

3 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

3.1 Содержание: функциональные ряды, область сходимости функционального ряда, равномерно сходящиеся ряды, степенные ряды, теорема Абеля и следствие из неё, радиус и область сходимости степенного ряда.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{nx}$.

Решение. Применим к ряду признак Коши, для чего найдём предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) 3^x = 3^x.$$

Интервал сходимости функционального ряда определяется неравенством: $3^x < 1$ или $x < 0$. Для определения области сходимости необходимо исследовать ряд на конце интервала, то есть в точке $x=0$. В этой точке ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Этот ряд расходится, так как для него не выполнен необходимый

признак сходимости ряда: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. Следовательно, областью сходимости ряда является интервал $(-\infty; 0)$.

3.2.2 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \sqrt{n}}$.

Решение. Найдём радиус сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/5^n \sqrt{n}}{1/5^{n+1} \sqrt{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \sqrt{n+1}}{5^n \sqrt{n}} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 5.$$

Следовательно, интервалом сходимости является интервал $(-5; 5)$.

Для определения области сходимости исследуем ряд на концах интервала, то есть в точках $x = \pm 5$. При значении $x=5$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

который является расходящимся обобщённо гармоническим рядом (пример 1.1.2, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). При значении $x=-5$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Ряд,

составленный из абсолютных величин знакочередующегося ряда, расходится. Применим к данному ряду признак Лейбница. Условия признака Лейбница в данном случае выполнены: $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из абсолютных величин

расходится, то знакочередующийся ряд сходится условно. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является интервал $[-5; 5]$.

3.2.3 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{7^n n^2}$.

Решение. По определению 3.1.6 степенного ряда $x_0 = -2$. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{7^n n^2}$ (*) и найдём его область сходимости. Находим радиус сходимости степенного ряда (*):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/7^n n^2}{1/7^{n+1} (n+1)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1} (n+1)^2}{7^n n^2} = 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 7.$$

Следовательно, интервалом сходимости ряда (*) является интервал $(-7; 7)$. Для определения области сходимости исследуем ряд на концах интервала, то есть в точках $x = \pm 7$. При значении $x = 7$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который является сходящимся обобщённо гармоническим рядом (пример 1.1.2, $\alpha = 2 > 1$). При значении $x = -7$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Ряд, составленный из абсолютных величин знакочередующегося ряда, сходится. Следовательно, этот знакочередующийся ряд сходится абсолютно (теорема 2.1.2 и определение 2.1.2). Таким образом, областью сходимости степенного ряда (*) является интервал $[-7; 7]$. Следовательно, областью сходимости исходного ряда будет интервал $[-7 - 2; 7 - 2]$ или $[-9; 5]$.

3.2.4 Разложить функцию $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ в степенной ряд.

Решение. Находим разложение функции $\varphi(x) = (1+x^2)^{-1/2}$ в ряд, используя биномиальный ряд, определяемый формулой (3.1.9). Разложение функции имеет вид $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$. Полученный ряд сходится на отрезке $[-1; 1]$. Интегрируя его на промежутке $[0; x]$, где $0 < x < 1$ (что можно сделать, так как ряд сходится равномерно), находим $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Поскольку $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, то получаем искомое разложение в степенной ряд исходной функции:

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Областью сходимости ряда является промежуток: $[-1; 1]$.

3.2.5 Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 0,000001$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.1.8). Поскольку $\frac{1+x}{1-x} = 2$ выполняется

при значении $x = \frac{1}{3}$, то, подставив это число в ряд, получим

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right).$$

Для вычисления $\ln 2$ с заданной точностью необходимо найти такое число членов частичной суммы, при котором сумма остатка ряда $|R_n| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} R_n &= 2 \left(\frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \dots \right) < \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+3}} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \dots \right) = \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-1/9} = \frac{1}{4 \cdot (2n+1) \cdot 3^{2n-1}}. \end{aligned}$$

В соответствии с условием задачи выберем n так, чтобы остаток был меньше $0,000001$, то есть $\frac{1}{4 \cdot (2n+1) \cdot 3^{2n-1}} < 0,000001$. Последнее неравенство

