

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Раздел математики, в которой изучаются задачи о подсчёте числа способов, с помощью которых осуществляется событие или числа способов, которыми можно упорядочить данную совокупность, называется *комбинаторикой*.

Основное правило комбинаторики. Пусть имеется m множеств: первое множество содержит n_1 элемент, второе – n_2 элемента, третье – n_3 элемента и так далее, m -ое множество содержит n_m элементов. Составляются комбинации из m элементов таким образом, чтобы в каждую комбинацию входило лишь по одному элементу из каждого множества. Число всех комбинаций такого типа определяется *основным правилом комбинаторики*:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_m. \quad (4.1.1.1)$$

Перестановки. *Перестановкой* P_n из n элементов называется расположение этих элементов в определённом порядке. Они вычисляются по формуле

$$P_n = n! \quad (4.1.1.2)$$

Размещение. Требуется составить комбинацию m элементов из n элементов, которые отличаются либо составом, либо порядком. *Размещение* вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (4.1.1.3)$$

Размещение с повторением (с возвращением). Если выбор m элементов из множества n элементов производится с возвращением и упорядочивания их в последовательную цепочку, то различными исходами будут m элементарные наборы, которые отличаются, либо составом, либо порядком. *Размещение с повторением* вычисляется по формуле

$$N = n^m. \quad (4.1.1.4)$$

Сочетание. Требуется составить m элементарные наборы из множества n чисел, которые отличаются лишь составом, без учёта порядка. *Сочетание* вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}. \quad (4.1.1.5)$$

Пусть $m_1, m_2, \dots, m_k$ - натуральные числа, причём $\sum_{i=1}^k m_i = n$. Представим множество A из n элементов в виде суммы k множеств $A_1, A_2, \dots, A_k$, содержащих соответственно $m_1, m_2, \dots, m_k$ элементов. Число различных способов такого разбиения на группы определяется по формуле

$$C_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}. \quad (4.1.1.6)$$

Сочетания с повторением (с возвращением). Если выбор m элементов из множества n элементов производится с возвращением и упорядочивания их в последовательную цепочку, то различными исходами будут m элементарные наборы, которые отличаются, лишь составом, без учёта порядка. В этом случае число таких наборов определяется по формуле:

$$N = \bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \quad (4.1.1.7)$$

ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

При проведении эксперимента E можно выделить некоторое элементарное событие (исход), которое характеризуется тем, что любой повторный эксперимент может закончиться одним и только одним из этих взаимно исключающихся элементарных событий.

Определение 4.1.2.1 *Элементарным событием ω называется любой мыслимо возможный исход эксперимента.*

Совокупность всех элементарных событий ω образуют множество Ω .

Определение 4.1.2.2 *Пространством элементарных событий, которые отвечают эксперименту E , называется множество Ω всех его мыслимо взаимоисключающих исходов эксперимента.*

Определение 4.1.2.3 *Событием называется любое подмножество пространства элементарных событий.*

Определение 4.1.2.4 *Достоверным событием называется событие, которое совпадает с пространством элементарных событий.*

Определение 4.1.2.5 *Невозможным событием называется событие, которое совпадает с пустым множеством.*

Математическая формализация модели случайного эксперимента включает в себя:

- 1) построение множества элементарных исходов Ω ;
- 2) описание поля событий для данного эксперимента;
- 3) задание вероятностного распределения на поле событий.

Построение Ω осуществляется на практике, исходя из требования, чтобы все интересующие нас результаты данного эксперимента могли быть однозначно описаны на основе построенного множества. Совокупность всех наблюдаемых событий составляет поле событий для данного эксперимента.

Так как Ω отождествляется с множеством, то над событием можно совершать все операции, выполняемые над множествами. Рассмотрим основные операции над событиями.

