

1 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1 Содержание: дискретные случайные величины (ДСВ), закон распределения ДСВ, функция распределения, числовые характеристики ДСВ (математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты k -го порядка).

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Специалист кредитного отдела банка имеет высшую категорию с вероятностью 0,6. Построить ряд распределения случайной величины ξ - числа специалистов, которые имеют высшую категорию, среди пяти выбранных специалистов. Вычислить вероятность того, что среди них окажется не менее двух, но не более четырёх специалистов, которые имеют высшую категорию.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$, а, следовательно, вероятности $p_i = P(\xi = x_i)$ вычисляются по формуле $p_i = P(\xi = x_i) = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$. По условию: $n = 5$, $p = 0,6$, $q = 1 - p = 0,4$. В результате вычислений получим следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(\xi = x_i)$	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

Проверка: $0,01024 + 0,0768 + 0,2304 + 0,3456 + 0,2592 + 0,07776 = 1$.

Найдём вероятность заданного события:

$$P(2 \leq \xi \leq 4) = P((\xi = 2) + (\xi = 3) + (\xi = 4)) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0,8352.$$

1.2.2 Два стрелка стреляют по одной мишени, делая, независимо друг от друга, по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,7. Построить ряд распределения случайной величины ξ - общего числа попаданий.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$. Вероятность поражения мишени первым стрелком при одном выстреле равна $p_1 = 0,6$, следовательно, вероятность его промаха равна $q_1 = 0,4$. Для второго стрелка вероятность попадания в мишень равна $p_2 = 0,7$, а промаха - $q_2 = 0,3$. Каждый из стрелков сделал по два выстрела. Событие $\{\xi = 0\}$ означает, что каждый из стрелков промахнулся в обоих выстрелах. Остальные события описываются аналогично. Найдём вероятности $P(\xi = x_i)$, где $i = \overline{1; 5}$.

$$P(\xi = 0) = q_1 q_1 q_2 q_2 = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0144.$$

$$P(\xi=1) = p_1q_1q_2q_2 + q_1p_1q_2q_2 + q_1q_1p_2q_2 + q_1q_1q_2p_2 = 0,1104.$$

$$P(\xi=2) = p_1p_1q_2q_2 + q_1p_1p_2q_2 + p_1q_1p_2q_2 + q_1p_1q_2p_2 + p_1q_1q_2p_2 + q_1q_1p_2p_2 = 0,3124.$$

$$P(\xi=3) = p_1p_1p_2q_2 + p_1p_1q_2p_2 + p_1q_1p_2p_2 + q_1p_1p_2p_2 = 0,3864.$$

$$P(\xi=4) = p_1p_1p_2p_2 = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,1764.$$

В результате получаем следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	0,0144	0,1104	0,3124	0,3864	0,1764

Проверка: $0,0144 + 0,1104 + 0,3124 + 0,3864 + 0,1764 = 1$.

1.2.3 Из кошелька, в котором находятся три купюры номиналом 1 тысяча рублей и семь купюр номиналом 50 тысяч рублей, наугад извлекают пять купюр. Пусть ξ - число вынутых купюр номиналом 50 тысяч рублей. Построить ряд распределения случайной величины ξ .

Решение. Так как, в кошельке имеется только три купюры достоинством 1 тысяча рублей, то среди выбранных пяти купюр должно быть не менее двух купюр номиналом 50 тысяч рублей. Следовательно, дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5$.

Для вычисления вероятностей $P(\xi = x_i)$ воспользуемся классическим определением вероятностей. Так как, выбор 5 купюр из 10, которые имеются в кошельке, определяется только составом, без учёта порядка, то для вычисления числа исходов эксперимента используем сочетания: $P(\xi = 2) = \frac{C_7^2 \cdot C_3^3}{C_{10}^5} = \frac{1}{12}$,

$$P(\xi = 3) = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{5}{12}, P(\xi = 4) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^1}{C_{10}^5} = \frac{5}{12}, P(\xi = 5) = \frac{C_7^5 \cdot C_3^0}{C_{10}^5} = \frac{1}{12}.$$

В результате получаем следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	2	3	4	5
$P(\xi = x_i)$	1/12	5/12	5/12	1/12

$$\text{Проверка: } \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = 1.$$

1.2.4 Автомобилист пытается «завести» автомобиль. Автомобиль «заводится» независимо от других попыток водителя привести автомобиль в движение, с вероятностью $p = 0,7$. Каждая попытка автомобилиста «завести» автомобиль, занимает время τ . Найти распределение общего времени T , которое потребуется автомобилисту для того, чтобы автомобиль был готов к движению.

Решение. Дискретная случайная величина T может принимать следующие значения: $t_1 = \tau, t_2 = 2\tau, t_3 = 3\tau, \dots, t_n = n\tau, \dots$. Событие $\{T = \tau\}$ означает, что в

течение времени τ автомобиль «заведётся» с вероятностью $P(T = \tau) = 0,7$. Событие $\{T = 2\tau\}$ означает, что в течение времени τ автомобиль «не заведётся» с вероятностью $q = 1 - p = 0,3$, а в течение последующего времени τ он заработает с вероятностью $p = 0,7$. Следовательно, вероятность того, что случайная величина T примет значение 2τ равна $P(T = 2\tau) = 0,3 \cdot 0,7$.

Событие $\{T = n\tau\}$ означает, что в течение времени $(n-1)\tau$ автомобиль не «завёлся» в $(n-1)$ попытках с вероятностью $0,3^{n-1}$ и завёлся с последней попытки с вероятностью $p = 0,7$. То есть, вероятность того, что случайная величина T примет значение $n\tau$ равна $P(T = n\tau) = 0,3^{n-1} \cdot 0,7$. Таким образом, получаем ряд распределения общего времени T , которое потребуется автомобилисту для того, чтобы автомобиль был готов к движению:

$T = t_i$	τ	2τ	3τ	...	$n\tau$	...
$P(T = t_i)$	0,7	$0,3 \cdot 0,7$	$0,3^2 \cdot 0,7$	...	$0,3^{n-1} \cdot 0,7$	...

Проверка: $0,7 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,3^2 \cdot 0,7 + \dots + 0,3^{n-1} \cdot 0,7 + \dots = 0,7 \cdot (1 + 0,3 + 0,3^2 + \dots + 0,3^{n-1} + \dots) = 0,7 \cdot \frac{1}{1 - 0,3} = 0,7 \cdot \frac{1}{0,7} = 1$.

1.2.5 Студенту для допуска к экзамену по «Высшей математике» необходимо пройти два тестирования по различным темам. Тесты можно сдавать в любом порядке, независимо друг от друга, неограниченное число раз, главное пройти два теста. Каждый тест считается сданным, если студент ответит на 12 вопросов из 16 предложенных тестовых задач. Случайная величина ξ представляет собой количество тестов, выполненных студентом для допуска к экзамену. Построить ряд распределения случайной величины ξ .

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, \dots, x_n = n, \dots$. Студент сдаёт тест с вероятностью $p = 12/16 = 3/4$, и, соответственно, не сдаёт тест с вероятностью $q = 1/4$. Предположим, что студент сдавал тесты ровно n раз. Второй тест имеет номер n , а первый может иметь любой из оставшихся $n-1$ номеров. В $n-2$ попытках тесты не сданы с вероятностью $1/4^{n-2}$, а в двух оставшихся попытках тесты сдаются с вероятностью $(3/4)^2 = 9/16$. Следовательно, вероятность события $\{\xi = x_n\}$ определяется по формуле $P(\xi = x_n) = (n-1) \cdot \frac{1}{4^{n-2}} \cdot \frac{9}{16}$. Таким образом, получаем ряд распределения случайной величина ξ - количество тестов, выполненных студентом для допуска к экзамену:

$\xi = x_i$	2	3	4	...	n	...
$P(\xi = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{4} \cdot \frac{9}{16}$	$\frac{3}{4^2} \cdot \frac{9}{16}$	...	$(n-1) \cdot \frac{1}{4^{n-2}} \cdot \frac{9}{16}$	...

Проверка:
$$\frac{9}{16} + \frac{2}{4} \cdot \frac{9}{16} + \frac{3}{4^2} \cdot \frac{9}{16} + \dots + (n-1) \cdot \frac{1}{4^{n-2}} \cdot \frac{9}{16} + \dots = \frac{9}{16} \cdot \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{n-1}{4^{n-2}} + \dots \right) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{9}{16} \cdot \frac{16}{9} = 1.$$

Пояснение. Покажем, что $1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + \dots + (n-1) \cdot q^{n-2} + \dots = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Рассмотрим сходящийся ряд $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + \dots$ с непрерывно дифференцируемыми членами, причём $|q| < 1$. Его сумма равна $S = \frac{1}{1-q}$. Данный ряд можно почленно дифференцировать, причём сумма производных членов ряда равна производной от суммы ряда, то есть

$$S' = 1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + \dots + (n-1) \cdot q^{n-2} + \dots = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

В задаче значение q равно $1/4$.

1.2.6 Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	2	4	7	11
$P(\xi = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти функцию распределения случайной величины ξ и построить её график.

Решение. Построим функцию распределения $F(x) = P(\xi < x)$ случайной величины ξ .

1) Если $x \leq 2$, то $F(x) = 0$. Действительно, значений, меньших числа два, случайная величина ξ не принимает. Следовательно, при значениях $x \leq 2$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) = 0$.

2) Если $2 < x \leq 4$, то значение функции распределения равно $F(x) = 0,1$. Действительно, случайная величина принимает только одно значение $\xi = 2$, которое меньше любого из чисел из указанного промежутка. Следовательно, при значениях $2 < x \leq 4$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 2) = 0,1$.

3) Если $4 < x \leq 7$, то значение функции распределения равно $F(x) = 0,4$. Действительно, случайная величина принимает только два значения $\xi = 2$ или $\xi = 4$, которые меньше любого из чисел из выбранного промежутка. Случайная величина принимает значение 2 с вероятностью 0,1 и значение 4 с вероятностью 0,3; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная

величина ξ может принять (по теореме сложения вероятностей для несовместных событий) с вероятностью $0,1+0,3=0,4$. Таким образом, при значениях $4 < x \leq 7$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 2) + P(\xi = 4) = 0,1 + 0,3 = 0,4$.

4) Если $7 < x \leq 11$, то значение функции распределения равно $F(x) = 0,8$. Действительно, случайная величина принимает только три значения $\xi = 2$, или $\xi = 4$, или $\xi = 7$, которые меньше любого из чисел из рассматриваемого промежутка. Случайная величина принимает значение 2 с вероятностью 0,1, значение 4 с вероятностью 0,3, а значение 7 с вероятностью 0,4; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина ξ может принять (по теореме сложения вероятностей для несовместных событий) с вероятностью $0,1+0,3+0,4=0,8$. Таким образом, при значениях $7 < x \leq 11$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 2) + P(\xi = 4) + P(\xi = 7) = 0,8$.

5) Если $x > 11$, то значение функции распределения равно $F(x) = 1$. Действительно, случайная величина принимает только четыре значения $\xi = 2$, или $\xi = 4$, или $\xi = 7$, или $\xi = 11$, которые меньше любого из чисел из промежутка $(11; +\infty)$. Случайная величина принимает значение 2 с вероятностью 0,1, значение 4 с вероятностью 0,3, значение 7 с вероятностью 0,4, а значение 11 с вероятностью 0,2; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина ξ может принять (по теореме сложения вероятностей для несовместных событий) с вероятностью $0,1+0,3+0,4+0,2=1$. Таким образом, при значениях $x > 11$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 2) + P(\xi = 4) + P(\xi = 7) + P(\xi = 11) = 0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,2 = 1$.

Следовательно, функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 0,1, & 2 < x \leq 4, \\ 0,4, & 4 < x \leq 7, \\ 0,8, & 7 < x \leq 11, \\ 1, & x > 11. \end{cases}$$

График функции распределения приведён на рисунке 1.

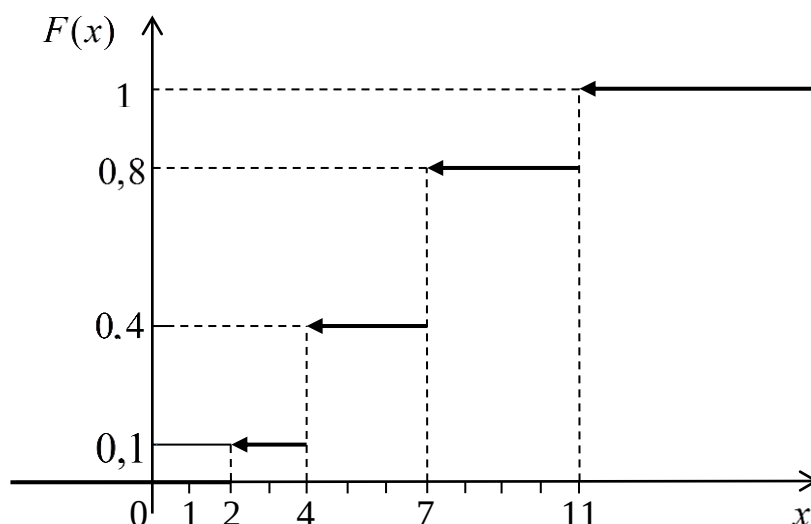


Рисунок 1 – График функции распределения

1.2.7 Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	2	3	5	8	11
$P(\xi = x_i)$	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2

Построить многоугольник распределения случайной величины ξ .

Решение. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат, причём по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i случайной величины ξ , а по оси ординат соответствующие вероятности p_i .

Построим точки $M_1(2; 0,3)$, $M_2(3; 0,1)$, $M_3(5; 0,3)$, $M_4(8; 0,1)$ и $M_5(11; 0,2)$. Соединив эти точки отрезками, получим искомый многоугольник распределения случайной величины ξ (рис. 2)

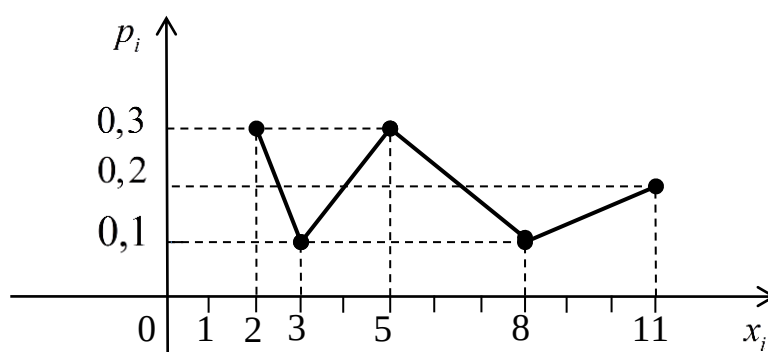


Рисунок 2 – График многоугольника распределения

1.2.8 Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	2	4	6	8	10
$P(\xi = x_i)$	0,15	0,05	0,35	0,25	0,20

Найти математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение σ_ξ для заданной случайной величины ξ . Вычислить теоретические и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков.

Решение. Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины ξ на их вероятности (формула 1.1.4):

$$M(\xi) = m_\xi = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = 2 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,05 + 6 \cdot 0,35 + 8 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,20 = 6,6.$$

Значение $\xi = 6$ случайная величина принимает с наибольшей вероятностью 0,35, а, следовательно, мода случайной величины равна $Mo(\xi) = 6$.

Можно вычислить дисперсию, исходя из определения дисперсии, однако лучше использовать формулы 1.1.8 или 1.1.9, которые упрощают вычисления. Искомая дисперсия равна

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 p_i - m_\xi^2 = 2^2 \cdot 0,15 + 4^2 \cdot 0,05 + 6^2 \cdot 0,35 + 8^2 \cdot 0,25 + 10^2 \cdot 0,2 - 6,6^2 = 6,44.$$

Найдём среднее квадратическое отклонение: $\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{6,44} \approx 2,54$.

