

ВЕКТОРЫ

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рисунок 3.2.1 а). Изобразить на чертеже их линейную комбинацию $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

Решение. Выбираем на плоскости произвольную точку A и откладываем от неё вектор $2\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, который совпадает по направлению с вектором $\vec{a}$ и имеет длину в два раза больше, чем этот вектор (рисунок 3.2.1 б). От точки B откладываем вектор $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, который по длине в два раза меньше вектора $\vec{b}$ и противоположен ему по направлению. Затем от полученной точки C строим вектор $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\vec{c}$, который по длине равен одной трети вектора $\vec{c}$ и имеет с ним одно направление. Искомая линейная комбинация векторов $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ изображается вектором $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, который замыкает полученную ломаную, начало которой находится в начале вектора $2\vec{a}$, то есть в точке A , а конец в конце вектора $\frac{1}{3}\vec{c}$, а, следовательно, в точке D (рисунок 3.2.1 б).

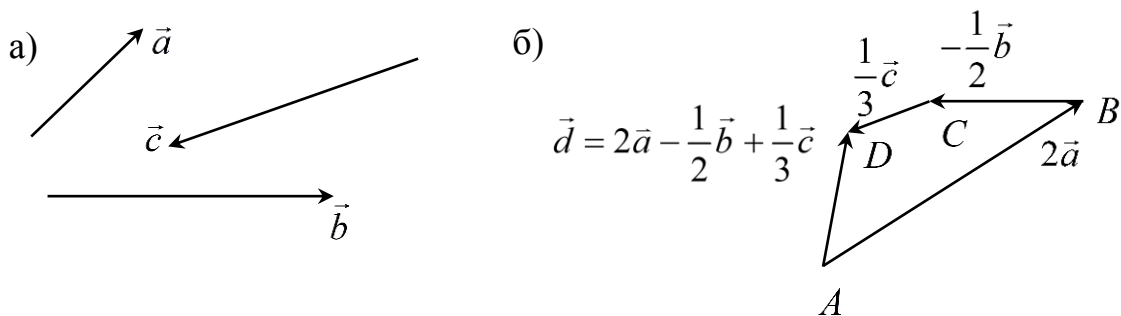


Рисунок 3.2.1 – Сумма векторов $2\vec{a}$, $-\vec{b}/2$ и $\vec{c}/3$

3.2.2 В равнобедренной трапеции $ABCD$ на стороне основания BC взята точка M , которая делит это основание в отношении $|\overrightarrow{BM}| : |\overrightarrow{MC}| = 5:1$. Боковая сторона CD делится точкой N в отношении $|\overrightarrow{CN}| : |\overrightarrow{ND}| = 1:3$. Основание высоты BK делит отрезок AD в отношении $|\overrightarrow{AK}| : |\overrightarrow{KD}| = 1:7$. Выразить вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

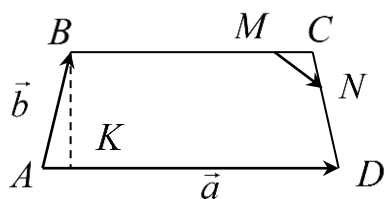


Рисунок 3.2.2 – Трапеция

Решение. Изобразим трапецию $ABCD$ с указанием необходимых векторов (рисунок 3.2.2). Выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, используя правила сложения векторов и умножение вектора на действительное число.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{6} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{CD} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{8} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{8} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} =$$

$$= \frac{3}{8} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{8} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{16} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{16} \vec{a} - \frac{1}{4} \vec{b}.$$

3.2.3 Задан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Выразить через векторы $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1 K}$, где M и N – середины рёбер $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{BC}$, а K – точка пересечения медиан треугольника BCD .

Решение. Построим параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с указанием

необходимых векторов (рисунок 3.2.3). Выразим векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1 K}$ через векторы $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, используя правила сложения векторов и умножение вектора на действительное число. Находим вектор $\overrightarrow{MN}$

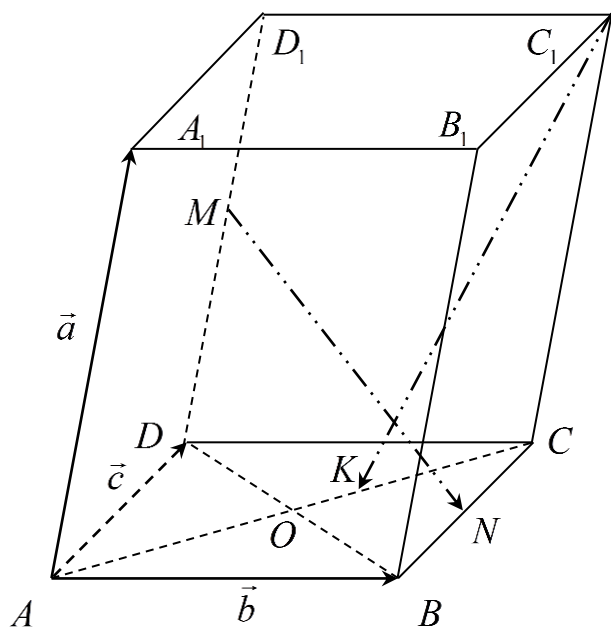


Рисунок 3.2.3 – Параллелепипед

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} =$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{D_1 D} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} =$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} =$$