Определение 4.1.2.6 *Противоположным событием к событию A называется событие $\bar{A}$, состоящее из всех элементарных исходов, которые не входят в событие A , то есть событие $\bar{A} = \{\omega | \omega \notin A\}$.*

Определение 4.1.2.7 *Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, состоящее из элементарных исходов, которые принадлежат первому событию A или второму событию B , то есть событие $A + B = \{\omega | \omega \in A \vee \omega \in B\}$.*

Определение 4.1.2.8 Произведением двух событий A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее из элементарных исходов, которые принадлежат событию A и событию B , одновременно, то есть событие $A \cdot B = \{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.

Определение 4.1.2.9 События называются A и B несовместными, если в результате эксперимента их произведение дает невозможное событие. В противном случае события называются совместными.

Определение 4.1.2.10 Разностью двух событий A и B называется событие $A \setminus B$, состоящее из элементарных исходов, которые принадлежат событию A и не принадлежат событию B , то есть событие $A \setminus B = \{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$.

Определение 4.1.2.11 Класс событий F называется алгеброй событий, если выполняются следующие два условия:

- 1) $\Omega \in F$;
- 2) если $A \in F$, $B \in F$, то сумма, произведение и разность этих событий также принадлежат F .

Определение 4.1.2.12 Класс событий F называется σ -алгеброй событий, если выполняются следующие три условия:

- 1) $\Omega \in F$;
- 2) если $A \in F$, $B \in F$, то сумма, произведение и разность этих событий также принадлежат F ;
- 3) если каждое событие A_k конечной или счетной последовательности событий $A_1, A_2, \dots$ принадлежит классу F , то и сумма этих событий принадлежит этому классу.

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть пространство элементарных событий Ω есть произвольное множество. Выделим систему подмножеств множества Ω , которое образует σ -алгебру событий F . Если определено множество Ω и σ -алгебра его подмножеств, то говорят, что построено измеримое пространство (Ω, F) .

Определим на измеримом пространстве (Ω, F) числовую функцию (вероятностную меру) $\mu(A)$ для измерения объективной возможности наступления события $A \in F$, таким образом, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

- 1) $\mu(A) \geq 0$;
- 2) $\mu(\Omega) = 1$;
- 3) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$;
- 4) $\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Определение 5.1.1.1 Вероятностью на измеримом пространстве (Ω, F) называется числовая функция P , которая определена на множестве из алгебры событий F и удовлетворяет аксиомам Колмогорова:

- 1) для любого события $A \in F$ справедливо неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$;
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) для любого конечного или счётного множества попарно несовместных событий $A_i \in F$ справедливо равенство $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Определение 5.1.1.2 Пространство элементарных событий Ω с выделенной в нём σ -алгеброй событий F и определённой на измеримом пространстве (Ω, F) вероятностью $P(A)$, где $A \in F$ называется вероятностным пространством (Ω, F, P) .

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$, то есть их сумма есть достоверное событие или в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

Аксиомы теории вероятностей позволяют вычислять вероятности любых событий с помощью вероятностей элементарных событий. Но при этом вопрос о том, как определить вероятности элементарных событий не рассматривается. Дадим классическое определение вероятности.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ пространство элементарных событий с конечным числом исходов n . Так как, элементарные события образуют полную группу событий, то $\sum_{i=1}^n \omega_i = \Omega$. Вследствие того, что элементарные события несовместны, то по аксиоме (3), сложения вероятностей получаем следующее равенство:

$$P\left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right) = P(\Omega) = \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1.$$

Так как элементарные исходы равновозможные, то вероятность наступления каждого из них одна и та же, а именно $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$. Пусть событие

$A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ содержит m элементарных исходов. Следовательно, по аксиоме сложения вероятностей, имеем:

$$P(A) = P(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Определение 5.1.2.1 (классическое определение вероятностей) Если все элементарные события ω_i равновозможные, то вероятность наступления любого события $A \in F$ равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A , к общему числу всех элементарных исходов.