Вычислим начальные моменты:

$$\nu_1 = M(\xi) = 6,6;$$

$$\nu_2 = M(\xi^2) = 2^2 \cdot 0,15 + 4^2 \cdot 0,05 + 6^2 \cdot 0,35 + 8^2 \cdot 0,25 + 10^2 \cdot 0,20 = 50;$$

$$\nu_3 = M(\xi^3) = 2^3 \cdot 0,15 + 4^3 \cdot 0,05 + 6^3 \cdot 0,35 + 8^3 \cdot 0,25 + 10^3 \cdot 0,20 = 408;$$

$$\nu_4 = M(\xi^4) = 2^4 \cdot 0,15 + 4^4 \cdot 0,05 + 6^4 \cdot 0,35 + 8^4 \cdot 0,25 + 10^4 \cdot 0,20 = 3492,8.$$

Находим центральные моменты:

$$\mu_1 = 0;$$

$$\mu_2 = D(\xi) = 6,44;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 408 - 3 \cdot 6,6 \cdot 50 + 2 \cdot 6,6^3 = -7,008;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 3492,8 - 4 \cdot 408 \cdot 6,6 + 6 \cdot 50 \cdot 6,6^2 - 3 \cdot 6,6^4 = 97,1792.$$

1.2.9 Известны математические ожидания независимых случайных величин ξ и η , а также математические ожидания их квадратов: $M(\xi) = 5$, $M(\eta) = 4$, $M(\xi^2) = 28$, $M(\eta^2) = 20$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 7\xi - 3\eta$.

Решение. Найдём дисперсии случайных величин по формуле 1.1.8: $D(\xi) = M(\xi^2) - m_\xi^2 = 28 - 5^2 = 3$, $D(\eta) = M(\eta^2) - m_\eta^2 = 20 - 4^2 = 4$. Для определения

искомых величин воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии.

$$M(Z) = M(7\xi - 3\eta) = 7 \cdot M(\xi) - 3 \cdot M(\eta) = 7 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 23;$$

$$D(Z) = D(7\xi - 3\eta) = 7^2 D(\xi) - 3^2 D(\eta) = 49 \cdot 3 - 9 \cdot 4 = 111.$$

1.2.10 Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины ξ : $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, а также заданы математические ожидания этой величины и её квадрата: $M(\xi) = 2,9$, $M(\xi^2) = 8,9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3 , соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3 случайной величины ξ . Записать ряд распределения случайной величины ξ .

Решение. Пользуясь тем, что сумма вероятностей возможных значений случайной величины ξ равна единице, а также приняв во внимание, что $M(\xi) = 2,9$, $M(\xi^2) = 8,9$, составляем следующую систему трёх линейных уравнений относительно неизвестных вероятностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 = 2,9, \\ 2^2 p_1 + 3^2 p_2 + 4^2 p_3 = 8,9. \end{cases}$$

Решая полученную систему линейных уравнений, находим искомые вероятности: $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,2$. Ряд распределения имеет вид:

$\xi = x_i$	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	0,3	0,5	0,2

1.2.11 Дискретная случайная величина ξ может принять только два возможных значения: x_1 и x_2 , причём $x_2 > x_1$. Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_1 , равна $p_1 = 0,2$. Найти закон распределения случайной величины ξ , если известны математическое ожидание и дисперсия случайной величины: $M(\xi) = 4,6$, а $D(\xi) = 0,64$.

Решение. Так как сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины ξ равна единице, то вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_2 , равна $p_2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

Запишем ряд распределения случайной величины ξ :

$\xi = x_i$	x_1	x_2
$P(\xi = x_i)$	0,2	0,8

Для нахождения x_1 и x_2 необходимо составить два уравнения, которые связывают эти числа. С этой целью выразим математическое ожидание и дисперсию через значения случайной величины x_1 и x_2 . Найдём математическое

ожидание $M(\xi)$: $M(\xi) = 0,2x_1 + 0,8x_2$. По условию $M(\xi) = 4,6$, следовательно, $0,2x_1 + 0,8x_2 = 4,6$. Второе уравнение составляем, исходя из условия $D(\xi) = 0,64$

и формулы нахождения дисперсии $D(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m_\xi^2$:

$0,2x_1^2 + 0,8x_2^2 - 4,6^2 = 0,64$. В результате имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,8x_2 = 4,6, \\ 0,2x_1^2 + 0,8x_2^2 = 21,8. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим два решения: $x_1 = 3$; $x_2 = 5$ и $x_1 = 6,2$; $x_2 = 4,2$. По условию $x_2 > x_1$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение: $x_1 = 3$; $x_2 = 5$. В результате получаем следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	3	5
$P(\xi = x_i)$	0,2	0,8

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1. В каждой задаче определена дискретная случайная величина ξ . Для случайной величины ξ записать ряд распределения и построить многоугольник распределения этой случайной величины. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ и построить её график. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ случайной величины ξ . Найти вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ принимает значение не менее α , но не более β .

1.3.1.1 Клиент банка при расчётах использует кредитную карточку с вероятностью 0,4, а в остальных случаях осуществляет оплату наличными денежными средствами. Клиент банка произвёл четыре покупки. Рассматривается случайная величина ξ - число расчетов, при которых клиент банка воспользовался кредитной карточкой. Значение $\alpha = 3$, а $\beta = 4$.

1.3.1.2 Из банковской ячейки, которая содержит три слитка золота и пять слитков платины, наугад извлекают три слитка. Пусть ξ - число вынутых слитков платины. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины ξ . Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 3$.

1.3.1.3 Два предприятия поставляют продукцию в один и тот же регион. Предприятия независимо друг от друга по возможности делают две поставки в месяц в данный регион. Первое предприятие может сделать каждую поставку в данный регион с вероятностью 0,3, а второе - с вероятностью 0,4. Случайная величина ξ - общее число поставок предприятиями за месяц в регион. Значение $\alpha = 1$, а $\beta = 3$.

1.3.1.4 Охотник, имеющий шесть патронов, стреляет в цель до первого попадания, или пока не израсходует все патроны. Вероятность попадания при

каждом выстреле равна 0,3. Случайная величина ξ - общее число израсходованных патронов. Значение $\alpha = 3$, а $\beta = 5$.

1.3.1.5 В партии из восьми изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое проверяют, пока не выберут бракованное изделие. Случайная величина ξ - общее число проверенных изделий. Значение $\beta = 2$.

1.3.2. Дискретная случайная величина ξ задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	-4	-1	2	5	7
$P(\xi = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Построить многоугольник распределения случайной величины ξ . Найти функцию распределения случайной величины ξ и построить её график. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, медиану $Me(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ для заданной случайной величины ξ .

1.3.3. Дискретная случайная величина ξ может принять только два возможных значения: x_1 и x_2 , причём $x_2 < x_1$. Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_1 , равна $p_1 = 0,9$. Найти закон распределения случайной величины ξ , если известны математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины: $M(\xi) = 3,8$, а $\sigma_\xi = 0,6$.

1.3.4. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины ξ : $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$, а также заданы дисперсия этой величины и её математическое ожидание: $D(\xi) = 2,44$, $M(\xi) = 3,6$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3 , соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3 случайной величины ξ . Записать ряд распределения случайной величины ξ .

1.3.5. Известны математические ожидания независимых случайных величин ξ и η , то есть $M(\xi) = 6$ и $M(\eta) = 5$, а также математические ожидания их квадратов, то есть $M(\xi^2) = 40$ и $M(\eta^2) = 30$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 4\xi + 5\eta$.

1.3.6. Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	3	4	5	6	7
$P(\xi = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,25	0,15

Вычислить теоретические и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков случайной величины ξ .

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 В каждой задаче задана дискретная случайная величина ξ . Для случайной величины ξ построить ряд распределения и многоугольник распределения этой случайной величины. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ и построить её график. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ случайной величины ξ . Найти вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ принимает значение не менее α , но не более β . Вычислить теоретические и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков случайной величины ξ .

1.4.1.1 Вероятность того, что клиент банка приобретёт облигацию пятипроцентного займа, равна 0,7. Случайная величина ξ – число облигаций пятипроцентного займа, среди наудачу приобретённых 6 облигаций. Значения параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

1.4.1.2 У семейной пары имеются акции предприятия А и предприятия В. Муж владеет пятью акциями предприятия А и семью акциями предприятия В, жена – восемью и четырьмя акциями, соответственно. На семейном совете решено продать четыре акции, по две от каждого члена семьи. Случайная величина ξ – число выбранных на продажу акций предприятия А. Значение параметра $\alpha = 3$.

1.4.1.3 Холодильник «Атлант ХМ 4007» можно приобрести только в одном из шести имеющихся магазинов. Покупатель последовательно объезжает магазины, пока не находит холодильник указанной марки. Случайная величина ξ – число магазинов, которые посетил покупатель. Значение параметра $\beta = 4$.

1.4.1.4 Вероятность того, что купюра имеет повреждение, равна 0,2. Случайная величина ξ – число купюр имеющих повреждение, среди наудачу выбранных шести купюр. Значения параметров: $\alpha = 3$, $\beta = 5$.

1.4.1.5 Из цеха, имеющего в наличие три бетонные плиты марки ФБС 9.4.6 и девять плит марки ФБС 24.40.6, случайным образом на склад отгружают шесть плит. Случайная величина ξ – число бетонных плит марки ФБС 24.40.6, отгруженных из цеха на склад. Значение параметра $\alpha = 4$.

1.4.1.6 Трактор марки «Беларус - 892» находится только на одной из восьми из имеющихся стоянок предприятия. Для работы потребовался трактор этой марки. Инженер предприятия связывается по селектору последовательно с каждой стоянкой, пока не находит трактор указанной марки. Случайная величина ξ – число стоянок, с которыми связался инженер предприятия по селектору. Значение параметра $\beta = 5$.

1.4.1.7 Вероятность того, что банкнота имеет повреждение, равна 0,4. Случайная величина ξ – число банкнот, которые имеют повреждения, среди наудачу выбранных семи банкнот. Значения параметров: $\alpha = 4$, $\beta = 6$.

1.4.1.8 В наличие имеются девять столов, пять из которых имеют светлый цвет. Наудачу выбирают четыре стола. Случайная величина ξ – число столов, которые не имеют светлый цвет. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.9 В партии из 10 изделий три изделия являются бракованными. Для контроля их качества случайным образом отбирают пять изделий. Случайная величина ξ – число бракованных изделий среди отобранных изделий. Значение параметра $\beta = 2$.

1.4.1.10 Каждый третий лотерейный билет, который учувствует в лотерее, является выигрышным. Случайная величина ξ – число выигрышных лотерейных билетов, среди наудачу выбранных пяти лотерейных билетов. Значения параметров: $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

1.4.1.11 В сейфе имеется пять слитков серебра, четыре слитка золота и три слитка платины. Из сейфа наугад извлекают шесть слитков. Случайная величина ξ – число вынутых из сейфа слитков золота. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.12 Только на одном из пяти складов имеются телевизоры марки «Горизонт 47 LCD 825 Infinitv FulHD». Для выполнения заказа на доставку телевизора этой марки дилер компании последовательно проверяет по компьютеру наличие телевизоров на складах. Случайная величина ξ – число складов, которые проверит дилер на наличие телевизоров необходимой марки. Значение параметра $\beta = 3$.

1.4.1.13 На олимпиаде по математике студентам предложили решить пять задач. Каждая задача может быть правильно решена студентом с вероятностью равной 0,4. Случайная величина ξ – число правильно решённых студентом задач. Значения параметров: $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

1.4.1.14 В наличие имеются 4 кредитные и 6 дебетовые карты. Случайным образом выбирают пять карт. Случайная величина ξ – число выбранных кредитных карт. Значение параметра $\alpha = 1$.

1.4.1.15 Слитки платины имеются только в одном из шести банков. Клиент обращается последовательно в банки до тех пор, пока не находит банк, предлагающий на продажу слитки платины. Случайная величина ξ – число банков, в которые может обратиться клиент. Значение параметра $\beta = 3$.

1.4.1.16 На экзаменационной сессии студент получает удовлетворительную оценку по экзамену с вероятностью 0,8. Случайная величина ξ – число сданных экзаменов с удовлетворительной оценкой, если во время сессии необходимо сдать пять экзаменов. Значения параметров: $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

1.4.1.17 В гаражном кооперативе, состоящем из 12 гаражей, находится восемь автомобилей «Opel» и четыре автомобиля «BMW». За сутки из гаражного кооператива выехало шесть автомобилей. Случайная величина ξ – число автомобилей «BMW», выехавших за сутки из гаражного кооператива. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.18 Каждый четвёртый компьютер, который установлен на фирме, производства фирмы «Samsung». Компьютеры располагаются в семи кабинетах фирмы. Сотрудник фирмы последовательно обходит кабинеты, пока не находит

компьютер указанной марки. Случайная величина ξ – число кабинетов, в которые зайдёт сотрудник фирмы. Значение параметра $\beta = 5$.

1.4.1.19 Повреждение дебетовой карты происходит с вероятностью 0,2. Случайная величина ξ – число дебетовых карт, которые имеют повреждение, среди восьми наудачу дебетовых карт. Значения параметров: $\alpha = 5$, $\beta = 7$.

1.4.1.20 Из колоды, содержащей 36 карт, берут наудачу 5 карт. Случайная величина ξ – число вынутых тузов среди взятых карт. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.21 Мобильный телефон марки «Samsung SGH 780» можно приобрести только в одной из имеющихся семи торговых точек. Покупатель последовательно обходит торговые точки, пока не находит телефон указанной марки. Случайная величина ξ – число торговых точек, которые посетил покупатель. Значение параметра $\beta = 5$.

1.4.1.22 Вероятность того, что выпускник экономического факультета будет работать по специальности, равна 0,8. Случайная величина ξ – число выпускников, которые работают по специальности, среди наудачу выбранных восьми выпускников. Значения параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

1.4.1.23 Вероятность того, что изделие произведённое первым станком-автоматом удовлетворяет стандарту, равна 0,9, для второго станка-автомата – 0,8, для третьего – 0,7. С каждого станка-автомата наугад берут по одному изделию. Случайная величина ξ – число изделий, удовлетворяющих стандарту. Значение параметра $\alpha = 1$.

1.4.1.24 Два стрелка стреляют по мишени, делая по два выстрела. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,6, а второй – с вероятностью 0,7. Случайная величина ξ – число попаданий в мишень обоими стрелками. Значение параметра $\beta = 2$.

1.4.1.25 Вероятность выигрыша в лотерее на один билет равна 0,2. Случайная величина ξ – число билетов лотереи, по которым можно получить выигрыш, если всего приобретено шесть билетов. Значения параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

1.4.1.26 Каждый из двух автоматов произвёл по две детали. Вероятность допустить брак для первого автомата равна 0,2, для второго – 0,3. Случайная величина ξ – число бракованных деталей, из четырёх произведённых деталей. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.27 В электрической цепи установлено пять одинаковых триодов, один из которых неисправен. Последовательно проводят тестирование триодов, до обнаружения неисправного. Случайная величина ξ – число протестированных триодов. Значение параметра $\beta = 3$.

1.4.1.28 Вероятность сдать экзамен на «10 баллов» для первого студента равна 0,4, а для второго – 0,7. Каждый из студентов сдал по два экзамена. Случайная величина ξ – число экзаменов, сданных обоими студентами на «10 баллов». Значения параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

1.4.1.29 Вероятность приёма каждого из пяти сигналов равна 0,7. Случайная величина ξ – число принятых сигналов. Значение параметра $\alpha = 3$.

1.4.1.30 В партии из восьми фотоаппаратов один фотоаппарат бракованный. Чтобы его обнаружить, выбирают один фотоаппарат за другим, и каждый проверяют. Случайная величина ξ – число проверенных фотоаппаратов. Значение параметра $\beta = 5$.

2 НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Содержание: непрерывные случайные величины (НСВ), функция распределения, плотность распределения вероятностей, числовые характеристики НСВ (математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты k -го порядка).

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Случайная величины ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить коэффициент a . Найти функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ и вероятность неравенства $\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Для определения параметра a воспользуемся условием нормировки (2.1.4).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\pi/2} a \cos x dx + \int_{\pi/2}^{+\infty} 0 dx = 1; \quad a \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1; \quad a \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 1; \quad a = 1.$$

Следовательно, плотность распределения задана выражением

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдём функцию распределения по формуле (2.1.2).

$$\text{Если } x < 0, \text{ то } F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

Если $0 \leq x \leq \pi/2$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \cos x dx = \sin x \Big|_0^x = \sin x.$$

Если $x > \pi/2$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^x 0 dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание по формуле (2.1.6).

$$M(\xi) = m_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx = (x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Для вычисления интеграла использовалась формула интегрирования по частям. Вычислим дисперсию по формуле (2.1.8).

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - m_{\xi}^2 = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx - \left(\frac{\pi - 2}{2} \right)^2 = (2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x) \Big|_0^{\pi/2} - \left(\frac{\pi - 2}{2} \right)^2 = \pi - 3.$$

Для вычисления интеграла дважды использовалась формула интегрирования по частям. Вычислим среднее квадратическое отклонение по формуле (2.1.9): $\sigma_{\xi} = \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{\pi - 3}$.