$$= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} =$$

$$= -\frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c}.$$

Разложим вектор $\overrightarrow{C_1 K}$ по заданным векторам векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\overrightarrow{C_1 K} = \overrightarrow{C_1 C} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{A_1 A} + \frac{2}{3} \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} =$$

$$= -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = -\vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{c}.$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить их линейные комбинации: а) $3\vec{a} - 2\vec{b}$; б) $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$.

3.3.2 В параллелограмме $ABCD$ заданы векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$. Выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

3.3.3 Три вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ являются сторонами треугольника. Выразить медианы треугольника $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{CK}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK}$.

3.3.4 В треугольнике задачи 3.3.3 выразить все медианы через два вектора: $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

3.3.5 Сторона AB треугольника ABC разделена на пять равных частей, и все точки деления K, L, M, N соединены с противоположащей вершиной C . Обозначив стороны треугольника $\overrightarrow{AC} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{q}$, найти выражения для векторов $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$.

3.3.6 Три вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ являются сторонами треугольника. Найти векторы, соответственно коллинеарные биссектрисам углов этого треугольника.

3.3.7 В ромбе $ABCD$ заданы диагонали $\overrightarrow{AC} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{n}$. Разложить по этим двум векторам все векторы, совпадающие со сторонами ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

3.3.8 В равнобедренной трапеции $ABCD$ известно нижнее основание $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, боковая сторона $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$ и угол между ними $\angle A = 60^\circ$. Разложить по $\vec{m}$ и $\vec{n}$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали заданной трапеции $ABCD$.

3.3.9 В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FD}$ и $\overrightarrow{AE}$.

3.3.10 На трёх некопланарных векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ построен параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы, совпадающие со всеми остальными рёбрами, диагоналями и диагоналями граней этого параллелепипеда.

3.3.11 Какой особенностью должны обладать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место соотношение:

$$1) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|; \quad 2) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|; \quad 3) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|; \quad 4) |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

3.3.12 В тетраэдре $ABCD$ даны рёбра, выходящие из вершины A : $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{p}$. Выразить через заданные векторы остальные рёбра

тетраэдра, медиану $\overrightarrow{DM}$ грани BCD и вектор $\overrightarrow{AL}$, где L – центр тяжести грани BCD .

3.3.13 Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC , а O – произвольная точка пространства, не лежащая в плоскости треугольника. Выразить вектор $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{DE}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, где D и E – середины векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$, соответственно.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Три вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ являются рёбрами параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки $E, F, G, H, I, J, L, M, N, P, Q$ – середины рёбер $AB, BC, CD, AD, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1 B_1, B_1 C_1, C_1 D_1$ и $A_1 D_1$, соответственно. Точки O и O_1 являются, соответственно, точками пересечения диагоналей параллелограммов $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки R, S, T и U – точки пересечения медиан треугольников $ABD, BCD, A_1 B_1 C_1, A_1 D_1 C_1$, соответственно. Выразить через $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ указанные векторы.

3.4.1.1 $\overrightarrow{EQ}, \overrightarrow{MS}$.

3.4.1.2 $\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{MR}$.

3.4.1.3 $\overrightarrow{EN}, \overrightarrow{NS}$.

3.4.1.4 $\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{NR}$.

3.4.1.5 $\overrightarrow{FQ}, \overrightarrow{PS}$.

3.4.1.6 $\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{PR}$.

3.4.1.7 $\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{LS}$.

3.4.1.8 $\overrightarrow{GN}, \overrightarrow{LR}$.

3.4.1.9 $\overrightarrow{GQ}, \overrightarrow{LT}$.

3.4.1.10 $\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{LU}$.

3.4.1.11 $\overrightarrow{HN}, \overrightarrow{KS}$.

3.4.1.12 $\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{KR}$.

3.4.1.13 $\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{KT}$.

3.4.1.14 $\overrightarrow{JQ}, \overrightarrow{KU}$.

3.4.1.15 $\overrightarrow{KQ}, \overrightarrow{JR}$.

3.4.1.16 $\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{JR}$.

3.4.1.17 $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{JT}$.

3.4.1.18 $\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{JU}$.

3.4.1.19 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{IS}$.