Согласно классическому определению вероятностей получаем формулу вычисления вероятностей элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (5.1.2.1)$$

где n – общее число исходов эксперимента, а m – число исходов эксперимента, благоприятствующих данному событию.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть пространство Ω эксперимента E содержит несчётное множество элементарных событий ω . Предположим, что элементарные события можно трактовать, как координаты точки в пространстве $\mathbb{R}^n$, а события, как некоторые области этого пространства. Пусть Ω , а, следовательно, и событие $A \subseteq F$ имеют конечную геометрическую меру: $\mathbb{R}^1$ - длина, $\mathbb{R}^2$ - площадь, $\mathbb{R}^3$ - объём.

Геометрические меры множеств $A \subseteq F$ можно принять за вероятностные меры этих множеств. Необходимо только, чтобы геометрические меры удовлетворяли аксиомам Колмогорова. Для этого геометрические меры нормируют, то есть принимают геометрическую меру Ω за единицу, а вероятностная мера события $A \subseteq F$ будет пропорциональна мере области A . Тогда

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{мера области } A}{\text{мера области } \Omega}.$$

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часто не всегда известно число элементарных событий пространства элементарных событий Ω , которые необходимы при классическом методе задании вероятности. Также не всегда известны геометрические меры множеств, которые необходимы для геометрического метода задания вероятностей. Статистический метод задания вероятностей не требует знания задания этих величин.

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω , которое отвечает условиям эксперимента E . Если эксперимент продублировать n раз при одних и тех же условиях S , то относительная частота появления события A

определяется по формуле $W(A) = \frac{m}{n}$. Тогда относительную частоту принимают за оценку вероятности появления события A :

$P(A) = P(A|S) \approx W(A|S) = \frac{m}{n}$. Таким образом, статистический метод задания

вероятностей состоит в том, что в качестве оценки вероятностей появления события $A \subseteq F$ принимаем с некоторой точностью ε относительную частоту появления этого события: $P(A) = W(A) + \varepsilon$.

СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Для любого события A выполняется неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Вероятность достоверного события равна 1, т. е. $P(\Omega) = 1$.
3. Вероятность невозможного события равна 0, т. е. $P(\emptyset) = 0$.
4. Для любых двух несовместных событий A и B вероятность суммы равна сумме вероятностей, т. е. $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
5. Если событие $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$ и $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
6. Вероятность противоположного события равна разности достоверного события и вероятности самого события: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
7. Теорема сложения. Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного наступления, т. е. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.
8. Вероятность суммы трёх произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий и вероятности одновременного их наступления минус вероятности попарного наступления этих событий:
$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$
9. Вероятность суммы m произвольных событий равна вероятности достоверного события минус вероятность одновременного наступления этих событий: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_m) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_m)$.

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ

Пусть (Ω, F, P) - математическая модель вероятностного эксперимента. Это означает, что наступление любого события будет иметь некоторую вероятность. Вероятность любого события A связано с комплексом условий эксперимента и может менять свою величину с изменением этого комплекса условий.

Например, при бросании игральной кости вероятность выпадения числа очков больше трёх, равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Если при этом произошло событие,

выпадение чётного числа очков, то вероятность изменится и станет равна $\frac{2}{3}$.

Определение 7.1.2.1 Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) , и A, B произвольные события. Если $P(B) > 0$, то *условной вероятностью* события A , при условии, что событие B произошло, называется вероятность, которое определяется по формуле $P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Аналогично определяется условная вероятность события B , при условии, что событие A произошло: $P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$.

Легко показать, что условная вероятность обладает всеми свойствами вероятности.

Если умножить последние два равенства на знаменатели правых частей, то приходим к теореме умножения.