Для вычисления вероятности неравенства $\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{2}$ воспользуемся формулой (2.1.5).

$$P\left(\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{2}\right) = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2.2.2 Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ и вероятность попадания случайной величины ξ в отрезок $[0; 0,5]$.

Решение. Находим плотность распределения вероятностей по формуле (2.1.3).

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 3x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание по формуле (2.1.6).

$$M(\xi) = m_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Вычислим дисперсию по формуле (2.1.8).

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - m_{\xi}^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} x^5 \Big|_0^1 - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение по формуле (2.1.9):

$$\sigma_{\xi} = \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0,194.$$

Для вычисления вероятности попадания случайной величины ξ в отрезок $[0; 0,5]$ воспользуемся формулой (2.1.5).

$$P(0 \leq \xi \leq 0,5) = \int_0^{0,5} 3x^2 dx = F(0,5) - F(0) = 0,5^3 - 0^3 = 0,125.$$

2.2.3 Случайная величины ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 3\cos 3x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Найти моду $Mo(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ .

Решение. Для определения моды случайной величины найдём максимум плотности распределения на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$. Находим производную плотности:

$$f'(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x = 0, \quad x = \frac{\pi n}{3}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}. \text{ Если } n = 0, \text{ то } x = 0 \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right], \text{ а это}$$

конец отрезка. При других n , критические точки не принадлежат заданному отрезку. Значения плотности вероятности на концах отрезка: $f(0) = 3$, $f(\pi/6) = 0$. Следовательно, мода случайной величины равна $Mo(\xi) = 3$.

Найдём медиану $Me(\xi) = m_e$, исходя из определения медианы:

$$P(\xi < m_e) = P(\xi > m_e),$$

или, что то же самое, $2P(\xi < m_e) = 1$. Учитывая, что по условию возможные значения случайной величины положительны, перепишем это равенство в виде:

$$P(\xi < m_e) = 0,5,$$

или

$$\int_0^{m_e} 3\cos 3x dx = \sin 3m_e = 0,5.$$

Из последнего равенства, имеем $3m_e = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, искомая медиана равна $m_e = \frac{\pi}{18}$.

2.2.4 Случайная величины ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8x - 11, & \text{если } 2 < x < 6; \\ 0, & \text{если } x \leq 2 \text{ или } x \geq 6. \end{cases}$$

Найти моду $Mo(\xi)$, математическое ожидание $M(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ .

Решение. Для определения моды случайной величины найдём максимум плотности распределения. Преобразуем выражение для плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = -x^2 + 8x - 16 + 5 \text{ или } f(x) = 5 - (x - 4)^2.$$

Следовательно, $f(x) \leq 5$ и плотность распределения вероятностей достигает своего максимального значения, которое равно 5, при значении переменной $x = 4$. Тогда мода случайной величины равна $Mo(\xi) = 4$. Это же значение моды можно получить, используя методы дифференциального исчисления.

Так как кривая распределения симметрична относительно прямой $x = 4$, то математическое ожидание равно $M(\xi) = 4$ и медиана так же принимает значение $Me(\xi) = 4$.

2.2.5 Случайная величины ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \text{ или } x \geq 1. \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков.

Решение. Найдём начальные моменты по формуле $\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$.

Учитывая, что на интервалах $(-\infty; 0]$ и $[1; +\infty)$ значения плотности распределения вероятностей равны нулю, то формула нахождения начальных моментов принимает вид:

$$\begin{aligned} \nu_k &= \int_0^1 x^k f(x) dx. \\ \nu_1 &= \int_0^1 x^1 \cdot x dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \\ \nu_2 &= \int_0^1 x^2 \cdot x dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\nu_3 = \int_0^1 x^3 \cdot x \, dx = \int_0^1 x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

$$\nu_4 = \int_0^1 x^4 \cdot x \, dx = \int_0^1 x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Найдём центральные моменты. Центральный момент первого порядка любой случайной величины равен нулю. Для вычисления центральных моментов более высокого порядка воспользуемся формулами, выражающими центральные моменты через начальные моменты случайной величины.

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}.$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \frac{1}{5} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{27} = \frac{13}{540}.$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = \frac{1}{6} - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \frac{1}{81} = \frac{14}{135}.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > \pi. \end{cases}$$

Определить коэффициент a . Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ и вероятность неравенства $0 < \xi < \frac{\pi}{4}$.

2.3.2 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 x, & \text{если } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{если } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить коэффициент a . Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$. Найти вероятность того, что в двух независимых испытаниях случайная величина ξ будет больше $\frac{\pi}{4}$.

2.3.3 Плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины ξ определяется формулой (распределение Лапласа) $f(x) = a \cdot e^{-|x|}$. Определить коэффициент a . Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$.

2.3.4 Плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины ξ определяется формулой (распределение Коши) $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$. Определить коэффициент a . Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$, моду $Mo(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ . Найти вероятность неравенства $\xi > \sqrt{3}$.

2.3.5 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

Определить коэффициент a . Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$. Найти вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на значение равное 0,5.

2.3.6 Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \frac{x^2 - x}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины ξ . Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины ξ . Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ моду $Mo(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ . Найти вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $[0,5;1,5]$.

2.3.7 Функция распределения случайной величины ξ имеет вид (закон арксинуса)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1; \\ a + b \cdot \arcsin x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Определить коэффициенты a и b . Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины ξ . Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины ξ . Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$. Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение не меньше 0,5, но не более 1.

2.3.8 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти моду $Mo(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ . Найти вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$.

2.3.9 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5, & \text{если } 1 < x < 5; \\ 0, & \text{если } x \leq 1 \text{ или } x \geq 5. \end{cases}$$

Найти моду $Mo(\xi)$, математическое ожидание $M(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ .

2.3.10 Доказать, что для любой непрерывной случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю.

2.3.11 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } 0 < x < 2; \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \text{ или } x \geq 2. \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков.

2.3.12 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } 1 < x < 2; \\ 0, & \text{если } x \leq 1 \text{ или } x \geq 2. \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 В каждой задаче варианта задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины ξ . Определить постоянную величину a . Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ . Построить график функции распределения и плотности распределения вероятностей случайной величины ξ . Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, медиану $Me(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ случайной величины. Найти вероятность того, что в результате, по крайней мере, в одном из трёх независимых испытаний случайная величина ξ примет значение не менее α , но не более β .

2.4.1.1

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 2x, & |x| \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}.$$

2.4.1.2

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 2x, & |x| \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{4}.$$

2.4.1.3

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{2^x}{\ln 2}, & |x| \leq 2; \\ 0, & |x| > 2; \end{cases}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1.$$

2.4.1.4

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 3x, & |x| \leq \frac{\pi}{6}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12}, \beta = \frac{\pi}{4}.$$

2.4.1.5

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 3x, & |x| \leq \frac{\pi}{6}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{12}, \beta = \frac{\pi}{12}.$$

2.4.1.6

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{3^x}{\ln 3}, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$\alpha = -0,5, \beta = 0,5.$$

2.4.1.7

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 \frac{x}{2}, & |x| \leq \pi; \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}.$$

2.4.1.8

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 \frac{x}{2}, & |x| \leq \pi; \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{6}, \beta = 0.$$

2.4.1.9

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{4^x}{\ln 4}, & |x| \leq 2; \\ 0, & |x| > 2; \end{cases}$$

$$\alpha = -1, \beta = 1.$$

2.4.1.10

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 \frac{x}{4}, & |x| \leq 2\pi; \\ 0, & |x| > 2\pi; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{3\pi}{4}.$$

2.4.1.11

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 \frac{x}{4}, & |x| \leq 4\pi; \\ 0, & |x| > 4\pi; \end{cases}$$

$$\alpha = -\pi, \beta = 2\pi.$$

2.4.1.12

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{5^x}{\ln 5}, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$\alpha = -3, \beta = 0.$$

2.4.1.13

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 4x, & |x| \leq \frac{\pi}{8}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{8}; \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{16}, \beta = \frac{\pi}{16}.$$

2.4.1.14

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 4x, & |x| \leq \frac{\pi}{8}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{8}; \end{cases}$$

$$\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{16}.$$

2.4.1.15

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{6^x}{\ln 6}, & |x| \leq 3; \\ 0, & |x| > 3; \end{cases}$$

$$\alpha = -2, \beta = 1.$$

2.4.1.16

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 \frac{x}{6}, & |x| \leq 3\pi; \\ 0, & |x| > 3\pi; \end{cases}$$

$$\alpha = \pi, \beta = 2\pi.$$

2.4.1.17

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 \frac{x}{6}, & |x| \leq 3\pi; \\ 0, & |x| > 3\pi; \end{cases}$$

$$\alpha = -\pi, \beta = 3\pi.$$

2.4.1.18

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{7^x}{\ln 7}, & |x| \leq 2; \\ 0, & |x| > 2; \end{cases}$$

$$\alpha = -1, \beta = 2.$$

2.4.1.19

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 5x, & |x| \leq \frac{\pi}{10}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{10}; \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{20}, \beta = 0.$$

2.4.1.20

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 5x, & |x| \leq \frac{\pi}{10}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{10}; \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{10}, \beta = \frac{\pi}{20}.$$

2.4.1.21

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{8^x}{\ln 8}, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1.$$

2.4.1.22

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 \frac{x}{8}, & |x| \leq 4\pi; \\ 0, & |x| > 4\pi; \end{cases}$$

$$\alpha = 2\pi, \beta = 3\pi.$$

2.4.1.23

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 \frac{x}{8}, & |x| \leq 4\pi; \\ 0, & |x| > 4\pi; \end{cases}$$

$$\alpha = -3\pi, \beta = -2\pi.$$

2.4.1.24

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{9^x}{\ln 9}, & |x| \leq 2; \\ 0, & |x| > 2; \end{cases}$$

$$\alpha = -1, \beta = 0.$$

2.4.1.25

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 6x, & |x| \leq \frac{\pi}{12}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{12}; \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{24}, \beta = \frac{\pi}{24}.$$

2.4.1.26

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 6x, & |x| \leq \frac{\pi}{12}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{12}; \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{36}, \beta = \frac{\pi}{36}.$$

2.4.1.27

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{10^x}{\ln 10}, & \text{если } |x| \leq 2; \\ 0, & \text{если } |x| > 2; \end{cases}$$

$$\alpha = -1, \beta = 3.$$

2.4.1.28

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2 \frac{x}{10}, & |x| \leq 5\pi; \\ 0, & |x| > 5\pi; \end{cases}$$

$$\alpha = -2\pi, \beta = \pi.$$

2.4.1.29

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \sin^2 \frac{x}{10}, & |x| \leq 5\pi; \\ 0, & |x| > 5\pi; \end{cases}$$

$$\alpha = \pi, \beta = 4\pi.$$

2.4.1.30

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{12^x}{\ln 12}, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$\alpha = -1, \beta = 4.$$

3 ОСНОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1 Содержание: одноточечное (вырожденное) распределение, распределение Бернулли (двухточечное), биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение, распределение Пуассона.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Производится ряд попыток включения устройства. Каждая попытка заканчивается успехом (включением устройства) независимо от других с вероятностью $p = 0,64$. Найти распределение случайной величины ξ - числа попыток включения устройства, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что устройство включится, по крайней мере, с третьей попытки.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots, x_n = n, \dots$. Событие $\{\xi = 1\}$ означает, что устройство заработает с первой попытки с вероятностью $P(\xi = 1) = 0,64$. Событие $\{\xi = 2\}$ означает, что устройство не заработает с первой попытки с вероятностью $q = 1 - p = 0,36$, а со второй попытки включения сработает с вероятностью $p = 0,64$. Следовательно, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение 2 равна $P(\xi = 2) = 0,36 \cdot 0,64$.

Событие $\{\xi = n\}$ означает, что устройство не заработало в первых $(n - 1)$ попытках с вероятностью $0,36^{n-1}$ и включилось с последней попытки с вероятностью $p = 0,64$. То есть, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение n равна $P(\xi = n) = 0,36^{n-1} \cdot 0,64$. Таким образом, число произведённых попыток ξ есть величина, распределённая по геометрическому закону: $P(\xi = n) = pq^{n-1} = 0,64 \cdot 0,36^{n-1}$. При этом ряд распределения заданной случайной величины имеет вид:

$\xi = x_i$	1	2	3	...	n	...
$P(\xi = x_i)$	0,64	$0,36 \cdot 0,64$	$0,36^2 \cdot 0,64$	...	$0,36^{n-1} \cdot 0,64$	...

Найдём математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$:

$$M(\xi) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,64} = 1,5625,$$

$$D(\xi) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0,64}{0,64^2} \approx 0,8789, \quad \sigma(\xi) = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = \frac{\sqrt{1-0,64}}{0,64} = 0,9375.$$

Вычислим вероятность того, что устройство включится, по крайней мере, с третьей попытки. Для этого переходим к противоположному событию: устройство заработает при его включение в первой или во второй попытке.

$$P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) = 1 - 0,64 - 0,36 \cdot 0,64 = 0,1296.$$

3.2.2 Имеется 7 банковских карт, среди которых 3 являются неисправными и на вид они неотличимы от исправных банковских карт. Наугад берутся 4 банковские карты и проходят проверку. Найти распределение случайной величины ξ - числа исправных банковских карт, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что среди выбранных банковских карт, по крайней мере, одна неисправна.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$. Так как имеется 7 банковских карт, среди которых 4 карты исправные, а затем среди 7 карт выбираются случайным образом 4 карты, то случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение:

$$P(\xi = x_i) = \frac{C_M^{x_i} C_{N-M}^{n-x_i}}{C_N^n} = \frac{C_4^{x_i} C_3^{4-x_i}}{C_7^4}.$$

При этом ряд распределения заданной случайной величины имеет вид:

$\xi = x_i$	1	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	4/35	18/35	12/35	1/35

Вероятность того, что банковская карта исправна, равна $p = 4/7$, а вероятность того, что она неисправна $q = 3/7$. Найдём математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$:

$$M(\xi) = np = 4 \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{7} \approx 2,29, \quad D(\xi) = npq \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = 4 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(1 - \frac{4-1}{7-1}\right) = \frac{24}{49},$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{npq \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \sqrt{4 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{7-4}{7-1}\right)} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2}{7} \cdot \sqrt{6}.$$

Вычислим вероятность того, что среди выбранных банковских карт, по крайней мере, две банковские карты исправны. Для этого переходим к противоположному событию: среди выбранных четырёх банковских карт ровно одна исправная.

$$P(2 \leq \xi \leq 4) = 1 - P(\xi = 1) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35} \approx 0,8857.$$

3.2.3 Вероятность того, что кольцо содержит бриллиант, равна 0,4. Наудачу выбрали четыре кольца. Найти распределение случайной величины ξ - числа колец, содержащих бриллиант, функцию распределения случайной величины, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что среди выбранных колец ровно одно кольцо содержит бриллиант.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4$. Так как вероятность того, что кольцо будет содержать бриллиант одна и та же, среди выбранных четырёх колец, то случайная величина ξ имеет биномиальное распределение

$$P(\xi = x_i) = C_4^{x_i} 0,4^{x_i} (1 - 0,4)^{4-x_i} = C_4^{x_i} \cdot 0,4^{x_i} \cdot 0,6^{4-x_i}, \quad i = \overline{1;5}.$$

При этом ряд распределения заданной случайной величины имеет вид:

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

Находим функцию распределения по формуле

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} C_4^{x_i} p^{x_i} q^{4-x_i}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,1296, & 0 < x \leq 1, \\ 0,4752, & 1 < x \leq 2, \\ 0,8208, & 2 < x \leq 3, \\ 0,9744, & 3 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$:

$$M(\xi) = np = 4 \cdot 0,4 = 1,6,$$

$$D(\xi) = npq = 4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,96, \quad \sigma(\xi) = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{0,96} \approx 0,9798.$$

Вычислим вероятность того, что среди выбранных колец ровно одно кольцо содержит бриллиант.

$$P(\xi = 1) = C_4^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^3 = 0,3456.$$

3.2.4 Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя любого элемента в течение времени τ равна $p = 0,003$. Найти распределение случайной величины ξ - число элементов, вышедших из строя за время τ , её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что за время τ откажет ровно 2 элемента.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{n+1} = 1000$. Так как вероятность $p = 0,003$ выхода из строя одного элемента мала, а число элементов $n = 1000$ велико, то случайная величина ξ подчиняется закону Пуассона: $P_n(\xi = x_i) = \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} e^{-\mu}$, где $\mu = np$. Найдём значение $\mu = 1000 \cdot 0,003 = 3$. Тогда закон распределения имеет вид:

$P_{1000}(\xi = x_i) = \frac{3^{x_i}}{x_i!} e^{-3}$. Найдём математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$:

$$M(\xi) = \mu = 3, \quad D(\xi) = \mu = 3,$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

Вычислим вероятность того, что за время τ откажет ровно $x_3 = 2$ элемента.

$$P_{1000}(\xi = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0,22404.$$

Вероятность $P_{1000}(\xi = 2)$ при значениях $\mu = 3$ и $m = x_3 = 2$ находим по таблице (приложение 1).