3.4.1.20 $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{IR}$.

3.4.1.21 $\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IT}$.

3.4.1.22 $\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IU}$.

3.4.1.23 $\overrightarrow{JH}, \overrightarrow{HT}$.

3.4.1.24 $\overrightarrow{JG}, \overrightarrow{HU}$.

3.4.1.25 $\overrightarrow{KH}, \overrightarrow{GT}$.

3.4.1.26 $\overrightarrow{KE}, \overrightarrow{GU}$.

3.4.1.27 $\overrightarrow{LE}, \overrightarrow{FT}$.

3.4.1.28 $\overrightarrow{LF}, \overrightarrow{FU}$.

3.4.1.29 $\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{ET}$.

3.4.1.30 $\overrightarrow{JQ}, \overrightarrow{EU}$.

ДЕКАРТОВАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

4.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 В условиях задачи 3.2.2 найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ в базисе $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Решение. При решении задачи 3.2.2 было определено разложение вектора $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{16}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Коэффициенты при базисных векторах и представляют координаты вектора $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{16}; -\frac{1}{4}\right)$ в заданном базисе.

12.2.2 В условиях задачи 3.2.3 найти координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1K}$ в базисе $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Решение. При решении задачи 3.2.3 были получены разложения векторов $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{C_1K} = -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Коэффициенты при базисных векторах и представляют координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1K}$ в заданном базисе, то есть $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{C_1K} = \left(-1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

12.2.3 Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC , если известны координаты его вершин: $A(0; 7; -3)$, $B(2; 5; 7)$ и $C(4; 3; 5)$. Вычислить длину медианы AL .

Решение. Найдём координаты точки L , которая, по определению медианы треугольника, делит сторону BC пополам. Воспользуемся формулами (4.1.5):

$$x_L = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3; \quad y_L = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5+3}{2} = 4; \quad z_L = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{7+5}{2} = 6.$$

Находим длину медианы AL по формуле (4.1.3):

$$|\overrightarrow{AL}| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-7)^2 + (6+3)^2} = \sqrt{9+9+81} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}.$$

Пусть точка M является точкой пересечения медиан треугольника. Если AL является медианой, то, по свойству медианы, точка M делит медианы в отношении два к одному, считая от вершины A , то есть $\lambda = \frac{2}{1} = 2$. Воспользуемся

формулами (4.1.4): $x_M = \frac{x_A + 2 \cdot x_L}{1+2} = \frac{0+2 \cdot 3}{3} = 2; \quad y_M = \frac{y_A + 2 \cdot y_L}{1+2} = \frac{7+2 \cdot 4}{3} = 5;$

$z_M = \frac{z_A + 2 \cdot z_L}{1+2} = \frac{-3+2 \cdot 6}{3} = 3$. Следовательно, точка $M(2; 5; 3)$.

12.2.4 Заданы векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$. Найти: а) координаты вектора $\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{k}$; б) разложение вектора $2\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{k}$ по базису $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$; в) координаты орта $\vec{c}^0$.

Решение. а) $\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{k} = (2; 3; -2) + (1; -1; 3) - 3 \cdot (2; 6; 3) = (3; 2; 1) - (6; 18; 9) =$

$$\begin{aligned}
&= (-3; -16; -8); \text{ б) } 2\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{k} = 2 \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) - (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) + 4 \cdot (2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}) = \\
&= (4\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}) - (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) + (8\vec{i} + 24\vec{j} + 12\vec{k}) = 11\vec{i} + 31\vec{j} + 5\vec{k}; \text{ в) } \vec{c}^0 = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \\
&= \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}} = \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{7} = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}.
\end{aligned}$$

12.2.5 Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{k}$ тупой угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 26$.

Решение. Вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$ является коллинеарным вектору $\vec{a}$, а, следовательно, координаты векторов пропорциональны, то есть $\vec{x} = \alpha\vec{a}$ или $\vec{x} = (4\alpha; -3\alpha; 12\alpha)$. По условию $|\vec{x}| = 26$. Тогда $\sqrt{16\alpha^2 + 9\alpha^2 + 144\alpha^2} = 13|\alpha|$ или $|\alpha| = 2$. Вектор $\vec{x}$ образует с ортом $\vec{k}$ тупой угол, то есть $x_3 = 12\alpha < 0$ и значение $\alpha < 0$. Следовательно, $\alpha = -2$, а искомый вектор имеет координаты $\vec{x} = (-8; 6; -24)$.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Доказать, что для любых заданных векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ векторы $\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{y} + \vec{z}$ и $\vec{z} - \vec{x}$ компланарны.

4.3.2 Доказать, что для любых некопланарных векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ векторы $-\vec{x} + 5\vec{y} - 3\vec{z}$, $\vec{x} + 2\vec{y} - \vec{z}$ и $\vec{z} - \vec{y} + 3\vec{x}$ компланарны.

