

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Пусть на некотором множестве I задано бесконечное множество функций $\{u_n(x)\}$, где $x \in I$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Определение 1.1.1 *Функциональным рядом* называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, где $u_n(x)$ – функция от переменной x .

Определение 1.1.2 Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся в точке x_0* , если в этой точке сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Определение 1.1.3 Функциональный ряд называется *сходящимся на промежутке I* , если он сходится в каждой точке этого интервала.

Определение 1.1.4 Множество всех точек сходимости функционального ряда называется *областью сходимости* этого ряда.

Каждому значению из области сходимости I соответствует определённое значение величины $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k u_n(x)$. Эту величину, являющуюся функцией от переменной x , называют *суммой функционального ряда* и обозначают $S(x)$.

Для определения области сходимости функционального ряда можно использовать предельный признак Даламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |l(x)|$ или предельный радикальный признак Коши $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = |l(x)|$.

Решение неравенства $|l(x)| < 1$ представляет собой интервал сходимости функционального ряда. Для определения области сходимости необходимо исследовать ряд на концах интервала сходимости, то есть в точках решения уравнения $|l(x)| = 1$.

Представим сумму ряда $S(x)$ в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$, $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$ – остаток функционального ряда.

Определение 1.1.5 Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в некоторой области I , если каждого

сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N , что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in I$.

Сформулируем достаточный признак сходимости функционального ряда.

Теорема 1.1.1 (признак Вейерштрасса). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ по абсолютной величине для всех $x \in I$ не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то есть $|u_n(x)| \leq a_n$, для любого натурального n , то данный функциональный ряд равномерно сходится на промежутке I .

Сформулируем три теоремы, относящиеся к непрерывности, дифференцированию и интегрированию функциональных рядов.

Теорема 1.1.2 Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны на интервале I и на этом интервале ряд является равномерно сходящимся, то его сумма на этом интервале является непрерывной функцией.

Теорема 1.1.3 (о почленном дифференцировании). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на промежутке I и его сумма равна $S(x)$, а ряд, составленный из производных членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, равномерно сходится на промежутке I , то производная суммы данного ряда равна сумме ряда, составленных из производных, то есть $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

Теорема 1.1.4 (о почленном интегрировании). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на промежутке I сходится равномерно и имеет сумму $S(x)$, то на любом отрезке $[a; b] \subseteq I$ его можно интегрировать, причём сумма полученного ряда равна $\int_a^b S(x) dx$.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Рассмотрим степенные ряды, как один из важных видов функциональных рядов.

Определение 1.1.6 *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots$ (1), где x_0 – произвольная точка, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ – коэффициенты степенного ряда.

Если $x_0 = 0$, то полученный ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$ (2).

Каждый член указанных рядов представляет собой степенную функцию, поэтому ряды называются степенными. Область сходимости степенных рядов не являются пустым множеством. Ряд (1) всегда сходится в точке x_0 , а ряд (2) в точке нуль, причём их суммы в этом случае равны c_0 . Ряд (1) всегда можно свести к ряду (2), если выполнить замену $x - x_0 = t$.

Теорема 1.1.5 (Абеля). Если степенной ряд (2) сходится в точке x_1 , то он сходится на промежутке решения неравенства $|x| < |x_1|$.

Следствие 1.1.1 Если степенной ряд (2) расходится в точке x_2 , то он расходится на промежутке решения неравенства $|x| > |x_2|$.

Для определения области сходимости степенных рядов (1) и (2), на основании теоремы Абеля, определяем радиус сходимости $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ или

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$. Тогда интервал сходимости ряда (2): $(-R; R)$. Для определения области сходимости ряда (2) необходимо исследовать ряд на концах интервала, то есть в точках $x = \pm R$. Интервал сходимости ряда (1) имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$. Для определения области сходимости ряда (1) необходимо исследовать ряд на концах интервала, то есть в точках $x = x_0 \pm R$.