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Производятся последовательные испытания десяти приборов одной партии на надёжность, причём вероятность того, что прибор в партии надежен, равна 0,8. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий прибор оказался надёжным. Найти распределение случайной величины ξ - число проверенных приборов, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что будет проверено не менее двух, но не более пяти приборов.

3.3.2 Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 бракованных, выбраны случайным образом четыре изделия для проверки их качества. Найти распределение случайной величины ξ - числа бракованных изделий, содержащихся в выборке, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что в выборке содержатся не менее двух бракованных изделий.

3.3.3 Вероятность того, что дом будет сдан в эксплуатацию в срок, равна 0,8. Организация занимается строительством пяти домов. Найти распределение случайной величины ξ - число домов, которые организация сдала в срок, функцию распределения случайной величины, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что среди строящихся пяти домов не менее четырёх домов организация сдаст в отведённый срок.

3.3.4 Предприятие поставило на базу партию из 2000 курток. Вероятность того, что куртка содержит брак, равна 0,002. Найти распределение случайной величины ξ - число курток, которые содержат брак, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что не менее четырёх курток в партии содержат брак.

3.3.5 Однотипные приборы испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого прибора пройти испытания равны 0,6 и независимы. Испытания заканчиваются после выхода из строя первого же прибора. Найти распределение случайной величины ξ - число проведённых испытаний, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что будет проведено не более двух испытаний.

3.3.6 Вероятность того, что человек дозвонится до своего друга в течение времени τ , равна 0,9. Шесть человек одновременно произвели звонки. Найти распределение случайной величины ξ - число человек, которые дозвонятся до своих друзей в течение времени τ . Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что среди шести человек, которые произвели звонки, ровно четыре дозвонятся до своего друга.

3.3.7 Радиоаппаратура содержит 1000 одинаково надёжных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,001. Найти распределение

случайной величины ξ - число возможно отказавших элементов. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность отказа радиоаппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

3.3.8 В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Найти распределение случайной величины ξ - число стандартных деталей среди двух отобранных деталей. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей не менее одной стандартной?

3.3.9 Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Стрелку последовательно выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнётся. Найти распределение случайной величины ξ - числа патронов, выданных стрелку. Найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и наивероятнейшее число патронов, выданных стрелку.

3.3.10 Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Найти распределение случайной величины ξ - число абонентов, которые позвонят на коммутатор в течение часа. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят пять абонентов?

3.3.11 Для работы восьми станков время от времени используется электрическая энергия. Снабжение рассчитано на пять единиц энергии. Каждому станку с одной и той же вероятностью p может потребоваться единица энергии. Определить вероятность перегрузки электросети, если известно, что станки работают независимо друг от друга, и каждый из них потребляет энергию в среднем 10 минут в течение часа.

3.3.12 Среди 25 студентов группы, в которой десять девушек, разыгрывается пять билетов. Найти распределение случайной величины ξ - числа девушек среди обладателей билетов. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов не менее девяти девушек?

3.3.13 В радиоаппаратуре за 10000 часов непрерывной работы происходит замена десяти ламп. Вычислить вероятность выхода из строя радиоаппаратуры из-за выхода из строя ламп за 100 часов непрерывной работы.

3.3.14 Сколько игральные кости необходимо бросить для того, чтобы математическое ожидание числа костей, на которых выпало три очка, равнялось шести?

3.3.15 Из кошелька на стол высыпали 25 монет. Какова вероятность того, что число монет, упавших гербом вниз, заключено между 8 и 15, включая и эти два крайних значения?

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 В каждой задаче определена дискретная случайная величина ξ . Для случайной величины ξ определить закон распределения в аналитическом виде. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение σ_ξ случайной величины ξ . Найти вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ принимает значение не менее α , но не более β .

3.4.1.1 Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,0004. Рассматривается случайная величина ξ - число изделий, которые не выдержат испытания, среди проверенных 1000 изделий. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.2 Каждый пятый студент, который сдаёт экзамен по предмету «Высшая математика», не доволен оценкой, полученной при сдаче экзамена. Группа из 11 студентов сдавали экзамен по предмету «Высшая математика». Рассматривается случайная величина ξ - число студентов, которые не довольны своей оценкой по предмету «Высшая математика». Значение $\alpha = 2$.

3.4.1.3 Вероятность банкротства каждой из девяти торговых фирм в течение года, равна 0,14. Рассматривается случайная величина ξ - число торговых фирм, которые могут обанкротиться в течение года. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 5$.

3.4.1.4 Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0002. Рассматривается случайная величина ξ - число учебников, которые сброшюрованы неправильно. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.5 Каждый четвёртый посетитель банка обращается на ресепшен для консультации сотрудника банка. За некоторое фиксированное время банк посетило десять клиентов. Рассматривается случайная величина ξ - число клиентов банка, которые обратились на ресепшен. Значение $\alpha = 5$, а $\beta = 7$.

3.4.1.6 Вероятность после разговора оставить карту в телефонном аппарате равна 0,005. В течение недели телефоном воспользовались 60 абонентов. Рассматривается случайная величина ξ - число абонентов, которые забыли карту в телефонном аппарате. Значение $\beta = 2$.

3.4.1.7 В некотором университете учатся 18300 студентов, которые родились в одном и том же високосном году. Каждый будущий студент может родиться с равной вероятностью в любой из дней года. Рассматривается случайная величина ξ - число студентов, которые родились 1 января. Значение $\alpha = 1$, а $\beta = 5$.

3.4.1.8 Вероятность перевыполнения плана для одного рабочего бригады, равна 0,8. В бригаде работают девять рабочих. Рассматривается случайная величина ξ - число рабочих, которые перевыполнили план. Значение $\alpha = 4$.

3.4.1.9 Вероятность успешной сдачи студентом каждого из четырёх экзаменов сессии равна 0,7. Рассматривается случайная величина ξ - число экзаменов, которые сдал студент во время сессии. Значение $\beta = 3$.

3.4.1.10 Вероятность приобретения бриллианта в банке, для одного клиента, равна 0,003. Рассматривается случайная величина ξ - число клиентов банка, которые приобрели бриллиант в банке, среди 3000 обслуженных клиентов. Значение $\alpha = 3$.

3.4.1.11 Вероятность того, что у частного предпринимателя находятся в наличии джемпера фирмы «DEVIR», равна 0,6. Предприниматель продал 8 джемперов. Рассматривается случайная величина ξ - число джемперов фирмы «DEVIR», которые продал предприниматель. Значение $\beta = 7$.

3.4.1.12 В хранилище музея находится 2000 картин. Любая картина может не иметь подписи автора с вероятностью 0,0004. Рассматривается случайная величина ξ - число картин, которые не имеют подписи автора. Значение $\alpha = 3$.

3.4.1.13 Вероятность того, что человек, забрав платёжную карту в банкомате, забудет взять деньги, равна 0,004. В течение некоторого времени банкоматом воспользовались 1250 человек. Рассматривается случайная величина ξ - число человек, которые забыли забрать деньги в банкомате. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 5$.

3.4.1.14 Вероятность того, что телефон марки «LG» будет приобретен покупателем, равна 0,2. За некоторый фиксированный период времени приобретено пятнадцать телефонов. Рассматривается случайная величина ξ - число телефонов марки «LG», которые были приобретены за этот период времени. Значение $\alpha = 12$.

3.4.1.15 Вероятность того, что человек приобретёт облигацию пятипроцентного займа, равна 0,15. Акции приобрели десять человек. Рассматривается случайная величина ξ - число человек, которые приобрели акции пятипроцентного займа. Значение $\alpha = 3$, а $\beta = 6$.

3.4.1.16 Завод отправил на оптовую базу 5000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,00008. Рассматривается случайная величина ξ - число изделий, которые могут получить повреждения в пути. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.17 Вероятность того, что ноутбук фирмы «Samsung» в течение рабочего дня будет подключён к сети, равна 0,3. В организации установлено двенадцать ноутбуков. Рассматривается случайная величина ξ - число ноутбуков фирмы «Samsung», которые подключены к сети. Значение $\alpha = 10$, а $\beta = 11$.

3.4.1.18 Вероятность того, что оптический диск не соответствует стандарту, равна 0,006. На проверку выбрано 1000 оптических дисков. Рассматривается случайная величина ξ - число оптических дисков, которые не соответствуют стандарту. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.19 На железнодорожном вокзале установлены 600 автоматов, которые производят продажу билетов. В течение суток каждый автомат может выйти из строя с вероятностью 0,005. Рассматривается случайная величина ξ - число автоматов, которые могут выйти из строя. Значение $\alpha = 4$.

3.4.1.20 Двадцать процентов студентов после окончания ВУЗа не работают по специальности. Рассматривается случайная величина ξ - число выпускников,

работающих по специальности, среди выбранных десяти выпускников ВУЗа. Значение $\beta = 6$.

3.4.1.21 Вероятность того, что клиент сделает в банке валютный вклад, равна 0,48. Вклады в банке осуществило восемь клиентов. Рассматривается случайная величина ξ - число клиентов, которые сделали вклад в валюте. Значение $\alpha = 3$, а $\beta = 7$.

3.4.1.22 Вероятность того, что купюра является фальшивой, равна 0,001. Для проверки выбрано 6000 купюр. Рассматривается случайная величина ξ - число купюр, которые оказались фальшивыми. Значение $\beta = 7$.

3.4.1.23 Вероятность получения заявки оптовой базой на данный день для каждого из девяти магазинов, равна 0,8. Рассматривается случайная величина ξ - число магазинов, которые сделали заявку на оптовую. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 5$.

3.4.1.24 Клиенту банка для заполнения предлагается карточка обратной связи с вероятностью 0,7. В банк обратилось тринадцать клиентов. Рассматривается случайная величина ξ - число клиентов, которым была предложена для заполнения карточка обратной связи. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.25 За некоторый период времени фабрика выпустила 2500 джемперов. Допустить брак при пошиве одного джемпера возможно с вероятностью 0,0016. Рассматривается случайная величина ξ - число джемперов, в которых обнаружен брак. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 4$.

3.4.1.26 На выставке трактор «Беларус-80.1» может быть представлен с вероятностью 0,6. На выставку было представлено десять тракторов. Рассматривается случайная величина ξ - число тракторов «Беларус-80.1», которые представлены на выставке. Значение $\alpha = 3$.

3.4.1.27 Вероятность того, что человек снимет в банкомате всю сумму стотысячными купюрами, равна 0,2. В банкомате сняли деньги двенадцать человек. Рассматривается случайная величина ξ - число человек, которым банкомат выдал всю сумму стотысячными купюрами. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 5$.

3.4.1.28 Кузов автомобиля «Audi» имеет цвет баклажана с вероятностью 0,0004. Через пост в течение некоторого времени проехало 2000 автомобилей «Audi». Рассматривается случайная величина ξ - число автомобилей «Audi» цвета баклажана, которые проехали через пост. Значение $\alpha = 1$.

3.4.1.29 Вдоль дороги установлены 3000 фонарей, каждый из которых может перегореть в течение месяца с вероятностью 0,001. Рассматривается случайная величина ξ - число фонарей, которых перегорели в течение месяца. Значение $\beta = 4$.

3.4.1.30 Вероятность потери кредитной карточки в течение месяца равна 0,003. Банк выдал 300 кредитных карточек. Рассматривается случайная величина ξ - число кредитных карточек, которые потеряли клиенты банка. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 6$.

4 ОСНОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

4.1 Содержание: равномерное распределение, экспоненциальное (показательное) распределение, гамма-функция и её свойства, распределение Вейбулла, β -распределение.

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего деления. Определить закон распределения для случайной величины ξ - ошибка округления отсчёта. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины ξ . Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ . Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04, б) большая 0,05.

Решение. Ошибку округления отсчёта можно рассматривать как случайную величину ξ , которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними делениями. Параметры равномерного распределения равны: $a = 0$, $b = 0,2$. Тогда, согласно формуле (4.1.1.1) плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0,2 - 0}, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,2; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > 0,2, \end{cases} \quad \text{или} \quad f(x) = \begin{cases} 5, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,2; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > 0,2. \end{cases}$$

Запишем выражение для функции распределения случайной величины ξ , которая имеет равномерный закон распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \frac{x - 0}{0,2 - 0}, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,2; \\ 1, & \text{если } x > 0,2, \end{cases} \quad \text{или} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 5x, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,2; \\ 1, & \text{если } x > 0,2. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение заданной случайной величины.

$$\text{Математическое ожидание: } M(\xi) = \frac{a + b}{2} = \frac{0 + 0,2}{2} = 0,1.$$

$$\text{Дисперсия: } D(\xi) = \frac{(b - a)^2}{12} = \frac{(0,2 - 0)^2}{12} = \frac{0,04}{12} = \frac{1}{300} \approx 0,0033.$$

$$\text{Среднее квадратическое отклонение: } \sigma_{\xi} = \frac{b - a}{2\sqrt{3}} = \frac{0,2 - 0}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{10\sqrt{3}} \approx 0,0577.$$

Вычислим вероятность события $A = \{\text{при отсчёте будет сделана ошибка меньшая } 0,04\}$. Данное событие означает, что случайная величина примет значение меньше 0,04 или больше 0,16. Для вычисления вероятностей этих событий будем использовать формулу (4.1.1.2). При этом учтём, что события

{меньше 0,04} и {больше 0,16} независимы, то есть вероятность суммы равна сумме вероятностей. $P(\alpha \leq \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

$$P(A) = P(0 < \xi < 0,04) + P(0,16 < \xi < 0,2) = \frac{0,04 - 0}{0,2 - 0} + \frac{0,2 - 0,16}{0,2 - 0} = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

Вычислим вероятность события $B = \{\text{при отсчёте будет сделана ошибка больше } 0,05\}$. Данное событие означает, что случайная величина примет значение больше 0,05, но меньше 0,15.

$$P(B) = P(0,05 < \xi < 0,15) = \frac{0,15 - 0,05}{0,2 - 0} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$

4.2.2 Случайная величина ξ имеет равномерное распределение с математическим ожиданием $M(\xi) = 8$ и дисперсией $D(\xi) = 12$. Найти плотность распределения вероятностей и функцию распределения случайной величины ξ . Определить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на величину $\varepsilon = 1$.

Решение. Воспользуемся формулами математического ожидания и дисперсии для равномерно распределённой случайной величины:

$$M(\xi) = \frac{a + b}{2} \text{ и } D(\xi) = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a + b}{2} = 8, \\ \frac{(b - a)^2}{12} = 12. \end{cases}$$

Решение системы: $a = 2$, $b = 14$.

Согласно формуле (4.1.1.1) плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{14 - 2}, & \text{если } 2 \leq x \leq 14; \\ 0, & \text{если } x < 2 \text{ или } x > 14, \end{cases} \quad \text{или} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & \text{если } 2 \leq x \leq 14; \\ 0, & \text{если } x < 2 \text{ или } x > 14. \end{cases}$$

Запишем выражение для функции распределения случайной величины ξ , которая имеет равномерный закон распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2; \\ \frac{x - 2}{14 - 2}, & \text{если } 2 \leq x \leq 14; \\ 1, & \text{если } x > 14, \end{cases} \quad \text{или} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2; \\ \frac{x - 2}{12}, & \text{если } 2 \leq x \leq 14; \\ 1, & \text{если } x > 14. \end{cases}$$

Вычислим вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на величину $\varepsilon = 1$.

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) = P(|\xi - 8| < 1) = P(-1 < \xi - 8 < 1) = P(7 < \xi < 9) = \frac{9 - 7}{14 - 2} = \frac{1}{6}.$$

4.2.3 Длительность времени безотказной работы каждого из четырёх элементов, входящих в техническое устройство, имеет показательное распределение. Среднее время безотказной работы для каждого элемента равно 400 часов. Техническое устройство работает при условии безотказной работы всех четырёх элементов. Определить вероятность безотказной работы устройства в течение 700 часов, если время безотказной работы каждого элемента не зависит от времени работы четырёх других элементов. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины T безотказной работы одного элемента. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины T . Найти вероятность того, что отдельно взятый элемент будет работать не менее 500 часов, но не более 900 часов.