Теорема 7.1.2.1 Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго события при условии, что первое событие произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_B(A) = P(B) \cdot P_A(B). \quad (7.1.2.1)$$

Если событие A не зависит от события B , то $P_B(A) = P(A)$. В данном случае события называются *независимыми*. Если события A и B являются независимыми, то независимыми будут события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Тогда теорему умножения записываем в виде

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (7.1.2.2)$$

Для n произвольных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ теорему умножения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) &= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = \dots \\ &= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot P_{A_1 A_2 A_3}(A_4) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n). \end{aligned}$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Предположим, что событие A может произойти с одним из несовместных событий H_i , где $i=\overline{1,n}$, объединение которых совпадает с пространством элементарных событий Ω . То есть, $\Omega = \{H_1 + H_2 + \dots + H_n\}$ и $H_i \cdot H_j = \emptyset$, если $i \neq j$. События H_i , которые удовлетворяют указанным выше условиям, называются *гипотезами*. Предположим, что заданы вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P_{H_i}(A)$ наступления события A при осуществлении каждой из указанных гипотез. Вероятность события A можно вычислить по следующей теореме.

Теорема 8.1.1.1 Вероятность события A , которое может произойти одновременно с одной из гипотез H_i , где $i=\overline{1,n}$, равна сумме попарных произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующие им условные вероятности наступления события A .

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A), \quad (8.1.1.1)$$

или используя знак суммирования, получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \quad (8.1.1.2)$$

Формулы (8.1.1.1) и (8.1.1.2) называются формулами полной вероятности.

ФОРМУЛА БАЙЕСА

Формула Байеса даёт возможность определить условные вероятности гипотез, после проведения эксперимента, если известны вероятности гипотез до проведения эксперимента, причём гипотезы образуют полную группу событий.

Теорема 8.1.2.1 Вероятность гипотезы $H_k (k=\overline{1,n})$, после проведения эксперимента равна произведению вероятности этой гипотезы до проведения эксперимента на условную вероятность события, которое произошло при испытании, делённому на полную вероятность данного события.

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}. \quad (8.1.2.1)$$

Формула (8.1.2.1) называется формулой Байеса (или Бейеса).

СХЕМА БЕРНУЛЛИ

На практике часто встречаются задачи, которые связаны с многократно повторяющимися испытаниями, в результате которых может произойти или не произойти некоторое событие A .

Событие A называется независимым в данной системе испытаний, если вероятность наступления этого события в каждом отдельно взятом испытании не зависит от исходов наступления этого события в других испытаниях.

Если в серии повторных испытаний событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A) = p$, которая не зависит от номера испытания, то данная серия называется схемой Бернулли. Таким образом, в схеме Бернулли для каждого испытания имеется только два исхода:

- а) событие A - «успех»;
- б) событие $\bar{A}$ - «неудача».

События наступают с постоянными вероятностями $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q$, а так как, события A и $\bar{A}$ образуют полную группу событий, то $p + q = 1$.

Рассмотрим задачу: в условиях схемы Бернулли определить вероятность $P_n(m)$, где $0 \leq m \leq n$, того, что при n испытаниях событие A , имеющее одну и ту же вероятность $P(A) = p$ для каждого отдельного испытания, появится ровно m раз.

Благоприятные серии испытаний, для события A , можно записать в виде:

$$A_{\alpha_1} \cdot A_{\alpha_2} \cdot A_{\alpha_3} \cdot \dots \cdot A_{\alpha_n} \quad (i = \overline{1, n}),$$

где A_{α_i} совпадает с событием A или событием $\bar{A}$. Причём событие A встречается ровно m раз, а событие $\bar{A}$ ровно $n - m$ раз. Так как испытания независимы, то вероятность реализации одной такой благоприятной серии равна $p^m q^{n-m}$, где $p = P(A)$, $q = P(\bar{A}) = 1 - p$. Все благоприятные серии получаются в результате выбора различных m номеров из общего количества n номеров, а, следовательно, число серий таких испытаний равно C_n^m .