выполняется с номера $n=6$, так как при этом значении n справедливо неравенство $\frac{1}{4 \cdot (2 \cdot 6 + 1) \cdot 3^{2 \cdot 6 - 1}} = \frac{1}{4 \cdot 13 \cdot 3^{11}} = \frac{1}{9211644} < 0,000001$. Следовательно, в

разложении ряда можно ограничиться шестью слагаемыми, чтобы получить значение $\ln 2$ с заданной точностью:

$$\ln 2 \approx 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} \right) = 0,6931471.$$

3.2.6 Вычислить $\sin 1$ с точностью $\varepsilon = 0,00001$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.1.2) при значении $x=1$:

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \dots$$

Полученный ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям признака Лейбница. Для определения числа членов в указанном ряде, для достижения заданной точности, воспользуемся следствием из теоремы Лейбница: погрешность при замене его суммой первых n членов не превысит первого отброшенного члена. Так как для пятого члена ряда

выполняется требуемое неравенство $\frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} \approx 0,000003 < 0,00001$, то

достаточно взять сумму первых четырёх членов, чтобы получить искомое значение с заданной точностью. Следовательно,

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \approx 0,84147.$$

3.2.7 Вычислить интеграл $\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x^3} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$

Решение. Используя формулу (3.1.9), раскладываем подынтегральную функцию в степенной ряд $\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16} - \frac{5x^{12}}{128} + \dots$ ($|x| < 1$).

Интегрируя этот ряд на промежутке $[0; 0,5]$, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx &= \int_0^{0,5} \left(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16} - \frac{5x^{12}}{128} + \dots \right) dx = \left(x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{5x^{13}}{1664} + \dots \right) \Big|_0^{0,5} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{160} \cdot \frac{1}{2^{10}} - \frac{5}{1664} \cdot \frac{1}{2^{13}} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{56} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{1}{7168} \approx 0,00014 < 0,001$, то для вычисления заданного интеграла с указанной точностью достаточно взять два первых члена полученного ряда, то есть $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{128} \approx 0,508$.

3.2.8 Найти первые четыре члена разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0,5$.

Решение. Запишем искомое решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Найдём выражения для двух последующих производных, дифференцируя исходное уравнение: $y'' = 2x + 2yy'$, $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$. Вычислим значения этих производных при заданных начальных условиях: $y'(0) = 0 + 0,5^2 = 0,25$, $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,25$, $y'''(0) = 2 + 2 \cdot 0,0625 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 2,375$. Следовательно, решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{19x^3}{48} + \dots$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Найти область сходимости функциональных рядов.

3.3.1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^n$.

3.3.1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n$.

3.3.1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

3.3.2 Найти область сходимости степенных рядов.

3.3.2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

3.3.2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{7^n}$.

3.3.2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

3.3.2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} \frac{(x-4)^n}{2^n}$.

3.3.2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot (x-4)^n}{5 \cdot n^3}$.

3.3.2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n \cdot 4^n}$.

3.3.3 Разложить функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ по степеням переменной x .

3.3.4 С точностью 0,0001 вычислить значения функций:

3.3.1.1 $\sqrt[5]{37}$.

3.3.1.2 $\cos 20^\circ$.

3.3.1.3 $\ln 3$.

3.3.5 С точностью до 0,0001 вычислить интеграл $\int_0^{0,25} \frac{\sin 2x}{x} dx$.

3.3.6 Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^3 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0,5$.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти область сходимости степенного ряда.