Решение. Искомая вероятность равна вероятности того, что в течение не менее 700 часов будет безотказно работать все четыре элемента.

Пусть событие A_i означает, что i -й элемент устройства проработает безотказно не менее 700 часов ($i = \overline{1, 4}$). Тогда искомая вероятность равна

$$P = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = P^4(A_1).$$

Так как, события A_i независимы, то вероятность произведения равна произведению вероятностей, причём $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4)$.

Найдём вероятность события A_i . Рассмотрим случайную величину T - время безотказной работы i -го элемента. По условию задачи математическое ожидание величины T равно 400 часов, следовательно, $\lambda = \frac{1}{400}$. В этом случае

плотность распределения вероятности имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ \frac{1}{400} e^{-\frac{1}{400}t}, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Функция распределения: } F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1 - e^{-\frac{1}{400}t}, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Математическое ожидание: } M(T) = T_{cp} = \frac{1}{\lambda} = 400.$$

$$\text{Дисперсия: } D(T) = \frac{1}{\lambda^2} = 160000.$$

$$\text{Среднее квадратическое отклонение: } \sigma_T = \frac{1}{\lambda} = 400.$$

Тогда вероятность события A_i равна

$$P(A_i) = P(T \geq 700) = 1 - P(T < 700) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{400} \cdot 700} \right) = e^{-\frac{700}{400}} = e^{-1,75} \approx 0,174.$$

Таким образом, вероятность исходного события равна

$$P = P^4(A_1) = (0,174)^4 \approx 0,917.$$

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Случайная величина подчинена закону равномерного распределения на интервале $(1;3)$. Записать выражение для плотности распределения вероятности и функцию распределения. Вычислить числовые характеристики случайной величины. Определить вероятность того, что случайная величина примет значение не менее 1,5, но не более 2,5.

4.3.2 Случайная величина ξ имеет равномерное распределение с математическим ожиданием $M(\xi) = 22$ и дисперсией $D(\xi) = 1,08$. Найти плотность распределения вероятностей и функцию распределения случайной величины ξ . Построить графики плотности и функции распределения. Определить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 3 единицы.

4.3.3 Поезда метрополитена идут строго по расписанию. Интервал движения равен трём минутам. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередного поезда менее 40 секунд.

4.3.4 Случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $-3 \leq \xi \leq 3$. Известно, что каждое из значений 3 и (-3) она принимает с одной и той же вероятностью $p = 1/6$. Кроме того, в интервале $(-3;3)$ случайная величина ξ имеет равномерное распределение. Найти плотность распределения вероятностей и функцию распределения, и построить их графики.

4.3.5 Цена деления вольтметра 10 В. Отсчёт производится с округлением до целого деления шкалы. Определить среднеквадратичную ошибку среднего квадратического отклонения σ при снятии отсчёта и вероятности p того, что ошибка заключена в пределах ± 1 В.

4.3.6 Плотность распределения вероятности случайной величины ξ сохраняет на отрезке $[2;10]$ постоянное значение c , а вне этого отрезка равна нулю. Определить закон распределения для случайной величины ξ . Найти параметр c . Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения, построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ . Определить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5 единицы.

4.3.7 На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и дисперсию времени ожидания автомобиля контролёром, если поток машин простейший и время (в часах) между прохождением автомобилей через контрольный пункт распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 12$.

4.3.8 Определить время работы прибора с надёжностью 0,9 (вероятность безотказной работы прибора), если среднее время его работы равно 800 часов.

4.3.9 Время T обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 6 до 9 секунд после начала поиска, если среднее время обнаружения цели равно трём секундам.

4.3.10 Беспроводная оптическая мышка за 10000 часов работы выходит из строя в среднем один раз. Определить вероятность выхода из строя беспроводной оптической мышки за 2000 часов работы, предполагая, что срок безотказной работы мыши есть случайная величина, распределённая по показательному закону.

4.3.11 Время T безотказной работы системы распределено по показательному закону. Интенсивность отказов системы равно $\lambda = 0,03$. Найти среднее время безотказной работы системы и вероятность безотказной работы за 60 часов работы.

4.3.12 Время T безотказной работы станка распределено по показательному закону. Интенсивность отказов в работе компьютера составляет $\lambda = 0,0025$. Найти среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы компьютера за 400 дней.

4.3.13 Время T безотказной работы процессора распределено по показательному закону. Известно, что среднее время наработки процессора на отказ составляет 360 месяцев. Найти вероятность безотказной работы процессора за 90 месяцев.

4.3.14 Среднее время работы каждого из двух банкоматов без технического обслуживания соответственно равно 168 и 216 часов. Определить вероятность того, что оба банкомата будут работать без технического обслуживания в течение 224 часов.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Плотность распределения вероятности случайной величины ξ сохраняет на отрезке $[a;b]$ постоянное значение c , а вне этого отрезка равна нулю. Определить закон распределения для случайной величины ξ . Найти параметр c . Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения, построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ . Определить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на величину ε .

4.4.1.1 $a = 1, b = 4, \varepsilon = 0,1.$

4.4.1.2 $a = 2, b = 6, \varepsilon = 0,2.$

4.4.1.3 $a = 3, b = 7, \varepsilon = 0,3.$

4.4.1.4 $a = 6, b = 8, \varepsilon = 0,4.$

4.4.1.5 $a = 7, b = 11, \varepsilon = 0,5.$

4.4.1.6 $a = 1, b = 10, \varepsilon = 0,6.$

4.4.1.7 $a = 4, b = 7, \varepsilon = 0,7.$

4.4.1.8 $a = 3, b = 5, \varepsilon = 0,8.$

4.4.1.9 $a = 2, b = 11, \varepsilon = 0,9.$

4.4.1.10 $a = 1, b = 5, \varepsilon = 1,0.$

4.4.1.11 $a = 5, b = 10, \varepsilon = 1,1.$

4.4.1.12 $a = 4, b = 10, \varepsilon = 1,2.$

4.4.1.13 $a = 3, b = 10, \varepsilon = 1,3.$

4.4.1.14 $a = 2, b = 13, \varepsilon = 1,4.$

4.4.1.15 $a = 1, b = 7, \varepsilon = 1,5.$

4.4.1.16 $a = 5, b = 15, \varepsilon = 1,6.$

- | | | | |
|-----------------|--------------------------------------|-----------------|--------------------------------------|
| 4.4.1.17 | $a = 4, b = 8, \varepsilon = 1, 7.$ | 4.4.1.18 | $a = 3, b = 9, \varepsilon = 1, 8.$ |
| 4.4.1.19 | $a = 2, b = 10, \varepsilon = 1, 9.$ | 4.4.1.20 | $a = 1, b = 9, \varepsilon = 2, 0.$ |
| 4.4.1.21 | $a = 5, b = 19, \varepsilon = 2, 1.$ | 4.4.1.22 | $a = 4, b = 16, \varepsilon = 2, 2.$ |
| 4.4.1.23 | $a = 3, b = 19, \varepsilon = 2, 3.$ | 4.4.1.24 | $a = 2, b = 11, \varepsilon = 2, 4.$ |
| 4.4.1.25 | $a = 1, b = 15, \varepsilon = 2, 5.$ | 4.4.1.26 | $a = 5, b = 18, \varepsilon = 2, 6.$ |
| 4.4.1.27 | $a = 4, b = 13, \varepsilon = 2, 7.$ | 4.4.1.28 | $a = 3, b = 14, \varepsilon = 2, 8.$ |
| 4.4.1.29 | $a = 2, b = 14, \varepsilon = 2, 9.$ | 4.4.1.30 | $a = 1, b = 11, \varepsilon = 3, 0.$ |

4.4.2 Среднее время работы каждого из трёх элементов, входящих в техническое устройство, равно T_{cp} часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из этих трёх элементов. Определить вероятность того, что устройство будет работать от t_1 до t_2 часов, если время T работы каждого из трёх элементов независимо и распределено по показательному закону. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины T безотказной работы одного элемента, построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины T . Найти вероятность того, что отдельно взятый элемент будет работать не менее t_1 часов.

- | | | | |
|-----------------|---------------------------------------|-----------------|---------------------------------------|
| 4.4.2.1 | $T_{cp} = 225, t_1 = 75, t_2 = 150.$ | 4.4.2.2 | $T_{cp} = 100, t_1 = 50, t_2 = 75.$ |
| 4.4.2.3 | $T_{cp} = 250, t_1 = 150, t_2 = 200.$ | 4.4.2.4 | $T_{cp} = 600, t_1 = 400, t_2 = 500.$ |
| 4.4.2.5 | $T_{cp} = 154, t_1 = 44, t_2 = 88.$ | 4.4.2.6 | $T_{cp} = 256, t_1 = 192, t_2 = 224.$ |
| 4.4.2.7 | $T_{cp} = 378, t_1 = 294, t_2 = 336.$ | 4.4.2.8 | $T_{cp} = 60, t_1 = 20, t_2 = 40.$ |
| 4.4.2.9 | $T_{cp} = 120, t_1 = 30, t_2 = 60.$ | 4.4.2.10 | $T_{cp} = 160, t_1 = 40, t_2 = 120.$ |
| 4.4.2.11 | $T_{cp} = 250, t_1 = 50, t_2 = 100.$ | 4.4.2.12 | $T_{cp} = 300, t_1 = 60, t_2 = 180.$ |
| 4.4.2.13 | $T_{cp} = 350, t_1 = 70, t_2 = 280.$ | 4.4.2.14 | $T_{cp} = 400, t_1 = 160, t_2 = 240.$ |
| 4.4.2.15 | $T_{cp} = 450, t_1 = 180, t_2 = 360.$ | 4.4.2.16 | $T_{cp} = 210, t_1 = 35, t_2 = 70.$ |
| 4.4.2.17 | $T_{cp} = 270, t_1 = 45, t_2 = 135.$ | 4.4.2.18 | $T_{cp} = 330, t_1 = 55, t_2 = 220.$ |
| 4.4.2.19 | $T_{cp} = 390, t_1 = 65, t_2 = 325.$ | 4.4.2.20 | $T_{cp} = 510, t_1 = 170, t_2 = 255.$ |
| 4.4.2.21 | $T_{cp} = 570, t_1 = 190, t_2 = 380.$ | 4.4.2.22 | $T_{cp} = 90, t_1 = 30, t_2 = 75.$ |
| 4.4.2.23 | $T_{cp} = 144, t_1 = 72, t_2 = 96.$ | 4.4.2.24 | $T_{cp} = 204, t_1 = 102, t_2 = 170.$ |
| 4.4.2.25 | $T_{cp} = 308, t_1 = 44, t_2 = 88.$ | 4.4.2.26 | $T_{cp} = 378, t_1 = 54, t_2 = 162.$ |
| 4.4.2.27 | $T_{cp} = 448, t_1 = 64, t_2 = 256.$ | 4.4.2.28 | $T_{cp} = 518, t_1 = 74, t_2 = 370.$ |
| 4.4.2.29 | $T_{cp} = 588, t_1 = 84, t_2 = 504.$ | 4.4.2.30 | $T_{cp} = 658, t_1 = 188, t_2 = 282.$ |

5 НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

5.1 Содержание: нормальное распределение, стандартное нормальное распределение, логарифмическое нормальное распределение, правило трёх сигм, распределение χ^2 , распределение Стьюдента, распределение Фишера.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Математическое ожидание нормально распределённой случайной величины ξ равно $a=3$, а дисперсия равна $D(\xi)=16$. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины ξ .

Решение. Находим среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = 4$. Тогда, согласно формуле (5.1.1.1), выражение для плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 4^2}} \text{ или } f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}.$$

Функцию распределения определяем по формулам (5.1.1.2) и (5.1.1.4).

$$F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-3)^2}{32}} dx \text{ или } F(x) = \Phi\left(\frac{x-3}{4}\right) + 0,5.$$

5.2.2 Автомат штампует детали. Контролируемая длина детали L распределена нормально с проектной длиной 60 мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 48 мм и не более 72 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 65 мм, б) меньше 53 мм.

Решение. Математическое ожидание случайной величины равно проектной длине детали, то есть $a = 60$ мм. Найдём среднее квадратическое отклонение из условия $P(48 < L < 72) = 1$. Воспользуемся формулой (5.1.1.3).

$$P(48 < \xi < 72) = \Phi\left(\frac{72-60}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{48-60}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{12}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{12}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{12}{\sigma}\right) = 1.$$

По таблице (приложение 3) находим $12/\sigma = 5$ или $\sigma = 2,4$.

Вычислим вероятности заданных событий:

$$\begin{aligned} \text{а) } P(65 < \xi < 72) &= \Phi\left(\frac{72-60}{2,4}\right) - \Phi\left(\frac{65-60}{2,4}\right) = \Phi(5) - \Phi(2,08) = \\ &= 0,5 - 0,48124 = 0,01876; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } P(48 < \xi < 53) &= \Phi\left(\frac{53-60}{2,4}\right) - \Phi\left(\frac{48-60}{2,4}\right) = \Phi(-2,92) - \Phi(-5) = \\ &= -\Phi(2,92) + \Phi(5) = -0,49825 + 0,5 = 0,00175. \end{aligned}$$

5.2.3 Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения случайной величины ξ подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм. Вычислить

вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине $\varepsilon = 10$ мм.

Решение. Так как, систематические ошибки измерения диаметра вала отсутствуют, то математическое ожидание случайной величины ξ равно нулю. Вычислим вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

$$\begin{aligned} P(|\xi - a| < \varepsilon) &= P(|\xi| < 10) = P(-10 < \xi < 10) = \Phi\left(\frac{10-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-10-0}{5}\right) = \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) + \Phi(2) = 2 \cdot \Phi(2) = 2 \cdot 0,47725 = 0,9545. \end{aligned}$$

5.2.4 Случайные ошибки измерения прибором подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 15$ мм. Систематические ошибки измерения прибором отсутствуют. Найти вероятность того, что из четырёх независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдёт по абсолютной величине 3 мм.

Решение. Для вычисления вероятности события A - того, что в четырёх независимых измерениях ошибка ξ хотя бы один раз не превзойдёт 3 мм, перейдём к событию, которое противоположно событию A , то есть к тому, что в результате проведённых четырёх измерений случайная величина ξ примет значение превосходящее по абсолютной величине 3 мм.

Вероятность того, что в результате одного измерения случайная величина ξ примет значение, превосходящее по абсолютной величине 3 мм равна

$$\begin{aligned} p &= 1 - P(|\xi| < 3) = 1 - P(-3 < \xi < 3) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{3-0}{15}\right) - \Phi\left(\frac{-3-0}{15}\right) \right) = \\ &= 1 - (\Phi(0,2) - \Phi(-0,2)) = 1 - 2 \cdot \Phi(0,2) = 1 - 2 \cdot 0,07926 = 0,84148. \end{aligned}$$

Используя теорему умножения для независимых событий, находим вероятность противоположного события к событию A , то есть вероятность события $\bar{A}$: $P(\bar{A}) = p^4 = (0,84148)^4 \approx 0,7081$. Тогда вероятность заданного события равна

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,7081 = 0,2919.$$

5.2.5 Предприятие получило заказ на изготовление бильярдных шаров. Бильярдный шар при производстве считается годным, если отклонение D диаметра шара от проектного размера по абсолютной величине меньше $\varepsilon = 0,5$ мм. Систематические отклонения диаметра от номинала отсутствуют. Считая, что случайная величина D распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,2$ мм, найти, сколько будет годных бильярдных шаров среди двухсот шаров, изготовленных на заказ предприятием.

Решение. Так как, систематические отклонения диаметра от номинала отсутствуют, то математическое ожидание случайной величины D равно нулю.

Найдём вероятность того, случайная величина D отклонится от своего математического ожидания на величину $\varepsilon = 0,5$ мм.

$$P(|D| < 0,05) = P(-0,5 < D < 0,5) = \Phi\left(\frac{0,5-0}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5-0}{0,2}\right) = \\ = \Phi(2,5) - \Phi(-2,5) = 2 \cdot \Phi(2,5) = 2 \cdot 0,49379 = 0,98758 \approx 0,99.$$

Таким образом, вероятность отклонения диаметра шара, меньшего 0,5, равна 0,99. Следовательно, примерно $0,99 \cdot 200 = 198$ бильярдных шаров из двухсот шаров, изготовленных предприятием окажутся, годными.