РЯД ТЕЙЛОРА

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая является бесконечно дифференцируемой на промежутке $(x_0 - R; x_0 + R)$. Эта функция, на этом интервале, может быть представлена в виде сходящегося к ней *бесконечного степенного ряда Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, а $c = x_0 + \Theta(x - x_0)$ и $0 < \Theta < 1$.

При значении $x_0 = 0$ получаем так называемый *ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0 , при любом значении n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| < M$, где M положительная постоянная величина, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ и функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора некоторых основных функций.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.1.1)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.1.2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.1.3)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.1.4)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.1.5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1. \quad (1.1.6)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (1.1.7)$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right), \quad -1 < x < 1. \quad (1.1.8)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!}x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!}x^3 + \dots, \quad (1.1.9)$$

которое возможно при $m \geq 0$, если $-1 \leq x \leq 1$; при $-1 < m < 0$, если $-1 < x \leq 1$; при $m \leq -1$, если $-1 < x < 1$.

Степенные ряды находят *применение при приближённых вычислениях значений функции*. Для вычисления приближённого значения функции $f(x)$ в её разложении в степенной ряд сохраняются первые n членов. Для оценки погрешности найденного приближённого значения необходимо оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < a_{n+1}$, где a_{n+1} – первый из отброшенных членов.

Для *вычисления интегралов* с помощью степенных рядов раскладывают подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем ограничиваются в этом ряде конечным числом членов. Число членов выбирается из соображения обеспечения заданной точности. Также степенные ряды можно применять при *решении дифференциальных уравнений*.

РЯД ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ 2π .

Ряд Фурье позволяет изучать периодические (непериодические) функции, разлагая их на компоненты. Переменные токи и напряжения, смещения, скорость и ускорение кривошипно-шатунных механизмов и акустические волны - это типичные практические примеры применения периодических функций в инженерных расчетах.

Разложение в ряд Фурье основывается на предположении, что все имеющие практическое значение функции в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ можно выразить в виде сходящихся тригонометрических рядов (ряд считается сходящимся, если сходится последовательность частичных сумм, составленных из его членов):

Стандартная (=обычная) запись через сумму $\sin x$ и $\cos x$

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ - действительные константы, т.е.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

где для диапазона от $-\pi$ до π коэффициенты ряда Фурье рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Коэффициенты a_0, a_n и b_n называются **коэффициентами Фурье**, и если их можно найти, то ряд называется **рядом Фурье**, соответствующим функции $f(x)$. Для выше указанного ряда член $(a_1 \cos x + b_1 \sin x)$ называется первой или **основной гармоникой**.

Другой способ записи ряда - использование соотношения $a \cos x + b \sin x = c \sin(x + \alpha)$:

$$f(x) = a_0 + c_1 \sin(x + \alpha_1) + c_2 \sin(2x + \alpha_2) + \dots + c_n \sin(nx + \alpha_n),$$

где a_0 - константа, $c_1=(a_1^2+b_1^2)^{1/2}$, $c_n=(a_n^2+b_n^2)^{1/2}$ - амплитуды различных компонент, а фазовый угол равен $\alpha_n=\arctg a_n/b_n$.

Для выше указанного ряда член $(a_1\cos x+b_1\sin x)$ или $c_1\sin(x+\alpha_1)$ называется первой или **основной гармоникой**, $(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)$ или $c_2\sin(2x+\alpha_2)$ называется **второй гармоникой** и так далее.

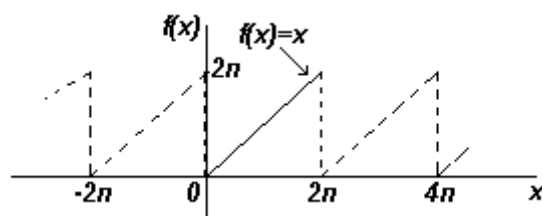
Для точного представления сложного сигнала обычно требуется бесконечное количество членов. Однако во многих практических задачах достаточно рассмотреть только несколько первых членов.

Ряд Фурье непериодических функций с периодом 2π .