3.4.1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^2}{2^n(2n+3)}$.	3.4.1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^2}{5^n(3n^2+4)}$.	3.4.1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x-4)^n}{6^n(2\sqrt[3]{n}+3)}$.
3.4.1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x-5)^n}{5^n(2n^7-6)}$.	3.4.1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n(x-6)^n}{9^n(\sqrt[4]{n^3}-7)}$.	3.4.1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x-7)^n}{3^n(2n-1)!}$.
3.4.1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x-8)^n}{11^n(4\sqrt[5]{n^2}+2)}$.	3.4.1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-9)^n}{8^n(3n^8-8)}$.	3.4.1.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-1)^n}{8^n(2\sqrt[3]{n^7}-4)}$.
3.4.1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+1)^n}{3^n(3n^2-8)}$.	3.4.1.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+2)^n}{5^n(\sqrt[5]{n^8}+5)}$.	3.4.1.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x+2)^n}{5^n(4n^2+5)}$.
3.4.1.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^n(n+1)!}$.	3.4.1.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+4)^n}{7^n(8\sqrt{n}-1)}$.	3.4.1.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x+5)^n}{5^n(2n^3+4)}$.
3.4.1.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x+6)^n}{4^n(4\sqrt{n}-3)}$.	3.4.1.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+7)^n}{3^n(6n^2+4)}$.	3.4.1.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+8)^n}{5^n(3\sqrt[4]{n^3}-1)}$.
3.4.1.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x+12)^n}{11^n(7n^4-5)}$.	3.4.1.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+10)^n}{3^n\sqrt[3]{n^2}}$.	3.4.1.21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+11)^n}{5^n(4n^3+6)}$.
3.4.1.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-11)^n}{3^n(7n^6-5)}$.	3.4.1.23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-12)^n}{9^n(n+2)!}$.	3.4.1.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-13)^n}{4^n(3\sqrt[7]{n^2}-8)}$.
3.4.1.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+13)^n}{4^n(2\sqrt[9]{n^8}-6)}$.	1.4.1.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+2)^n}{7^n(4n^5-9)}$.	1.4.1.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+5)^n}{5^n(2\sqrt[5]{n^4}-1)}$.
3.4.1.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x-18)^n}{11^n(4n^3-3)}$.	3.4.1.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+19)^n}{4^n\sqrt[6]{x+19}}$.	3.4.1.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x-7)^n}{11^n(5\sqrt[9]{n^8}-7)}$.

4 РЯДЫ ФУРЬЕ

4.1 Содержание: разложение функций в ряд Фурье

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Разложить в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-\pi, 0), \\ x/2, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где коэффициенты ряда Фурье находятся по формулам: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Найдём коэффициенты ряда Фурье для заданной функции.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{\pi} 2x \Big|_{-\pi}^0 + \frac{x^2}{4\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} (0 + 2\pi) + \left(\frac{\pi^2}{4\pi} - 0 \right) = \frac{\pi + 8}{4}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{x \sin nx}{2n\pi} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = 0 - 0 + 0 - 0 + \frac{\cos nx}{2\pi n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2}. \end{aligned}$$

Если n – чётное число, то $a_n = 0$, если нечётное, то $a_n = -\frac{1}{\pi(2n-1)^2}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{x \cos nx}{2n\pi} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = -\frac{2}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} (-1)^n - \frac{(-1)^n}{2n} + 0 + \frac{\sin nx}{2\pi n^2} \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{n\pi} ((-1)^n - 1) - \frac{(-1)^n}{2n} + 0 - 0 = \frac{2}{n\pi} ((-1)^n - 1) - \frac{(-1)^n}{2n}. \end{aligned}$$

Если n – чётное число, то $b_n = -\frac{1}{4n}$, если нечётное, то $b_n = \frac{\pi - 8}{2\pi(2n-1)}$.

Тогда исходная функция разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{\pi + 8}{8} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{\pi - 8}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}.$$

4.2.2 Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$, которая на отрезке $[-l; l]$ задана равенством $f(x) = |x|$.

Решение. Так как рассматриваемая функция чётная, то $b_n = 0$,
 $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l$, $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & \text{при чётном } n \\ -4l/\pi^2 n^2, & \text{при нечётном } n \end{cases}$

Следовательно, разложение имеет вид

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

4.2.3 Воспользовавшись разложением функции $f(x) = x^2$ в ряд Фурье в интервале $[-\pi; \pi]$, найти сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Решение. Рядом Фурье функции $y = f(x)$ с периодом $T = 2l$ называется тригонометрический ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

$$\text{где } a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В условиях данной задачи $l = \pi$. Так как, заданная функция четная, то разложение произведем по косинусам, т.е. коэффициенты $b_k = 0$, а коэффициенты

$$a_0 \text{ и } a_k \text{ определяются по формулам } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