4.3.3 Даны три некопланарных вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Найти значения параметра α , при которых векторы $\vec{x} + \vec{y} + \alpha\vec{z}$, $\vec{x} + \alpha\vec{y} + \vec{z}$, $\alpha\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ компланарны.

4.3.4 В трапеции $ABCD$ известно отношение длин оснований: $|\overline{AB}| : |\overline{CD}| = 5 : 3$. Найти координаты вектора $\overline{BC}$ в базисе $B = \{\overline{AB}; \overline{AD}\}$.

4.3.5 Задана пирамида $ABCD$. В базисе из рёбер $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ и $\overline{DC}$ найти координаты векторов $\overline{EF}$ и $\overline{DM}$, где E и F – середины рёбер $\overline{DA}$ и $\overline{BC}$, M – точка пересечения медиан треугольника ABC .

4.3.6 В тетраэдре $OABC$ медиана AL грани ABC делится точкой M в отношении $|\overline{AM}| : |\overline{ML}| = 3 : 7$. Найти координаты векторов $\overline{OM}$ и $\overline{TM}$ в базисе $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, а точка T – середина ребра AB .

4.3.7 Найти координаты вектора $2\vec{a} - 4\vec{b} + 3\vec{c}$, если $\vec{a} = (3; 2; 5)$, $\vec{b} = (1; 4; 7)$, $\vec{c} = (6; 3; -2)$. Вычислить длину заданного вектора.

4.3.8 Выразить вектор $\vec{c} = (1; -7)$ через векторы $\vec{a} = (4; -2)$ и $\vec{b} = (3; 8)$.

4.3.9 Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{j}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 15$.

4.3.10 Найти вектор $\vec{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\vec{x}| = 2\sqrt{3}$.

4.3.11 Даны три вершины $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; -3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти четвёртую вершину D , противоположную B .

4.3.12 Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2; 6)$, $B(2; 8)$ и точка пересечения диагоналей $M(2; 2)$. Найти две другие вершины.

4.3.13 На оси ординат найти точку C , равноудалённую от точек $A(1; -4; 7)$ и $B(5; 6; -5)$.

4.3.14 Треугольник задан координатами своих вершин $A(3; -2; 1)$, $B(3; 1; 5)$, $C(4; 0; 3)$. Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

4.3.15 Вычислить длину биссектрисы внутреннего угла при вершине A треугольника ABC , если известны координаты его вершин: $A(1; 2; 3)$, $B(4; 4; 9)$, $C(13; 6; 6)$.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, образует острый угол с ортом $\vec{i}$. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $|\vec{x}| = p$.

4.4.1.1 $\vec{a} = (-2; 3; -4)$, $p = \sqrt{58}$.

4.4.1.2 $\vec{a} = (3; 5; -1)$, $p = \sqrt{105}$.

4.4.1.3 $\vec{a} = (5; 2; 3)$, $p = 2\sqrt{57}$.

4.4.1.4 $\vec{a} = (-4; 1; 7)$, $p = \sqrt{330}$.

4.4.1.5 $\vec{a} = (-3; 8; 6)$, $p = \sqrt{109}$.

4.4.1.6 $\vec{a} = (4; -3; 9)$, $p = 2\sqrt{53}$.

4.4.1.7 $\vec{a} = (3; -7; 1)$, $p = \sqrt{177}$.

4.4.1.8 $\vec{a} = (-5; 2; 2)$, $p = 2\sqrt{33}$.

4.4.1.9 $\vec{a} = (-1; 2; -3)$, $p = \sqrt{70}$.

4.4.1.10 $\vec{a} = (6; -7; 6)$, $p = \sqrt{149}$.

4.4.1.11 $\vec{a} = (5; -4; 7)$, $p = 6\sqrt{5}$.

4.4.1.12 $\vec{a} = (-6; 2; -1)$, $p = \sqrt{123}$.

4.4.1.13 $\vec{a} = (-1; -4; -2)$, $p = 3\sqrt{14}$.

4.4.1.14 $\vec{a} = (2; 3; -7)$, $p = \sqrt{310}$.

4.4.1.15 $\vec{a} = (9; -7; 8)$, $p = \sqrt{194}$.

4.4.1.16 $\vec{a} = (-7; 8; -5)$, $p = \sqrt{138}$.

4.4.1.17 $\vec{a} = (-5; 4; 6)$, $p = 7\sqrt{11}$.

4.4.1.18 $\vec{a} = (4; -2; 5)$, $p = 3\sqrt{15}$.

4.4.1.19 $\vec{a} = (2; -2; -5)$, $p = \sqrt{165}$.

4.4.1.20 $\vec{a} = (-7; -10; -3)$, $p = \sqrt{158}$.