5.2.6 Станок изготавливает детали, причём контролируется длина детали L . Считая, что L - нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием $a = 20$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,99404 будут заключены длины изготовленных деталей.

Решение. Воспользуемся формулой (5.1.2.1): $P(|\xi - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. В условиях данной задачи $P(|L - 20| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{0,1}\right) = 0,99404$, $\Phi\left(\frac{\delta}{0,1}\right) = 0,49702$.

Тогда, $\frac{\delta}{0,1} = 2,75$ или $\delta = 0,275$. Следовательно, интервал, в котором с вероятностью 0,99404 будут заключены длины изготовленных деталей, представляет собой промежуток: $(20 - 0,275; 20 + 0,275)$ или $(19,725; 20,275)$.

5.2.7 Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $a = 13$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,5$. Найти интервал, в который с вероятностью 0,9973 попадёт случайная величина ξ в результате испытания.

Решение. Воспользуемся правилом трёх сигм: $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. В условиях данной задачи интервал, в который с вероятностью 0,9973 попадёт случайная величина ξ в результате испытания, имеет вид: $(13 - 3 \cdot 0,5; 13 + 3 \cdot 0,5)$ или $(11,5; 14,5)$.

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Случайная величина ξ подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $a = M(\xi) = 4$ и дисперсией $D(\xi) = 16$. Найти выражения для плотности распределения и функции распределения вероятностей. Построить графики функции распределения и плотности распределения вероятностей случайной величины ξ . Определить вероятность неравенства $2 < \xi < 5$.

5.3.2 Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ задана выражением $f(x) = k \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{18}}$. Найти коэффициент k и определить вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5.

5.3.3 Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ задана выражением $f(x) = k \cdot e^{-\frac{1}{32}x^2 + \frac{5}{16}x + 2}$. Найти неизвестный параметр k и функцию распределения случайной величины ξ . Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить графики плотности распределения и функции распределения. Найти вероятность того, что случайная величина ξ попадёт в интервал $(4,1; 6,2)$.

5.3.4 Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2\text{ м}$. Найти вероятность того, что ошибка измерения превзойдёт 10 м ?

5.3.5 Автоматический станок производит однотипные изделия, номинальный размер которых 4 см . Вследствие неточности изготовления размер изделия является случайной величиной ξ , распределённой по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением $\sigma = 0,05\text{ см}$, а систематические отклонения размера отсутствуют. При контроле отбраковывают все изделия, размер которых отличается от номинального размера больше, чем на $0,1\text{ см}$. Определить, какой процент изделий в среднем будет отбраковываться.

5.3.6 Производится три независимых измерения прибором, имеющим систематическую ошибку 3 мм и среднеквадратичное отклонение 5 мм . Найти вероятность того, что измеренные значения будут отклоняться от истинного не более, чем на 7 мм .

5.3.7 Какой процент изделий из числа отобранных с разбросом $\pm 15\%$, подчиняющихся нормальному закону распределения, будет иметь отклонение от номинала 0 до $+2\%$, если предположить, что весь диапазон разбросов изделий соответствует 3σ ?

5.3.8 Ошибка измерения дальности радиолокатором имеет нормальный закон распределения. Систематические ошибки измерения дальности отсутствуют, а среднеквадратичное отклонение равно 5 м . Сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью $0,9545$ ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине 3 м ?

5.3.9 Считается, что изделие – первого сорта, если отклонение его размера от номинала не превосходит по абсолютной величине $2,4\text{ мм}$. Случайные отклонения размера изделия от номинала подчиняются нормальному закону распределения со среднеквадратичным отклонением 2 мм , при этом систематические отклонения отсутствуют. Найти среднее число изделий первого сорта, если изготавливается 200 изделий.

5.3.10 Средний вес взрослого человека является случайной величиной, распределённой по нормальному закону, с математическим ожиданием 62 кг и среднеквадратичным отклонением 8 кг . Найти вероятность того, что хотя бы один из случайно выбранных десяти взрослых человек будет иметь вес от 54 до 73 кг .

5.3.11 Диаметр втулок, изготовленных на предприятии, подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 3 см и среднеквадратичным отклонением $0,02\text{ см}$. В каких границах можно гарантировать величину диаметров втулок, если за вероятность практической достоверности принимается $0,9973$?

5.3.12 Детали, выпускаемые предприятием, считаются первого сорта, если отклонения их размеров от номинала не превосходят по абсолютной величине $0,8\text{ мм}$. Случайные отклонения размера детали от номинала подчиняются нормальному закону распределения со среднеквадратичным отклонением, равным $0,5\text{ мм}$. Систематические отклонения отсутствуют. Найти среднее число изделий первого сорта среди выбранных случайным образом 10 деталей.

5.3.13 Станок изготавливает детали, причём контролируется длина детали L . Считая, что L - нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием $a=10\text{ мм}$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=0,2\text{ мм}$, найти интервал, в котором с вероятностью $0,9216$ будут заключены длины изготовленных деталей.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Найти вероятность того, что событие A наступит не менее m_1 раз, но не более m_2 раза в n независимых испытаниях. Вероятность наступления события A в отдельно взятом испытании равна вероятности того, что непрерывная случайная величина ξ попадёт в интервал $(\alpha; \beta)$. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $f(x) = k \cdot e^{ax^2 + bx + c}$. Найти неизвестный параметр k и функцию распределения случайной величины ξ . Определить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины. Построить график плотности распределения случайной величины ξ . Ниже указаны исходные данные для каждого варианта.

5.4.1.1 $m_1 = 2, m_2 = 4, n = 6,$

$\alpha = 0,75, \beta = 1,25,$

$a = -2, b = 4, c = 5.$

5.4.1.3 $m_1 = 2, m_2 = 5, n = 7,$

$\alpha = -1, \beta = 3,$

$a = -\frac{1}{18}, b = \frac{2}{9}, c = -\frac{11}{9}.$

5.4.1.5 $m_1 = 3, m_2 = 5, n = 9,$

$\alpha = 3, \beta = 8,$

$a = -\frac{1}{50}, b = \frac{4}{25}, c = \frac{17}{25}.$

5.4.1.2 $m_1 = 1, m_2 = 3, n = 5,$

$\alpha = 3,8, \beta = 4,1,$

$a = -8, b = 16, c = 3.$

5.4.1.4 $m_1 = 4, m_2 = 7, n = 8,$

$\alpha = 2,5, \beta = 4,$

$a = -\frac{1}{8}, b = \frac{3}{4}, c = -\frac{17}{8}.$

5.4.1.6 $m_1 = 6, m_2 = 8, n = 10,$

$\alpha = 4, \beta = 7,$

$a = -\frac{1}{32}, b = \frac{5}{16}, c = \frac{7}{32}.$

$$\begin{aligned}
5.4.1.7 \quad m_1 &= 2, m_2 = 3, n = 5, \\
\alpha &= 0,9, \beta = 1,4, \\
a &= -\frac{1}{8}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{23}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.9 \quad m_1 &= 2, m_2 = 4, n = 7, \\
\alpha &= 3, \beta = 8, \\
a &= -\frac{1}{98}, b = \frac{7}{49}, c = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.11 \quad m_1 &= 3, m_2 = 5, n = 9, \\
\alpha &= 2,75, \beta = 3,25, \\
a &= -4,5, b = 27, c = -38.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.13 \quad m_1 &= 3, m_2 = 4, n = 5, \\
\alpha &= 3,8, \beta = 3,95, \\
a &= -\frac{25}{2}, b = 100, c = 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.15 \quad m_1 &= 1, m_2 = 2, n = 7, \\
\alpha &= 5,95, \beta = 6,1, \\
a &= -\frac{49}{2}, b = 294, c = 8.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.17 \quad m_1 &= 4, m_2 = 7, n = 9, \\
\alpha &= -4,2, \beta = -3,9, \\
a &= -8, b = -16, c = 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.19 \quad m_1 &= 3, m_2 = 4, n = 5, \\
\alpha &= -2,5, \beta = -1,5, \\
a &= -\frac{1}{8}, b = -\frac{3}{4}, c = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.21 \quad m_1 &= 4, m_2 = 6, n = 7, \\
\alpha &= -5,4, \beta = -4, \\
a &= -\frac{1}{32}, b = -\frac{5}{16}, c = 6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.23 \quad m_1 &= 2, m_2 = 4, n = 9, \\
\alpha &= -2,5, \beta = -2,3, \\
a &= -\frac{1}{2}, b = -2, c = 6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.8 \quad m_1 &= 1, m_2 = 5, n = 6, \\
\alpha &= 1,5, \beta = 2,2, \\
a &= -\frac{1}{2}, b = 2, c = 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.10 \quad m_1 &= 4, m_2 = 6, n = 8, \\
\alpha &= 7, \beta = 11, \\
a &= -\frac{1}{128}, b = \frac{81}{64}, c = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.12 \quad m_1 &= 7, m_2 = 9, n = 10, \\
\alpha &= 1,85, \beta = 2,1, \\
a &= -8, b = 32, c = 36.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.14 \quad m_1 &= 2, m_2 = 5, n = 6, \\
\alpha &= 4,9, \beta = 5,1, \\
a &= -18, b = 180, c = -4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.16 \quad m_1 &= 5, m_2 = 7, n = 8, \\
\alpha &= -1,25, \beta = -0,85, \\
a &= -2, b = -4, c = 6.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.18 \quad m_1 &= 6, m_2 = 9, n = 10, \\
\alpha &= -2,3, \beta = 0,3, \\
a &= -\frac{1}{18}, b = -\frac{2}{9}, c = 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.20 \quad m_1 &= 2, m_2 = 4, n = 6, \\
\alpha &= -4,5, \beta = -3, \\
a &= -\frac{1}{50}, b = -\frac{4}{25}, c = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.22 \quad m_1 &= 4, m_2 = 7, n = 8, \\
\alpha &= -1,2, \beta = 0,8, \\
a &= -\frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}, c = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.4.1.24 \quad m_1 &= 7, m_2 = 9, n = 10, \\
\alpha &= -7,5, \beta = -6, \\
a &= -\frac{1}{98}, b = -\frac{7}{49}, c = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{5.4.1.25} \quad m_1 &= 3, m_2 = 5, n = 5, \\
 \alpha &= -11, \beta = -4, \\
 a &= -\frac{1}{128}, b = -\frac{81}{64}, c = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{5.4.1.27} \quad m_1 &= 5, m_2 = 6, n = 7, \\
 \alpha &= -2,65, \beta = -1,85, \\
 a &= -8, b = -32, c = 15.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{5.4.1.29} \quad m_1 &= 5, m_2 = 6, n = 9, \\
 \alpha &= -5,2, \beta = -4,9, \\
 a &= -18, b = -180, c = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{5.4.1.26} \quad m_1 &= 2, m_2 = 4, n = 6, \\
 \alpha &= -3,15, \beta = -2, \\
 a &= -4,5, b = -27, c = 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{5.4.1.28} \quad m_1 &= 2, m_2 = 5, n = 8, \\
 \alpha &= -4,15, \beta = -3, \\
 a &= -\frac{25}{2}, b = -100, c = 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{5.4.1.30} \quad m_1 &= 6, m_2 = 8, n = 10, \\
 \alpha &= -7,05, \beta = -6, \\
 a &= -\frac{49}{2}, b = -294, c = 3.
 \end{aligned}$$

6 ДИСКРЕТНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

6.1 Содержание: распределение вероятностей многомерных дискретных случайных величин, функция распределения многомерной случайной величины, условные распределения двумерных случайных величин, зависимые и независимые случайные величины, числовые характеристики дискретных двумерных случайных величин.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{ij}$ дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$ задана в виде таблицы.

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	3
2	0,09	0,05	0,06
4	0,11	0,09	0,1
6	0,2	0,16	0,14

Требуется:

- 1) найти маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$;
- 2) установить, зависимы или нет составляющие ξ и η ;
- 3) найти условные законы распределения;
- 4) вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η ;
- 5) найти функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$;
- 6) вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в прямоугольник $\Pi = \{(\xi; \eta) | 1,5 \leq \xi \leq 4 \wedge 3 \leq \eta \leq 7\}$;
- 7) вычислить коэффициент корреляции.

Решение. 1) Найдём маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$ по формулам (6.1.1) и (6.1.2). Например, $P(\xi = 1) = p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0,09 + 0,11 + 0,2 = 0,4$, $P(\eta = 4) = p_{22} + p_{32} = 0,05 + 0,09 = 0,14$.

Маргинальные законы распределения запишем в виде таблиц.

$\xi = x_j$	1	2	3
$P(\xi = x_j)$	0,4	0,3	0,3

и

$\eta = y_i$	2	4	6
$P(\eta = y_i)$	0,2	0,3	0,5

2) Для определения зависимости составляющих ξ и η проверим равенство $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)$ для всех значений составляющих. Если

равенство выполняется, то составляющие независимы. Рассчитываем вероятности:

$$P(\xi = x_1, \eta = y_1) = 0,09 = P(\xi = x_1) \cdot P(\eta = y_1) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08.$$

Равенство неверно, следовательно, составляющие ξ и η случайной величины $(\xi; \eta)$ зависимы.

3) Найдём условные законы распределения по формулам (6.1.4) и (6.1.5).

$$\begin{aligned} \text{Например, } p_{3|2} &= P(\xi = x_3 | \eta = y_2) = \frac{P((\xi = x_3) \cdot (\eta = y_2))}{P(\eta = y_2)} = \\ &= \frac{P((\xi = 3) \cdot (\eta = 4))}{P(\eta = 4)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}, \quad p_{3|1} = P(\eta = y_3 | \xi = x_1) = \frac{P((\xi = x_1) \cdot (\eta = y_3))}{P(\xi = x_1)} = \\ &= \frac{P((\xi = 1) \cdot (\eta = 3))}{P(\xi = 1)} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Условные законы распределения запишем в виде таблиц.

$\xi = x_i$	1	2	3	и	$\eta = y_j$	2	4	6
$P(\eta = 2)$	9/20	1/4	3/10		$P(\xi = 1)$	9/40	1/6	1/5
$P(\eta = 4)$	11/30	3/10	1/3		$P(\xi = 2)$	11/40	3/10	1/3
$P(\eta = 6)$	2/5	8/25	7/25		$P(\xi = 3)$	1/2	8/15	7/15

4) Вычислим математические ожидания составляющих ξ и η случайной величины $(\xi; \eta)$. Для составляющей ξ математическое ожидание равно $M(\xi) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,3 = 1,9$, а для η - $M(\eta) = 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,5 = 4,6$.

Находим дисперсии составляющих ξ и η случайной величины $(\xi; \eta)$. Для величины ξ дисперсия равна $D(\xi) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,3 - 1,9^2 = 0,69$, а для составляющей η - $D(\eta) = 2^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,3 + 6^2 \cdot 0,5 - 4,6^2 = 2,44$.

Тогда среднеквадратические отклонения для составляющих случайной величины равны: $\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0,69} \approx 0,83$, $\sigma_\eta = \sqrt{D(\eta)} = \sqrt{2,44} \approx 1,562$.

5) Найдём функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$

по формуле (6.1.3): $F(x; y) = P((\xi < x) \cdot (\eta < y)) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}$.

Если значения случайных величин $\xi \leq 1; \eta \leq k$, где k принимает любое значение, то функция распределения $F(x; y)$ равна нулю, так как не существует значений случайной величины, которые удовлетворяют неравенствам $\xi \leq 1; \eta \leq k$. Аналогично, если $\xi \leq m; \eta \leq 2$, где m принимает любое значение, то функция распределения $F(x; y)$ так же равна нулю.

Если $\xi \leq 1; 2 < \eta \leq 4$, то $F(x; y) = p_{11} = 0,09$. Если $\xi \leq 1; 4 < \eta \leq 6$, то $F(x; y) = p_{11} + p_{21} = 0,09 + 0,11 = 0,2$.

Рассмотрим событие $\xi \leq 1; \eta > 6$, то $F(x; y) = p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0,09 + 0,11 + 0,2 = 0,4$. Предположим, что составляющие случайной величины

удовлетворяют условию $\xi \leq 3, \eta \leq 6$. В данном случае функция распределения равна

$$F(x; y) = p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 0,09 + 0,05 + 0,11 + 0,09 = 0,34.$$

Запишем функцию распределения $F(x; y)$ двумерной случайной величины (ξ, η) в виде таблицы.