Найдем коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3\pi} x^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \cos kx dx & v = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin kx dx \right) = \\ &= -\frac{4}{\pi \cdot k} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin kx dx & v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right] = \frac{4x}{\pi \cdot k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} - \\ &\quad - \frac{4}{\pi \cdot k^2} \int_0^{\pi} \cos kx dx = (-1)^k \frac{4}{k^2} - \frac{4}{\pi \cdot k^3} \sin kx \Big|_0^{\pi} = (-1)^k \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Поэтому для $x \in [-\pi; \pi]$, заданная функция разлагается в ряд Фурье:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Тогда при $x = \pi$ имеем $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k\pi}{k^2}$ или $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Разложить в ряд Фурье периодическую периода $T = 2\pi$ функцию, заданную на промежутке $[-\pi, \pi]$ формулами:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-\pi, 0), \\ -1, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

4.3.2 Разложить в ряд Фурье периодическую периода $T = 2\pi$ функцию, заданную на промежутке $[-\pi, \pi]$ формулами:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi, 0), \\ 3, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

4.3.3 Разложить в ряд Фурье периодическую периода $T = 2$ функцию, заданную на промежутке $[-1, 1]$ формулами:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0), \\ 1, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

4.3.4 Разложить в ряд Фурье периодическую периода $T = 4$ функцию, заданную на промежутке $[-2, 2]$ формулами:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-2, 0), \\ x, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

4.3.5 В промежутке $(0; \pi)$ разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $f(x) = x^2$.

4.3.6 В промежутке $(0; \pi)$ разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию $f(x) = \cos x$.

4.3.7 В промежутке $(0; \pi)$ разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию $f(x) = x$.

4.3.8 В промежутке $(0; \pi)$ разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию $f(x) = \sin x$.

4.3.9 Воспользовавшись разложением функции $y = f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале, найти сумму заданного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

а) $f(x) = |x|, \quad (-\pi; \pi), \quad a_n = \frac{1}{(2n-1)^2};$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad (0; \pi), \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1};$$

$$\text{в) } f(x) = |\sin x|, \quad (-\pi; \pi), \quad a_n = \frac{1}{4n^2 - 1};$$

$$\text{г) } f(x) = \left| \cos \frac{x}{2} \right|, \quad [-\pi; \pi], \quad a_n = \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2}.$$

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

4.4.1.1	$f(x) = \begin{cases} \pi - 2x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 2\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	4.4.1.2	$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
4.4.1.3	$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	4.4.1.4	$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{7} - \frac{2x}{7} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2\pi}{7} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
4.4.1.5	$f(x) = \begin{cases} 2\pi - 4x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 4\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	4.4.1.6	$f(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{5} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
4.4.1.7	$f(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{7} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2x}{7} + \frac{\pi}{7} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	4.4.1.8	$f(x) = \begin{cases} 8\pi - 16x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 16\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
4.4.1.9	$f(x) = \begin{cases} 5\pi - 10x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 10\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	4.4.1.10	$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
4.4.1.11	$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	4.4.1.12	$f(x) = \begin{cases} 3\pi - 6x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 6\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
4.4.1.13	$f(x) = \begin{cases} 7\pi - 14x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 14\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	4.4.1.14	$f(x) = \begin{cases} 4\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 4x + 2\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
4.4.1.15	$f(x) = \begin{cases} 16\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 16x + 8\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$	4.4.1.16	$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

$$4.4.1.17 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2\pi}{5} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.19 \quad f(x) = \begin{cases} 8\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 8x + 4\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.21 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} - \frac{x}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{3} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.23 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2x}{3} + \frac{\pi}{3} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.25 \quad f(x) = \begin{cases} 6\pi - 12x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 12\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.27 \quad f(x) = \begin{cases} 6\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 6x + 3\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.29 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} - \frac{x}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{3} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.18 \quad f(x) = \begin{cases} 12\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 12x + 6\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.20 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.22 \quad f(x) = \begin{cases} 10\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 10x + 5\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.24 \quad f(x) = \begin{cases} 4\pi - 8x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 8\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.26 \quad f(x) = \begin{cases} 14\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 14x + 7\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.28 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{2x}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2\pi}{3} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$4.4.1.30 \quad f(x) = \begin{cases} 2\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 2x + \pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$