Тогда, по теореме сложения вероятностей, для случая несовместных событий, получаем, что вероятность наступления события A ровно m раз в серии из n независимых испытаний определяется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \quad (9.1.1.1)$$

Эта формула называется биномиальной, так как её правая часть представляет собой $(m+1)$ -й член бинома Ньютона:

$$(q + p)^n = C_n^0 \cdot q^n + C_n^1 \cdot q^{n-1} \cdot p + C_n^2 \cdot q^{n-2} \cdot p^2 + \dots + C_n^n \cdot p^n.$$

Если числу m придавать значения $0, 1, 2, 3, \dots, n$ получим соответствующую последовательность вероятностей: $P_n(0), P_n(1), P_n(2), \dots, P_n(n)$. Совокупность данной последовательности

вероятностей называют биномиальным законом распределения вероятностей. Так как множество $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ числа появления события при n независимых испытаниях образуют полную группу событий, то $P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(n) = 1$.

Биномиальный закон распределения вероятностей даёт возможность определить вероятность того, что событие A , в n независимых испытаниях появится не менее m_1 раз, но не более m_2 раза:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1 + 1) + \dots + P_n(m_2 - 1) + P_n(m_2). \quad (9.1.1.2)$$

Если событие A в каждом опыте может наступить с вероятностью p , то количество n опытов, которые необходимо произвести для того, чтобы с вероятностью P можно было утверждать, что данное событие A произойдет, по крайней мере, один раз, находится по формуле

$$n \geq \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - p)} \quad (9.1.1.3)$$

НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЯ

Определение 9.1.2.1 Число m_0 называется *наиболее вероятным* или *наивероятнейшим числом* появления события A в серии n испытаний, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях m_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число появления события определяем из неравенства:

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p. \quad (9.1.2.1)$$

Так как $p + q = 1$, то в решении последнего неравенства найдется, по крайней мере, одно целое число m_0 .

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Предположим, что в результате каждого из n независимых испытаний может произойти одно из k попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_k$ соответственно ($p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$). Обозначим через m_i число тех испытаний, в которых произошло событие A_i , где $i = \overline{1, k}$ и $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. Тогда вероятность того, что событие A_1 наступит ровно m_1 раз, событие A_2 наступит ровно m_2 раза, ..., событие A_k наступит m_k раз, в серии n независимых испытаний определяется равенством

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}. \quad (9.1.3.1)$$

При значении $k = 2$ полиномиальное распределение становится биномиальным распределением.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Если число испытаний велико, то вычисление по формуле Бернулли становится затруднительным. Поэтому возникает вопрос о вычислении таких вероятностей с помощью приближенных формул. Ответ на этот вопрос дают предельные теоремы в схеме Бернулли.

ТЕОРЕМА ПУАССОНА

Если рассматривается большое число независимых испытаний при малой вероятности p (будем считать, что $p < 0,1$) наступления события в каждом отдельном взятом испытании, вероятность $P_n(m)$ вычисляется по формуле Пуассона.

Теорема (Пуассона) Если вероятность события A в каждом отдельно взятом испытании из серии n независимых испытаний равна $\frac{\mu}{n}$, где $\mu > 0$ не зависит от числа испытаний n , то вероятность того, что событие наступит ровно m раз, в $n \rightarrow \infty$ опытах равна

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}, \quad (10.1.1.1)$$

где $\mu = n \cdot p$.

Значения распределения Пуассона можно определить по специальным таблицам (приложение 1). Иногда распределение Пуассона называют законом распределения больших чисел или законом редких явлений.

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Если в условиях схемы Бернулли проводится большое число испытаний, а вероятность наступления события A , в каждом из отдельно взятых испытаний, не слишком близка к нулю и единице, то вычисление вероятностей событий по формуле Бернулли вызывают определённые технические затруднения при расчётах. В этом случае приближённую формулу вычисления вероятности $P_n(m)$, того, что событие A наступит ровно m раз в системе n независимых испытаниях, устанавливает теорема Муавра-Лапласа.