	$\xi \leq 1$	$1 < \xi \leq 2$	$2 < \xi \leq 3$	$\xi > 3$
$\eta \leq 2$	0	0	0	0
$2 < \eta \leq 4$	0	0,09	0,14	0,2
$4 < \eta \leq 6$	0	0,2	0,34	0,5
$\eta > 6$	0	0,4	0,7	1

6) Вычислим вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в прямоугольник $\Pi = \{(\xi; \eta) | 1,5 \leq \xi \leq 4 \wedge 3 \leq \eta \leq 7\}$, используя формулу (6.1.8).

$$\begin{aligned} P((1,5 \leq \xi \leq 4) \cdot (3 \leq \eta \leq 7)) &= F(4; 7) - F(1,5; 7) - F(4; 3) + F(1,5; 3) = \\ &= 1 - 0,4 - 0,2 + 0,09 = 0,049. \end{aligned}$$

7) Вычислим коэффициент корреляции $\rho_{\xi\eta}$ по формуле (6.1.17), для чего вначале найдём ковариацию $K_{\xi\eta}$ по формуле (6.1.16).

$$\begin{aligned} K_{\xi\eta} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j p_{ij} - M(\xi) \cdot M(\eta) = 1 \cdot 2 \cdot 0,09 + 1 \cdot 4 \cdot 0,11 + 1 \cdot 6 \cdot 0,2 + 2 \cdot 2 \cdot 0,05 + \\ &+ 2 \cdot 4 \cdot 0,09 + 2 \cdot 6 \cdot 0,16 + 3 \cdot 2 \cdot 0,06 + 3 \cdot 4 \cdot 0,1 + 3 \cdot 6 \cdot 0,14 - 1,9 \cdot 4,6 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициент корреляции равен

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}} = \frac{0}{0,83 \cdot 1,562} = 0.$$

Равенство нулю коэффициента корреляции ничего не говорит о зависимости составляющих. Во втором пункте мы доказали, что составляющие являются зависимыми.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{ij}$ дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$ задана в виде таблицы

$\Omega_{\eta} \backslash \Omega_{\xi}$	3	5	7
1	0,03	0,07	0,09
2	0,12	0,08	0,3
4	0,14	0,15	0,02

Найти маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$. Установить зависимость составляющие ξ и η .

6.3.2 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{ij}$ дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$ задана в виде таблицы

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	3	5	7
2	0,13	0,17	0,19	0,02
6	0,2	0,12	0,13	0,04

Найти условные законы распределения.

6.3.3 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{ij}$ дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$ задана в виде таблицы

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	5
2	0,1	0,05
4	0,2	0,29
6	0,14	0,13
8	0,03	0,06

Найти математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η .

6.3.4 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{ij}$ дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$ задана в виде таблицы

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	5	7
1	0,08	0,06	0,06
2	0,11	0,08	0,14
4	0,21	0,16	0,1

Найти функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в прямоугольник $\Pi = \{(\xi; \eta) | 3,5 \leq \xi \leq 8 \wedge 1,5 \leq \eta \leq 3,5\}$. Вычислить коэффициент корреляции.

6.3.5 Изготавливаемые на предприятии втулки сортируются по отклонению их внутреннего диаметра от номинального размера на четыре группы со значениями 0,02; 0,04; 0,06 и 0,08 мм и по овальности на четыре группы со значениями 0,01; 0,03; 0,05 и 0,07 мм. Совместное распределение отклонений диаметра (случайная величина ξ) и овальности (случайная величина η) втулок приведено в таблице

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	0,02	0,04	0,06	0,08
0,01	0,08	0,08	0,10	0,04

0,03	0,02	0,03	0,04	0,02
0,05	0,04	0,04	0,02	0,01
0,07	0,06	0,15	0,24	0,03

Найти маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$. Установить, зависимы или нет составляющие ξ и η . Определить условные законы распределения составляющих. Вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η . Найти функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в прямоугольник $\Pi = \{(\xi; \eta) | 0,05 \leq \xi \leq 0,07 \wedge 0,02 \leq \eta \leq 0,08\}$ и коэффициент корреляции.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{ij}$ дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$ задана в виде таблицы

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	x_1	x_2	x_3
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

Требуется:

- 1) найти маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$;
- 2) установить, зависимы или нет составляющие ξ и η ;
- 3) найти условные законы распределения;
- 4) вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η ;
- 5) найти функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$;
- 6) вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в прямоугольник $\Pi = \{(\xi; \eta) | x_1 + 0,5 \leq \xi \leq x_2 + 0,5 \wedge y_1 + 0,5 \leq \eta \leq y_2 + 1\}$;
- 7) вычислить коэффициент корреляции.

Исходные данные для каждого варианта приведены в таблице.

6.4.1.1

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	3
2	0,13	0,15	0,10
6	0,27	0,25	0,10

6.4.1.2

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	2	3	4
3	0,11	0,17	0,12
5	0,18	0,15	0,27

6.4.1.3

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	4	5
1	0,23	0,12	0,02
3	0,31	0,14	0,18

6.4.1.5

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	5	6	7
2	0,10	0,12	0,06
3	0,30	0,40	0,02

6.4.1.7

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	7	8	9
2	0,30	0,12	0,10
4	0,20	0,06	0,22

6.4.1.9

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	5	7
3	0,11	0,12	0,04
7	0,31	0,28	0,14

6.4.1.11

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	5	7
1	0,10	0,09	0,13
7	0,31	0,23	0,14

6.4.1.13

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	5	9
3	0,12	0,13	0,14
4	0,21	0,18	0,22

6.4.1.4

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	4	5	6
1	0,32	0,12	0,20
2	0,14	0,11	0,11

6.4.1.6

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	6	7	8
1	0,09	0,12	0,10
6	0,21	0,28	0,20

6.4.1.8

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	3	5
2	0,12	0,16	0,18
8	0,27	0,14	0,13

6.4.1.10

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	7	9
2	0,13	0,17	0,15
8	0,21	0,18	0,16

6.4.1.12

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	7	9
2	0,41	0,25	0,06
7	0,03	0,12	0,13

6.4.1.14

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	5	7	9
2	0,04	0,35	0,24
9	0,05	0,16	0,16

6.4.1.15

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	2	4	6
1	0,21	0,13	0,15
3	0,23	0,21	0,07

6.4.1.16

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	2	4	8
1	0,12	0,31	0,10
5	0,11	0,25	0,11

6.4.1.17

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	2	6	8
3	0,12	0,10	0,13
7	0,12	0,25	0,28

6.4.1.18

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	4
4	0,10	0,09	0,09
5	0,17	0,19	0,36

6.4.1.19

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	5
-------------------------------------	---	---	---

6.4.1.20

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	7
-------------------------------------	---	---	---

6.4.1.21

Ω_η			
5	0,09	0,12	0,13
7	0,21	0,22	0,23
Ω_ξ	Ω_η	1	2
6	0,30	0,06	0,07
8	0,20	0,18	0,19

6.4.1.23

Ω_ξ	Ω_η	3	6
5	0,28	0,11	0,02
7	0,32	0,12	0,15

6.4.1.25

Ω_ξ	Ω_η	3	8
1	0,21	0,11	0,12
2	0,28	0,13	0,15

6.4.1.27

Ω_ξ	Ω_η	4	6
5	0,24	0,23	0,22
7	0,08	0,13	0,10

6.4.1.29

Ω_ξ	Ω_η	1	3
2	0,03	0,04	0,08
4	0,12	0,21	0,52

6.4.1.22

Ω_η			
5	0,16	0,17	0,18
9	0,15	0,16	0,18
Ω_ξ	Ω_η	1	3
7	0,10	0,13	0,14
8	0,20	0,22	0,21

6.4.1.24

Ω_ξ	Ω_η	2	5
5	0,06	0,04	0,14
9	0,25	0,23	0,28

6.4.1.26

Ω_ξ	Ω_η	4	5
2	0,12	0,13	0,14
3	0,18	0,23	0,20

6.4.1.28

Ω_ξ	Ω_η	1	5
6	0,14	0,13	0,15
8	0,17	0,19	0,22

6.4.1.30

Ω_ξ	Ω_η	6	7
5	0,06	0,08	0,11
9	0,21	0,23	0,31

7 НЕПРЕРЫВНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

7.1 Содержание: распределение вероятностей многомерных непрерывных случайных величин, функция и плотность распределения многомерной случайной величины, зависимые и независимые случайные величины, числовые характеристики непрерывных многомерных случайных величин, двумерное нормальное распределение, предельные теоремы теории вероятностей.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Непрерывная случайная величина $(\xi; \eta)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} a \cdot (2x + 2y) & \text{при } 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; \\ 0 & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Требуется:

- 1) найти неизвестный параметр a ;
- 2) найти маргинальные распределения составляющих ξ и η непрерывной случайной величины $(\xi; \eta)$;
- 3) установить, зависимы или нет составляющие ξ и η ;
- 4) найти условные законы распределения;
- 5) вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η ;
- 6) найти функцию распределения непрерывной случайной величины $(\xi; \eta)$;
- 7) вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в область $G = \{(\xi; \eta) | 0 \leq \xi \leq 1 \wedge 1 \leq \eta \leq 2\}$;
- 8) вычислить ковариацию случайных величин ξ и η .

Решение. 1) Для определения неизвестного параметра a воспользуемся условием нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^2 a(2x + 2y) dx dy = a \int_0^2 dx \int_0^2 (2x + 2y) dy = a \int_0^2 (2xy + y^2) \Big|_0^2 dx = \\ &= a \int_0^2 (4x + 4) dx = a \cdot (2x^2 + 4x) \Big|_0^2 = a \cdot 16 = 1. \end{aligned}$$

Откуда $a = \frac{1}{16}$. Следовательно, плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{16} \cdot (2x + 2y) & \text{при } 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; \\ 0 & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

2) Найдём маргинальные распределения составляющих ξ и η непрерывной случайной величины $(\xi; \eta)$ по формулам (7.1.1.7) и (7.1.1.8).

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^2 \frac{1}{16}(2x + 2y) dy = \frac{1}{16}(2xy + y^2) \Big|_0^2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4},$$

то есть $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(4x + 4), & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^2 \frac{1}{16}(2x + 2y) dx = \frac{1}{16}(x^2 + 2yx) \Big|_0^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}y,$$

то есть $f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{16}(4 + 4y), & \text{если } 0 \leq y \leq 2; \\ 0, & \text{если } y < 0 \text{ или } y > 2. \end{cases}$

3) Установим, зависимы или нет составляющие ξ и η . Проверим равенство $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{16} \cdot (2x + 2y) & \text{при } 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; \\ 0 & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > 2; \end{cases} \cdot \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}y, & \text{если } 0 \leq y \leq 2; \\ 0, & \text{если } y < 0 \text{ или } y > 2; \end{cases} \neq f(x, y)$$

Следовательно, составляющие ξ и η являются зависимыми величинами.

4) Для определения условных распределений воспользуемся формулами (7.1.1.11) и (7.1.1.12).

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{x+y}{2+2y} & \text{при } 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; \\ 0 & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{x+y}{2x+2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; \\ 0 & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

5) Математическое ожидание случайной величины ξ вычислим по формуле (7.1.1.16).

$$m_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy = \int_0^2 x \frac{1}{16}(4x + 4) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{12} - \frac{4}{8} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Дисперсию случайной величины ξ вычислим по формуле (7.1.1.18).

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x) dx - m_\xi^2 = \int_0^2 x^2 \frac{1}{16} (4x + 4) dx - \left(\frac{1}{6} \right)^2 = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \right) dx - \frac{1}{36} = \\ &= \left(\frac{1}{16} x^4 + \frac{1}{12} x^3 \right) \Big|_0^2 - \frac{1}{36} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{36} = \frac{59}{36}. \end{aligned}$$

Среднеквадратичное отклонение случайной величины ξ равно:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = \frac{\sqrt{59}}{6}.$$

На основании симметрии плотности вероятностей относительно составляющих ξ и η следует, что

$$m_\eta = m_\xi = \frac{1}{6}, \quad D(\eta) = D(\xi) = \frac{59}{36}, \quad \sigma_\eta = \sigma_\xi = \frac{\sqrt{59}}{6}.$$

б) Найдём функцию распределения заданной непрерывной случайной величины (ξ, η) по формуле (7.1.1.1): $F(x, y) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^y f(x, y) dy$.

Если $x \leq 0$ или $y \leq 0$, то $f(x, y) = 0$, а, следовательно, $F(x, y) = 0$

Если $0 < x < 2$ и $0 < y < 2$, то

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x dx \int_0^y \frac{1}{16} \cdot (2x + 2y) dy = \frac{1}{16} \int_0^x (2xy + y^2) \Big|_0^y dx = \frac{1}{16} \int_0^x (2xy + y^2) dx = \\ &= \frac{1}{16} \cdot (x^2 y + y^2 x) \Big|_0^x = \frac{1}{16} \cdot (x^2 y + y^2 x). \end{aligned}$$

Если $0 < x < 2$ и $y \geq 2$, то

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x dx \int_0^2 \frac{1}{16} \cdot (2x + 2y) dy = \frac{1}{16} \int_0^x (2xy + y^2) \Big|_0^2 dx = \frac{1}{16} \int_0^x (4x + 4) dx = \\ &= \frac{1}{16} \cdot (2x^2 + 4x) \Big|_0^x = \frac{1}{16} \cdot (2x^2 + 4x). \end{aligned}$$

Если $x \geq 2$ и $0 < y < 2$, то

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^2 dx \int_0^y \frac{1}{16} \cdot (2x + 2y) dy = \frac{1}{16} \int_0^2 (2xy + y^2) \Big|_0^y dx = \frac{1}{16} \int_0^2 (2xy + y^2) dx = \\ &= \frac{1}{16} \cdot (x^2 y + y^2 x) \Big|_0^2 = \frac{1}{16} \cdot (4y + 2y^2). \end{aligned}$$

Если $x \geq 2$ и $y \geq 2$, то

$$F(x, y) = \int_0^2 dx \int_0^2 \frac{1}{16} \cdot (2x + 2y) dy = \frac{1}{16} \int_0^2 (2xy + y^2) \Big|_0^2 dx = \frac{1}{16} \int_0^2 (4x + 4) dx =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot (2x^2 + 4x) \Big|_0^2 = \frac{1}{16} \cdot (2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2) = 1.$$

Таким образом, функция распределения системы имеет вид

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ \frac{1}{16}(x^2 y + y^2 x) & \text{при } 0 < x < 2 \text{ и } 0 < y < 2; \\ \frac{1}{16}(2x^2 + 4x) & \text{при } 0 < x < 2 \text{ и } y \geq 2; \\ \frac{1}{16}(4y + 2y^2) & \text{при } x \geq 2 \text{ и } 0 < y < 2; \\ 1 & \text{при } x \geq 2 \text{ и } y \geq 2. \end{cases}$$

7) Вычислим вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в область $G = \{(\xi; \eta) | 0 \leq \xi \leq 1 \wedge 1 \leq \eta \leq 2\}$;

$$\begin{aligned} P((0 \leq \xi \leq 1) \cdot (1 \leq \eta \leq 2)) &= \int_0^1 dx \int_1^2 \frac{1}{16}(2x + 2y) dy = \frac{1}{16} \int_0^1 (2xy + y^2) \Big|_1^2 dx = \\ &= \frac{1}{16} \int_0^1 (4x + 4 - 2x - 1) dx = \frac{1}{16} \int_0^1 (2x + 3) dx = \frac{1}{16} (x^2 + 3x) \Big|_0^1 = \frac{1}{16} (1 + 3 - 0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

8) Вычислим ковариацию случайных величин ξ и η по формуле (7.1.1.20).

$$\begin{aligned} K_{\xi\eta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy - m_{\xi} m_{\eta} = \int_0^2 \int_0^2 xy \frac{x+y}{8} dx dy - \frac{1}{36} = \int_0^2 dx \int_0^2 \frac{x^2 y + xy^2}{8} dy - \frac{1}{36} = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) \Big|_0^2 dx - \frac{1}{36} = \frac{1}{8} \int_0^2 \left(2x^2 + \frac{8x}{3} \right) dx - \frac{1}{36} = \frac{1}{8} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right) \Big|_0^2 - \frac{1}{36} = \frac{59}{36}. \end{aligned}$$

7.2.2 Производится три независимых выстрела по цели (на рис. 7.2.1 фигура $MNSTQ$). Прицеливание производится по точке O . Рассеивание является круговым. Среднеквадратичное отклонение равно 2 метра. Систематическая ошибка отсутствует. Найти вероятность хотя бы одного попадания при $r = 2$ м и $l = 2,4$ м.