4.4.1.21 $\vec{a} = (-11; 6; -4)$, $p = \sqrt{346}$.

4.4.1.22 $\vec{a} = (6; -5; -4)$, $p = \sqrt{231}$.

4.4.1.23 $\vec{a} = (1; 3; 5)$, $p = 7\sqrt{5}$.

4.4.1.24 $\vec{a} = (-3; -4; 2)$, $p = \sqrt{145}$.

4.4.1.25 $\vec{a} = (-12; -7; 8)$, $p = \sqrt{257}$.

4.4.1.26 $\vec{a} = (10; 5; 4)$, $p = \sqrt{282}$.

4.4.1.27 $\vec{a} = (4; -7; 3)$, $p = 2\sqrt{37}$.

4.4.1.28 $\vec{a} = (-4; 5; -4)$, $p = 3\sqrt{19}$.

4.4.1.29 $\vec{a} = (-1; -5; -4)$, $p = \sqrt{210}$.

4.4.1.30 $\vec{a} = (3; -13; 12)$, $p = \sqrt{322}$.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Даны длины векторов $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, и угол между ними равен 60° .

Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 12$, $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{12}{6} = 2$.

5.2.2 Заданы векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$, $\vec{b} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$.

Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ и $np_{\vec{c}} \vec{b}$. Найти координаты единичного вектора $\vec{a}^0$.

Какой угол (острый или тупой) образует вектор $\vec{a}$ с ортом $\vec{j}$?

Решение. Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + 12 \cdot 3 = 42.$$

Для определения угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находим косинус угла между этими векторами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot (-6) - 4 \cdot 3 + 12 \cdot (-2)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = -\frac{54}{91}.$$

Следовательно, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos(-54/91) = \pi - \arccos(54/91)$.

Вычислим проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$$np_{\vec{c}} \vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-6 \cdot 4 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{-30}{5} = -6.$$

Для определения координат единичного вектора $\vec{a}^0$ вычисляем длину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = 13$. Находим координаты искомого единичного вектора:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}}{13} = \frac{3}{13}\vec{i} - \frac{4}{13}\vec{j} + \frac{12}{13}\vec{k}.$$

Координаты единичного вектора являются направляющими косинусами, следовательно, $\cos \beta = -4/13 < 0$, а поэтому угол между вектором $\vec{a}$ и ортом $\vec{j}$ является тупым углом.

5.2.3 Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами в точках $A(-1; 2; 4)$, $B(-4; 2; 0)$ и $C(3; 2; 1)$.

Решение. Определим координаты и длины векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{BC}$:

$$\vec{AB} = (-4 - (-1); 2 - 2; 0 - 4) = (-3; 0; -4), \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2} = 5;$$

$$\vec{AC} = (3 - (-1); 2 - 2; 1 - 4) = (4; 0; -3), \quad |\vec{AC}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5;$$

$$\vec{BC} = (3 - (-4); 2 - 2; 1 - 0) = (7; 0; 1), \quad |\vec{BC}| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}.$$

Находим углы треугольника: $\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 - 4 \cdot (-3)}{5 \cdot 5} = 0,$

тогда $\angle A = 90^\circ$. Так как $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$, то треугольник является равнобедренным, а, следовательно, $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 45^\circ$.

5.2.4 Вычислить работу A силы $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $M(2;3;4)$ в положение $N(4;7;8)$.

Решение. Находим вектор $\vec{MN} = (4-2; 7-3; 8-4) = (2; 4; 4)$. Тогда работа силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки в направлении вектора $\vec{MN}$ равна: $A = \vec{F} \cdot \vec{MN} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 12$ (Джс.).

5.2.5 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(3;6;-4)$ и $\vec{b}(8;5;-7)$, и удовлетворяет условию $(3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot \vec{x} = 23$. Найти координаты вектора $\vec{x}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ через x_1, x_2, x_3 . Если вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ и $\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 23. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера: $x_j = \Delta / \Delta_j$, где Δ — определитель основной матрицы системы, а Δ_j — определитель, полученный путём замены j -го столбца столбцом свободных членов. Вычислим необходимые определители по формуле (4.1.8):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 8 & 5 & -7 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 5 - 7 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 3 = -253;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 23 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 \cdot 5 - 7 \cdot 6 \cdot 23 - 4 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 23 - 0 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 0 = -506;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & -7 \\ 3 & 23 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 5 - 7 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot 23 \cdot 8 + 4 \cdot 0 \cdot 3 - 8 \cdot 0 \cdot 5 + 7 \cdot 23 \cdot 3 = -253;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 23 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 23 + 0 \cdot 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 23 - 0 \cdot 2 \cdot 3 = -759.$$