Разложение непериодических функций.

Если функция $f(x)$ непериодическая, значит, она не может быть разложена в ряд Фурье для всех значений x . Однако можно определить ряд Фурье, представляющий функцию в любом диапазоне шириной 2π .

Если задана непериодическая функция, можно составить новую функцию, выбирая значения $f(x)$ в определенном диапазоне и повторяя их вне этого диапазона с интервалом 2π . Поскольку новая функция является периодической с периодом 2π , ее можно разложить в ряд Фурье для всех значений x . Например, функция $f(x)=x$ не является периодической. Однако, если необходимо разложить ее в ряд Фурье на интервале от 0 до 2π , тогда вне этого интервала строится периодическая функция с периодом 2π (как показано на рис. ниже) .



Для непериодических функций, таких как $f(x)=x$, сумма ряда Фурье равна значению $f(x)$ во всех точках заданного диапазона, но она не равна $f(x)$ для точек вне диапазона. Для нахождения ряда Фурье непериодической функции в диапазоне 2π используется все та же формула коэффициентов Фурье.

Четные и нечетные функции.

Говорят, функция $y=f(x)$ **четная**, если $f(-x)=f(x)$ для всех значений x . Графики четных функций всегда симметричны относительно оси y (т.е. являются зеркально отраженными). Два примера четных функций: $y=x^2$ и $y=\cos x$.

Говорят, что функция $y=f(x)$ **нечетная**, если $f(-x)=-f(x)$ для всех значений x . Графики нечетных функций всегда симметричны относительно начала координат.

Многие функции не являются ни четными, ни нечетными.

Разложение в ряд Фурье по косинусам.

Ряд Фурье четной периодической функции $f(x)$ с периодом 2π содержит только члены с косинусами (т.е. не содержит членов с синусами) и может включать постоянный член. Следовательно,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

где коэффициенты ряда Фурье,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

Разложение в ряд Фурье по синусам.

Ряд Фурье нечетной периодической функции $f(x)$ с периодом 2π содержит только члены с синусами (т.е. не содержит членов с косинусами).

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

где коэффициенты ряда Фурье,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

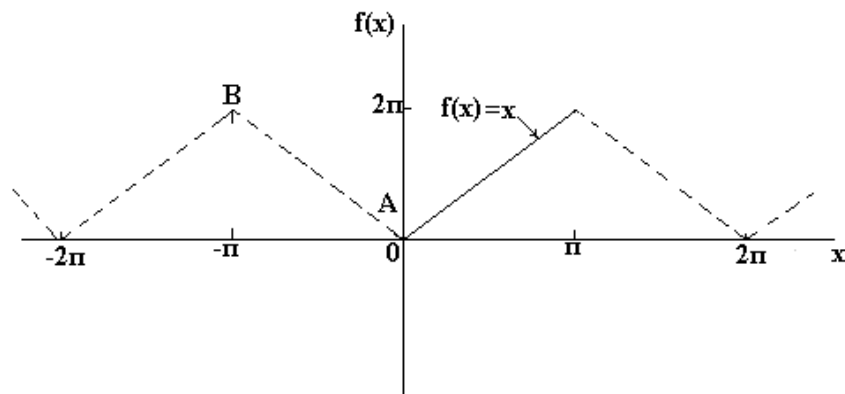
Ряд Фурье на полупериоде.

Если функция определена для диапазона, скажем от 0 до π , а не только от 0 до 2π , ее можно разложить в ряд только по синусам или только по косинусам. Полученный ряд Фурье называется **рядом Фурье на полупериоде**.

