный ряд сходится, то знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*.

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд.

Определение 1.1.6 Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если произведение двух его соседних членов величина отрицательная.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots,$$

где все a_i ($i = \overline{1; \infty}$) либо положительные, либо отрицательные числа. Для определённости в дальнейшем будем считать, что все члены a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$) являются положительными числами. Все определения и теоремы для знакопеременного ряда справедливы и для знакочередующегося ряда.

Теорема 1.1.10 (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине монотонно убывают и предел n -го члена равен

нулю, то знакочередующийся ряд сходится, причём его сумма не превосходит первого члена по абсолютной величине.

Таким образом, для доказательства сходимости знакочередующегося ряда необходимо проверить выполнение двух условий:

- 1) $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots;$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

При этом, согласно теореме Лейбница, выполняется неравенство $S \leq |a_1|$, где S – сумма знакочередующегося сходящегося ряда.

Следствие из теоремы Лейбница: остаток ряда по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов.

Рассмотрим знакочередующийся ряд
 $a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + (-1)^n a_{n+1} + \dots$ Выражение вида
 $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots$ называется *остатком ряда*. Тогда согласно следствию из теоремы Лейбница будет выполняться неравенство $|r_n| \leq a_{n+1}.$