Решение системы представляют собой координаты искомого вектора $\vec{x}$:
 $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-506}{-253} = 2, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-253}{-253} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-759}{-253} = 3.$

Итак, $\vec{x} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (2; 1; 3).$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Найти $\vec{a} \cdot \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{c}| = 8, \angle(\vec{a}; \vec{c}) = \pi/3.$

5.3.2 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ образуют угол $\varphi = 2\pi/3$ и $|\vec{a}| = 4, |\vec{c}| = 5.$ Вычислить: а) $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$; б) $(4\vec{a} - 3\vec{c}) \cdot (3\vec{a} + 2\vec{c})$; в) $(\vec{a} - \vec{c})^2.$

5.3.3 При каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{c} = 3\vec{p} + \alpha\vec{q}$ окажутся коллинеарными, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарные?

5.3.4 Найти угол между единичными векторами $\vec{e}_1^0$ и $\vec{e}_2^0$, если известно, что векторы $\vec{a} = \vec{e}_1^0 + 4\vec{e}_2^0$ и $\vec{b} = 2\vec{e}_1^0 - 3\vec{e}_2^0$ перпендикулярны.

5.3.5 Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$, если известно, что $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ и $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$

5.3.6 Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = -10.$

5.3.7 Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a} + 4\vec{b})^2 + (\vec{a} - 5\vec{b})^2 = 206,$
 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2.$

5.3.8 Вычислить работу силы $\vec{F}$, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 20 метров под углом 60° к направлению силы, если $|\vec{F}| = 20$ Н.

5.3.9 Заданы векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$ Вычислить $\vec{b} \cdot \vec{c}, \angle(\vec{a}, \vec{b}), (3\vec{a} - \vec{c}) \cdot (2\vec{b} + 5\vec{c}), |4\vec{a} - 3\vec{c}|, \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$ и $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}).$ Найти координаты единичного вектора $\vec{a}^0.$ Какие углы (острые или тупые) образует вектор $\vec{a}$ с базисными ортами $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$?

5.3.10 Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами в точках $A(1; 2; 3), B(4; -2; 1)$ и $C(-3; 1; 2).$

5.3.11 Найти угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если заданы три его вершины $A(2; 1; 5), B(-3; -6; 2)$ и $C(-3; 4; -2).$

5.3.12 Найти координаты вектора $\vec{x}$, коллинеарного вектору $\vec{a}(3; 5; -1)$ и удовлетворяющего условию $\vec{a} \cdot \vec{x} = -70.$

5.3.13 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(4; 5; -22)$ и $\vec{b}(2; 3; -12),$ и удовлетворяет условию $(3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \vec{x} = 5.$ Найти координаты вектора $\vec{x}.$

5.3.14 Вычислить работу A равнодействующей силы $\vec{F}$ для сил $\vec{F}_1(6; -5; -5)$ и $\vec{F}_2(-2; 8; -7)$ при прямолинейном перемещении материальной точки из

положения $M(3;15;5)$ в положение $N(19;15;17)$. Найти угол между направлениями равнодействующей силы $\vec{F}$ и перемещения.

5.3.15 Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Даны четыре точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ и $D(x_4; y_4; z_4)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$. Требуется:

- а) вычислить длины сторон и углы в треугольнике ABC ;
- б) вычислить проекцию вектора $\vec{AD}$ на вектор $\vec{BC}$;
- в) вычислить работу равнодействующей силы $\vec{F}$ сил $\vec{F}_1 = \vec{DA}$, $\vec{F}_2 = \vec{DB}$, $\vec{F}_3 = \vec{DC}$, приложенных к материальной точке D , которая под воздействием силы перемещается прямолинейно из точки D в точку пересечения медиан треугольника ABC ;
- г) найти координаты единичного вектора для вектора $\vec{BD}$ и записать, какие углы (острые или тупые) образует вектор $\vec{BD}$ с базисными ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$;
- д) найти координаты вектора $\vec{x}$, коллинеарного вектору $\vec{CD}$ и удовлетворяющего условию $\vec{AB} \cdot \vec{x} = t$.

5.4.1.1 $A(5; 2; 6)$, $B(5; 7; 4)$, $C(4; 10; 9)$, $D(1; 8; 2)$, $t = 40$.

5.4.1.2 $A(-5; 7; -7)$, $B(5; -3; 1)$, $C(2; 3; 7)$, $D(7; 2; 2)$, $t = 180$.

5.4.1.3 $A(6; 5; 8)$, $B(3; 5; 8)$, $C(8; 4; 1)$, $D(1; -1; 3)$, $t = 168$.

5.4.1.4 $A(1; 2; 0)$, $B(3; 5; 7)$, $C(2; -3; 5)$, $D(4; 2; 10)$, $t = 378$.