Если требуется получить разложение **Фурье на полупериоде по косинусам** функции $f(x)$ в диапазоне от 0 до π , то необходимо составить четную периодическую функцию. На рис. ниже показана функция $f(x)=x$, построенная на интервале от $x=0$ до $x=\pi$. Поскольку четная функция симметрична относительно оси $f(x)$, проводим линию АВ, как показано на рис. ниже. Если предположить, что за пределами рассмотренного интервала полученная треугольная форма является периодической с периодом 2π , то итоговый график имеет вид, показ. на рис. ниже. Поскольку требуется получить разложение Фурье по косинусам, как и ранее, вычисляем коэффициенты Фурье a_0 и a_n

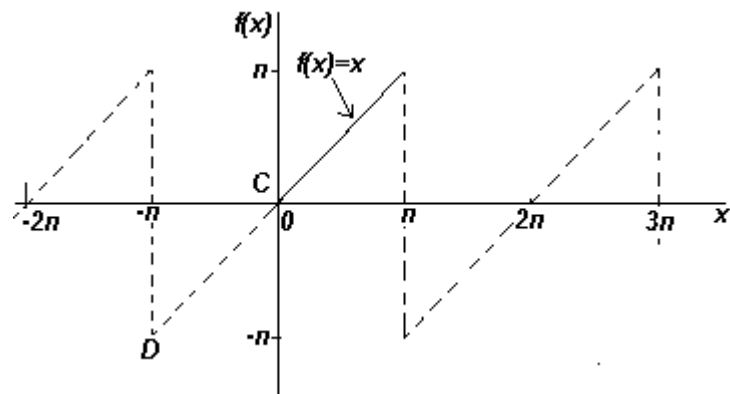
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$\text{Где } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \text{ и } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$



Если требуется получить **разложение Фурье на полупериоде по синусам** функции $f(x)$ в диапазоне от 0 до π , то необходимо составить нечетную периодическую функцию. На рис. ниже показана функция $f(x)=x$, построенная на интервале от $x=0$ до $x=\pi$. Поскольку нечетная функция симметрична относительно начала координат, строим линию CD, как показано на рис. Если предположить, что за пределами рассмотренного интервала полученный пилообразный сигнал является периодическим с периодом 2π , то итоговый график имеет вид, показанный на рис. Поскольку требуется получить разложение Фурье на полупериоде по синусам, как и ранее, вычисляем коэффициент Фурье. b

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ где } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$



РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА.

Разложение периодической функции с периодом L.

Периодическая функция $f(x)$ повторяется при увеличении x на L , т.е. $f(x+L)=f(x)$. Переход от рассмотренных ранее функций с периодом 2π к функциям с периодом L довольно прост, поскольку его можно осуществить с помощью замены переменной.

Чтобы найти ряд Фурье функции $f(x)$ в диапазоне $-L/2 \leq x \leq L/2$, введем новую переменную u таким образом, чтобы функция $f(x)$ имела период 2π относительно u . Если $u=2\pi x/L$, то $x=-L/2$ при $u=-\pi$ и $x=L/2$ при $u=\pi$. Также пусть $f(x)=f(Lu/2\pi)=F(u)$. Ряд Фурье $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \sin nu), \text{ где } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) du,$$

Где коэффициенты ряда Фурье,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \cos nu du \text{ и } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \sin nu du.$$

Однако чаще приведенную выше формулу приводят к зависимости от x . Поскольку $u=2\pi x/L$, значит, $du=(2\pi/L)dx$, а пределы интегрирования - от $-L/2$ до $L/2$ вместо $-\pi$ до π . Следовательно, ряд Фурье для зависимости от x имеет вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right]$$

где в диапазоне от $-L/2$ до $L/2$ коэффициенты ряда Фурье,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx$$

u

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx$$

(Пределы интегрирования могут быть заменены на любой интервал длиной L , например, от 0 до L)

Ряд Фурье на полупериоде для функций, заданных в интервале $L \neq 2\pi$.

Для подстановки $u=\pi x/L$ интервал от $x=0$ до $x=L$ соответствует интервалу от $u=0$ до $u=\pi$. Следовательно, функцию можно разложить в ряд только по косинусам или только по синусам, т.е. в **ряд Фурье на полупериоде**.

Разложение по косинусам в диапазоне от 0 до L имеет вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \text{ и } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$