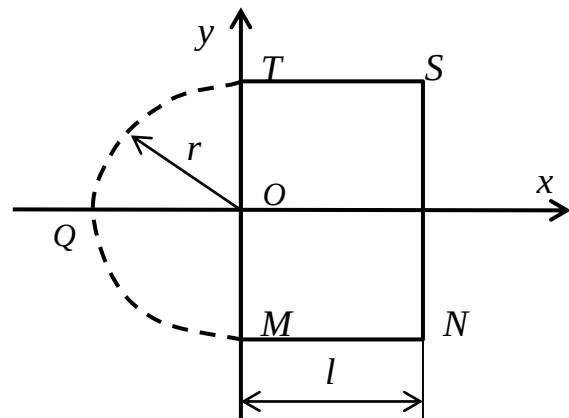


Рисунок 7.2.1 - Цель для выстрела

Решение. Пусть событие A - попадание в прямоугольник $MNST$, а событие B - попадание в полукруг MQT при одном выстреле. Тогда событие $C = A + B$ - попадание в цель при одном выстреле.

Рассматривая случайные величины ξ и η как координаты точки попадания и учитывая, что рассеивание точки (ξ, η) подчинено нормальному закону с

параметрами $m_\xi = m_\eta = 0$, $\sigma_\xi = \sigma_\eta = 2 \text{ м}$, на основании формулы (7.1.1.26) находим вероятность попадания в прямоугольник при одном выстреле:

$$P(A)P((\xi, \eta) \in MNST) = \left(\Phi\left(\frac{2,4-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-0}{2}\right) \right) \times \\ \times \left(\Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{2}\right) \right) = 2 \cdot \Phi(1,2) \cdot \Phi(1) = 2 \cdot 0,38493 \cdot 0,34134 \approx 0,26.$$

Так как при круговом нормальном рассеивании, совпадающим с началом координат, расстояние от начала координат до случайной точки (ξ, η) распределяется по закону Рэлея, то для определения вероятности попадания в полукруг радиуса $r = 2 \text{ м}$ (вероятности появления события B) применим функцию распределения Рэлея (формула 7.1.1.28):

$$P(B) = \frac{1}{2} P(R < 2) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-2^2/2 \cdot 2^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - e^{-1/2} \right) \approx 0,20.$$

Следовательно, вероятность попадания в цель при одном выстреле, равна

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,26 + 0,20 = 0,46.$$

Для определения вероятностей хотя бы одного попадания в цель при трёх независимых выстрелах перейдём к противоположному событию $\bar{C}$ и найдём его вероятность $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,46 = 0,54$.

Следовательно, искомая вероятность (хотя бы одно попадание в цель) равна

$$P = 1 - P^3(\bar{C}) = 1 - (0,54)^3 = 0,842536.$$

7.2.3 Устройство состоит из 20 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,025. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется: а) меньше трёх, б) не меньше трёх.

Решение. а) Обозначим через ξ дискретную случайную величину – число отказавших элементов за время T . Тогда,

$$M(\xi) = np = 20 \cdot 0,025 = 0,5;$$

$$D(\xi) = npq = 20 \cdot 0,025 \cdot 0,0975 = 0,04875.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Подставим $M(\xi) = 0,5$, $D(\xi) = 0,04875$, $\varepsilon = 3$, получим

$$P(|\xi - 0,5| < 3) \geq 1 - \frac{0,04875}{3^2} \approx 0,9458.$$

б) Так как события $|\xi - 0,5| < 3$ и $|\xi - 0,5| \geq 3$ противоположны, то сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно,

$$P(|\xi - 0,5| \geq 3) = 1 - P(|\xi - 0,5| < 3) \leq 1 - 0,9458 = 0,0542.$$

7.2.4 Дисперсия каждой из 4000 независимых случайных величин равна 10. Оценить вероятность того, что отклонение среднее арифметической этих

случайных величин от средней математической их математических ожиданий не превысит 0,3.

Решение. Воспользовшись неравенством (7.1.2.2) при значениях $\varepsilon = 0,3$, $D(\xi) = 10$ и $n = 4000$, находим

$$P\left(\left|\frac{1}{4000} \sum_{i=1}^{4000} \xi_i - \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^{4000} M(\xi_i)\right| < 0,3\right) \geq 1 - \frac{10}{4000 \cdot 3^2} \approx 0,9997.$$

Следовательно, вероятность искомого события не менее 0,9997.

7.2.5 Сколько необходимо проверить проштампованных бланков, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения частоты проштампованных бланков от вероятности бланка быть проштампованным, равной 0,8, не превысит 0,01?

Решение. В соответствии с неравенством (7.1.2.4) при известных значениях p , q и ε число n выбирается таким, что разность $1 - pq/n\varepsilon^2$ будет не меньшей заданной вероятности 0,9, то есть $1 - pq/n\varepsilon^2 \geq 0,9$ или $n \geq \frac{pq}{0,1\varepsilon^2}$.

При $p = 0,8$, $q = 0,2$ и $\varepsilon = 0,01$, получаем

$$n \geq \frac{0,8 \cdot 0,2}{0,1 \cdot (0,01)^2} = \frac{0,16}{0,00001} = 16000,$$

то есть наименьшее число бланков, которые следует проверить, равно 16000.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Непрерывная двумерная случайная величина $(\xi; \eta)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} a \cdot (2x + 3y) & \text{при } 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4; \\ 0 & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр a . Определить маргинальные распределения составляющих ξ и η непрерывной случайной величины $(\xi; \eta)$. Установить, зависимость составляющих ξ и η . Записать условные законы распределения;

7.3.2 Непрерывная двумерная случайная величина $(\xi; \eta)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} 24 \cdot x \cdot y & \text{при } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Найти функцию распределения непрерывной случайной величины $(\xi; \eta)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в область $G = \{(\xi; \eta) | 0,5 \leq \xi \leq 1,75 \wedge 0,25 \leq \eta \leq 0,75\}$. Рассчитать математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η . Определить значение ковариации случайных величин ξ и η .

7.3.3 Производится три независимых выстрела по цели, которая представляет собой прямоугольник со сторонами $a=2\text{ км}$ и $b=5\text{ км}$. Центр рассеивания совпадает с началом координат. Рассеивание характеризуется среднеквадратическими отклонениями $\sigma_\xi=4\text{ км}$ и $\sigma_\eta=9\text{ км}$. Систематические отклонения отсутствуют. Определить вероятность двух попаданий в цель.

7.3.4 Изделие является изделием первого сорта, если отклонения его размеров от номинала не превосходят по абсолютной величине соответственно 4,6 и 2,5 мм. Случайные отклонения ξ и η размеров изделия от стандарта независимы и подчиняются нормальному закону со среднеквадратичными отклонениями $\sigma_\xi=3\text{ мм}$ и $\sigma_\eta=2\text{ мм}$. Систематические отклонения отсутствуют. Найти вероятность того, что среди отобранных трёх изделий, хотя бы одно изделие первого сорта.

7.3.5 Система двух случайных величин (ξ, η) подчинена нормальному закону распределения, причём рассеивание является круговым. Найти радиус круга, центр которого совпадает с центром рассеивания и вероятность попадания в который равна 0,5.

7.3.6 Цель, по которой ведётся стрельба представляет собой ромб с диагоналями 20 и 4 метра. По цели производится четыре одиночных выстрела, причём прицеливание ведётся по центру ромба. Главные оси рассеивания совпадают с диагоналями ромба. Дисперсии отклонений равны: $D(\xi)=25$ и $D(\eta)=36$. Систематические ошибки отсутствуют. Чтобы поразить цель, достаточно двух попаданий. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

7.3.7 Система двух независимых случайных величин $(\xi; \eta)$ подчинена нормальному закону распределения с параметрами $m_\xi=8$, $m_\eta=5$, $D(\xi)=4$, $D(\eta)=9$. Написать выражение для плотности распределения вероятностей и функции распределения.

7.3.8 Определить вероятность попадания при одном выстреле в прямоугольник со сторонами $a=4\text{ м}$ и $b=3\text{ м}$, параллельными осям рассеивания, если точка рассеивания совпадает с центром прямоугольника, а среднеквадратичные отклонения равны $\sigma_\xi=0,5\text{ м}$, $\sigma_\eta=1\text{ м}$.

7.3.9 Система двух случайных величин $(\xi; \eta)$ подчиняется нормальному закону распределения с плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = a \cdot e^{-\left(\frac{(x-2)^2}{50} + \frac{(y-4)^2}{32}\right)}.$$

Найти параметр a . Определить вероятность совместного выполнения двух неравенств: $-2 < \xi < 2$, $1 < \eta < 3$.

7.3.10 Система двух независимых случайных величин $(\xi; \eta)$ подчинена нормальному закону распределения с параметрами $m_\xi=4$, $m_\eta=9$, $D(\xi)=9$, $D(\eta)=25$. Определить вероятность попадания случайной точки $(\xi; \eta)$ в

прямоугольник, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны координатным осям и равны 3 и 7 в направлении этих осей.

7.3.11 По круговой мишени производится четыре независимых выстрела. Радиус мишени равен 15 см. Прицеливание ведётся по центру мишени. Систематические ошибки отсутствуют. Рассеивание круговое с вероятностным отклонением 3 см. Найти вероятность того, что в мишени будет не более двух пробоин.

7.3.12 Вероятность наступления некоторого события в каждом из 2000 испытаний равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений данного события от математического ожидания будет более 80.

7.3.13 Известно, что 80 % всей продукции, производимой предприятием, является изделием высшего сорта. Определить вероятность того, что число изделий высшего сорта среди 90000 изготовленных будет отличаться от математического ожидания не более чем 900 штук.

7.3.14 Вероятность наступления события в каждом отдельно взятом испытании равна 0,4. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что число ξ появлений события будет заключено в пределах от 30 до 70, если будет произведено 100 независимых испытаний.

7.3.15 Дисперсия каждой из 3000 независимых случайных величин равна 15. Оценить вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней математической их математических ожиданий не превысит 0,2.

7.3.16 Сколько необходимо проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения частоты годных деталей от вероятности деталей быть годной, равной 0,9, не превысит 0,02?

7.3.17 При контрольной проверке изготавливаемых приборов было установлено, что в среднем 10 штук из 100 оказываются с теми или иными дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди 500 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от математического ожидания этой доли не более чем, на 0,04.

7.3.18 Определить необходимое число опытов, которые необходимо провести, чтобы отклонение частоты появления события от вероятности его наступления в отдельном опыте, равной 0,7, не превзошло по абсолютной величине 0,04 с вероятностью 0,95.

7.3.19 Оценить вероятность того, что в партии из 10000 изделий отклонение частоты бракованных изделий от вероятности 0,03 быть бракованным изделием превысит 0,02.

7.3.20 Стрельба ведётся поочерёдно из трёх орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из каждого орудия равны соответственно 0,2; 0,4 и 0,6. Произведено 600 выстрелов. Оценить снизу вероятность того, что при этом частота отличается от средней вероятности попадания по абсолютной величине не более, чем на 0,04.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Непрерывная случайная величина $(\xi; \eta)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} a \cdot (k \cdot x + (k-1) \cdot y) & \text{при } 0 \leq x \leq k; 0 \leq y \leq k; \\ 0 & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y, \end{cases}$$

где k - номер варианта.

Найти неизвестный параметр a , маргинальные распределения составляющих ξ и η непрерывной случайной величины $(\xi; \eta)$, и условные законы распределения. Установить, зависимы или нет составляющие ξ и η . Вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η . Определить функцию распределения непрерывной случайной величины $(\xi; \eta)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в область $G = \{(\xi; \eta) | k-1 \leq \xi \leq k \wedge k-1 \leq \eta \leq k\}$ и ковариацию СВ ξ и η .

7.4.2 Вычислить вероятность хотя бы одного попадания при выстрелах в прямоугольник со сторонами a и b , параллельными осям рассеивания, если точка рассеивания совпадает с центром прямоугольника, а среднеквадратичные отклонения равны σ_ξ , σ_η . Систематические промахи отсутствуют. Записать плотности распределения вероятностей для случайной $(\xi; \eta)$ и её составляющих.

7.4.2.1	$a=1, b=2, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=5.$	7.4.2.2	$a=1, b=3, \sigma_\xi=4, \sigma_\eta=2.$
7.4.2.3	$a=1, b=4, \sigma_\xi=7, \sigma_\eta=6.$	7.4.2.4	$a=1, b=5, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=3.$
7.4.2.5	$a=1, b=6, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=4.$	7.4.2.6	$a=1, b=7, \sigma_\xi=4, \sigma_\eta=7.$
7.4.2.7	$a=1, b=8, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=3.$	7.4.2.8	$a=1, b=9, \sigma_\xi=1, \sigma_\eta=4.$
7.4.2.9	$a=2, b=3, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=5.$	7.4.2.10	$a=2, b=5, \sigma_\xi=6, \sigma_\eta=2.$
7.4.2.11	$a=2, b=4, \sigma_\xi=6, \sigma_\eta=9.$	7.4.2.12	$a=2, b=6, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=5.$
7.4.2.13	$a=2, b=7, \sigma_\xi=1, \sigma_\eta=8.$	7.4.2.14	$a=2, b=9, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=2.$
7.4.2.15	$a=3, b=4, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=3.$	7.4.2.16	$a=3, b=5, \sigma_\xi=7, \sigma_\eta=8.$
7.4.2.17	$a=3, b=6, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=4.$	7.4.2.18	$a=3, b=7, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=2.$
7.4.2.19	$a=3, b=8, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=4.$	7.4.2.20	$a=3, b=9, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=1.$
7.4.2.21	$a=4, b=5, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=5.$	7.4.2.22	$a=4, b=6, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=7.$
7.4.2.23	$a=4, b=8, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=2.$	7.4.2.24	$a=4, b=9, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=8.$
7.4.2.25	$a=5, b=6, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=4.$	7.4.2.26	$a=5, b=7, \sigma_\xi=4, \sigma_\eta=1.$
7.4.2.27	$a=5, b=8, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=9.$	7.4.2.28	$a=5, b=9, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=9.$
7.4.2.29	$a=6, b=7, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=5.$	7.4.2.30	$a=6, b=8, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=4.$

7.4.3 В рассматриваемом технологическом процессе в среднем k % изделий имеет допуск ± 5 %. Какое число изделий из партии n штук, с вероятностью P можно планировать с допуском ± 5 %.

7.4.3.1	$k = 75, P = 0,99, n = 200000.$	7.4.3.2	$k = 70, P = 0,98, n = 150000.$
7.4.3.3	$k = 76, P = 0,97, n = 100000.$	7.4.3.4	$k = 74, P = 0,96, n = 232000.$
7.4.3.5	$k = 71, P = 0,95, n = 234000.$	7.4.3.6	$k = 73, P = 0,94, n = 254000.$
7.4.3.7	$k = 72, P = 0,93, n = 231000.$	7.4.3.8	$k = 78, P = 0,92, n = 180000.$
7.4.3.9	$k = 77, P = 0,90, n = 190000.$	7.4.3.10	$k = 81, P = 0,89, n = 170000.$
7.4.3.11	$k = 85, P = 0,99, n = 140000.$	7.4.3.12	$k = 76, P = 0,88, n = 245000.$
7.4.3.13	$k = 91, P = 0,83, n = 246000.$	7.4.3.14	$k = 68, P = 0,81, n = 112000.$
7.4.3.15	$k = 67, P = 0,94, n = 324000.$	7.4.3.16	$k = 93, P = 0,69, n = 451000.$
7.4.3.17	$k = 79, P = 0,75, n = 247000.$	7.4.3.18	$k = 87, P = 0,89, n = 253000.$
7.4.3.19	$k = 86, P = 0,91, n = 120000.$	7.4.3.20	$k = 67, P = 0,89, n = 290000.$
7.4.3.21	$k = 60, P = 0,82, n = 400000.$	7.4.3.22	$k = 76, P = 0,98, n = 230000.$
7.4.3.23	$k = 84, P = 0,84, n = 284000.$	7.4.3.24	$k = 89, P = 0,93, n = 187000.$
7.4.3.25	$k = 56, P = 0,67, n = 110000.$	7.4.3.26	$k = 86, P = 0,92, n = 251000.$
7.4.3.27	$k = 77, P = 0,88, n = 222000.$	7.4.3.28	$k = 74, P = 0,91, n = 140000.$
7.4.3.29	$k = 79, P = 0,89, n = 300000.$	7.4.3.30	$k = 89, P = 0,89, n = 289000.$