5.4.1.5 $A(-2; 3; 5)$, $B(4; 2; 10)$, $C(1; 2; 7)$, $D(5; 3; 7)$, $t = 30$.

5.4.1.6 $A(4; 0; 6)$, $B(2; 6; 5)$, $C(6; 4; -1)$, $D(3; 2; 5)$, $t = 60$.

5.4.1.7 $A(3; 3; 6)$, $B(2; -3; 9)$, $C(1; 2; 5)$, $D(2; 1; 7)$, $t = 44$.

5.4.1.8 $A(3; -2; 1)$, $B(4; 5; 6)$, $C(3; 3; 2)$, $D(0; 4; 5)$, $t = 57$.

5.4.1.9 $A(-1; 0; 1)$, $B(1; 7; 3)$, $C(8; 5; 8)$, $D(3; -1; 2)$, $t = 128$.

5.4.1.10 $A(1; 1; 5)$, $B(4; 9; 3)$, $C(3; 6; 7)$, $D(2; 4; 3)$, $t = 121$.

5.4.1.11 $A(2; -1; 5)$, $B(1; 6; 3)$, $C(3; -9; 8)$, $D(0; 7; 1)$, $t = -1290$.

5.4.1.12 $A(4; 6; 6)$, $B(4; 2; 0)$, $C(1; 2; 6)$, $D(6; 1; 1)$, $t = -306$.

5.4.1.13 $A(5; 4; 7)$, $B(2; 4; 7)$, $C(7; 3; 7)$, $D(6; 8; 2)$, $t = -24$.

5.4.1.14 $A(7; 10; 2)$, $B(2; 8; 4)$, $C(9; 6; 9)$, $D(4; 4; 10)$, $t = -217$.

5.4.1.15 $A(8; 7; 4)$, $B(5; 10; 4)$, $C(4; 7; 8)$, $D(3; 5; 4)$, $t = -18$.

5.4.1.16 $A(4; 9; 5)$, $B(4; 6; 11)$, $C(6; 9; 3)$, $D(6; 6; 5)$, $t = -105$.

5.4.1.17 $A(10; 5; -5)$, $B(5; 6; -8)$, $C(8; 10; 7)$, $D(8; -6; 4)$, $t = -28$.

5.4.1.18 $A(4; 2; 10)$, $B(2; 3; 5)$, $C(5; 3; 7)$, $D(1; -2; 7)$, $t = -9$.

- 5.4.1.19 $A(5;3;-7), B(1;2;7), C(4;2;0), D(2;3;5), t = -154.$
- 5.4.1.20 $A(1;9;7), B(0;2;0), C(5;3;10), D(4;3;5), t = -36.$
- 5.4.1.21 $A(1;4;9), B(2;-5;8), C(5;4;2), D(2;1;6), t = 200.$
- 5.4.1.22 $A(6;3;1), B(3;2;8), C(2;-3;7), D(2;-1;7), t = -18.$
- 5.4.1.23 $A(-1;6;1), B(-1;1;6), C(0;4;-1), D(3;1;4), t = 320.$
- 5.4.1.24 $A(5;8;3), B(1;2;-2), C(-1;0;2), D(3;5;4), t = -392.$
- 5.4.1.25 $A(-3;7;1), B(5;7;8), C(6;9;2), D(9;5;5), t = 270.$
- 5.4.1.26 $A(1;-1;4), B(3;5;1), C(5;8;-1), D(5;5;4), t = -165.$
- 5.4.1.27 $A(9;4;4), B(4;5;7), C(7;9;6), D(7;5;3), t = 52.$
- 5.4.1.28 $A(0;7;1), B(0;2;7), C(1;5;0), D(4;2;5), t = -135.$
- 5.4.1.29 $A(6;9;4), B(2;10;10), C(7;5;9), D(4;6;5), t = 22.$
- 5.4.1.30 $A(2;8;-2), B(9;8;9), C(7;10;3), D(10;9;6), t = -594.$

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 5$, $\angle(\vec{p}; \vec{q}) = 30^\circ$.

Решение. $S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(2\vec{p} + 3\vec{q}) \times (3\vec{p} - 4\vec{q})| =$
 $= |6\vec{p} \times \vec{p} - 8\vec{p} \times \vec{q} + 9\vec{q} \times \vec{p} - 12\vec{q} \times \vec{q}| = |\vec{0} - 8\vec{p} \times \vec{q} - 9\vec{p} \times \vec{q} - \vec{0}| =$
 $= |-17\vec{p} \times \vec{q}| = 17 \cdot |\vec{p} \times \vec{q}| = 17 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin(\vec{p}; \vec{q}) = 17 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 170 \text{ (кв. ед.)}.$