Теорема 10.1.2.1 (локальная теорема Муавра-Лапласа) Пусть $p = P(A)$ – вероятность наступления события A , в отдельно взятом испытании, в системе n независимых испытаниях, причем данная вероятность не слишком близка к нулю и к единице. Вероятность того, что

событие A при значении $n \rightarrow \infty$ наступит, ровно m раз, определяется по формуле

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (10.1.2.1)$$

где $q = 1 - p$, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Введя функцию: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, получаем формулу

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x). \quad (10.1.2.2)$$

Значения функции $\varphi(x)$, определяются по таблицам (приложение 2), причем в таблице заданы значения функции $\varphi(x)$, только для переменных $x \geq 0$, так как, функция $\varphi(x)$ является четной и $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При значениях переменной $x > 5$ функция $\varphi(x)$ практически равна нулю.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МАВРА-ЛАПЛАСА

Определим в условиях схемы Бернулли вероятность $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ того, что событие A , наступающее с одной и той же вероятностью $P(A) = p$ (вероятность не слишком близка к нулю и единице) в одном испытании, в серии n независимых испытаний, наступит не менее m_1 раз, но не более m_2 раз. В данном случае используется интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Теорема 10.1.3.1 (интегральная теорема Муавра-Лапласа) Пусть m - число наступления события A в серии $n \rightarrow \infty$ независимых испытаний, а p - вероятность, которая не слишком близка к нулю и к единице, наступления этого события в одном отдельно взятом испытании. Тогда вероятность того, что событие наступит не менее m_1 раз, но не более m_2 , в данной серии из n независимых испытаний, равна

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (10.1.3.1)$$

где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Введем функцию Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, значение которой можно определить по таблице (приложение 3). Тогда формулу (10.1.3.1) можно записать в виде

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \quad (10.1.3.2)$$

Укажем основные свойства функции Лапласа:

- 1) $\Phi(0) = 0$;
- 2) наиболее употребляемые значения: $\Phi(1) = 0,34134$, $\Phi(2) = 0,47725$, $\Phi(3) = 0,49865$, $\Phi(4) = 0,499968$;
- 3) $\Phi(x) = 0,5$, при $x > 5$;
- 4) функция Лапласа монотонно возрастает на множестве действительных чисел, то есть $\Phi(x_2) > \Phi(x_1)$ для всех $x_2 > x_1$;
- 5) функция Лапласа нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Выясним, чему равна вероятность того, что в условиях схемы Бернулли, отклонение частоты m/n от вероятности $p = p(A)$ наступления события A не превосходит по абсолютной величине заданного числа ε , т. е.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right).$$

Преобразуем неравенство, вероятность которого необходимо найти.

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon \leq \frac{m - np}{n} \leq \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon n \leq m - np \leq \varepsilon n.$$

Разделим последнее неравенство на величину $\sqrt{npq}$. В результате приходим к неравенству, которое равносильно данному:

$$-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Введём обозначения $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$.

Находим вероятность заданного события.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(-x_1 \leq x \leq x_1) \approx \Phi(x_1) - \Phi(-x_1) = \Phi(x_1) + \Phi(x_1) = 2\Phi(x_1).$$

Тогда справедливо приближённое равенство:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (10.1.4.1)$$

Если $x > 5$, то значение функции Лапласа равно 0,5. Следовательно, при числе испытаний $n \rightarrow \infty$, получаем, что величина $2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ стремится к единице.

Таким образом, в условиях схемы Бернулли, каким бы не было мало значение ε , с вероятностью сколь угодно близкой к единице, можно ожидать, что при достаточно большом числе испытаний, отклонение относительной частоты m/n появления события A от её вероятности $p = P(A)$ по абсолютной величине не превосходит заданного числа ε .

Данное правило называется *законом больших чисел* в условиях схемы Бернулли.