6.2.2 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(3; 6; -4)$ и $\vec{b}(8; 5; -7)$ и удовлетворяет условию $(3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot \vec{x} = 23$. Вычислить длину вектора $\vec{x}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{x}$, который задан в базисе $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ тройкой чисел x_1, x_2, x_3 . Исходя из условия задачи, имеем $\vec{x} \perp \vec{a}, \vec{x} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{x} \parallel \vec{a} \times \vec{b} \rightarrow \vec{x} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Найдём векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -4 \\ 8 & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \vec{k} = -22\vec{i} - 11\vec{j} - 33\vec{k}.$$

Следовательно, $\vec{x} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -22 \cdot \alpha \cdot \vec{i} - 11 \cdot \alpha \cdot \vec{j} - 33 \cdot \alpha \cdot \vec{k}$. Воспользуемся скалярным произведением векторов $(3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot \vec{x} = 23$. Следовательно, $3 \cdot (-22\alpha) + 2 \cdot (-11\alpha) + 5 \cdot (-33 \cdot \alpha) = 23$ или $\alpha = -1/11$. Находим координаты вектора $\vec{x} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -22 \cdot \left(-\frac{1}{11}\right) \cdot \vec{i} - 11 \cdot \left(-\frac{1}{11}\right) \cdot \vec{j} - 33 \cdot \left(-\frac{1}{11}\right) \cdot \vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. При одном и том же условии задач 5.3.11 и 6.2.2, но различном подходе к решению, получаем одни и те же координаты искомого вектора $\vec{x}$. Находим длину вектора $\vec{x}$: $|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \text{ (лин. ед.)}.$

6.2.3 В параллелограмме с вершинами $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(8; 7)$ и $D(4; 6)$ найти высоту $h = |\overrightarrow{BH}|$, проведённую к стороне AD .

Решение. Площадь параллелограмма находим по формуле $S_{\square} = |\overrightarrow{AD}| \cdot h$, откуда $h = S_{\square} / |\overrightarrow{AD}|$. Находим длину вектора $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = 5 \text{ (лин. ед.)}.$

Площадь параллелограмма равна

$$S_{\square} = \text{mod} \begin{vmatrix} 4-1 & 6-2 \\ 5-1 & 3-2 \end{vmatrix} = \text{mod} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \text{mod}(-13) = 13 \text{ (кв. ед.)}.$$

Следовательно, длина высоты равна $h = S_{\square} / |\overrightarrow{AD}| = 13/5 = 2,6 \text{ (лин. ед.)}.$

6.2.4 Найти координаты вращающегося момента силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, приложенной к точке $B(6;8;13)$ относительно точки $A(4;5;9)$.

Решение. Воспользуемся формулой (6.1.2), предварительно найдя координаты вектора $\vec{AB} = (6-4; 8-5; 13-9) = (2; 3; 4)$.

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -23\vec{i} + 22\vec{j} - 5\vec{k}.$$

6.2.5 Задан треугольник ABC с вершинами в точках $A(1;0;3)$, $B(2;3;5)$ и $C(4;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC .

Решение. Для вычисления площади найдём координаты необходимых для этого векторов: $\vec{AB}(1;3;2)$ и $\vec{AC}(3;2;3)$.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \text{mod}(\vec{AB} \times \vec{AC}) = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{mod} \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \text{mod}(5\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + (-7)^2} = \frac{\sqrt{83}}{2} \text{ (кв. ед.)}.$$

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ образуют угол $\varphi = 5\pi/6$, а также известны длины этих векторов: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{c}| = 6$. Вычислить: а) $|\vec{a} \times \vec{c}|$; б) $|(3\vec{a} - 5\vec{c}) \times (2\vec{a} + 5\vec{c})|$; в) $|(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{a} - \vec{c})|$.

6.3.2 Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $3\vec{a} - 2\vec{b}$ были коллинеарные?

6.3.3 Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти высоту параллелограмма, опущенную из конца вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$ и $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 150^\circ$.

6.3.4 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 6\vec{p} + 7\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 6$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p}; \vec{q}) = 60^\circ$.

6.3.5 Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 10$ и $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичный вектор $\vec{c}^0$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такой, что: а) тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}^0\}$ правая; б) тройка векторов $\{\vec{b}, \vec{c}^0, \vec{a}\}$ левая.

6.3.6 Заданы векторы $\vec{a}(2;7;-3)$ и $\vec{b}(4;5;-2)$. Найти координаты векторов: а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{b} + 3\vec{a})$; в) $(5\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - 7\vec{b})$; г) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$.

6.3.7 В параллелограмме с вершинами $A(2;2)$, $B(4;5)$, $C(8;6)$ и $D(6;3)$ найти высоту $h = |\overrightarrow{BH}|$ к стороне CD .

6.3.8 Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;3;4)$, $B(3;5;9)$ и $C(7;9;-6)$.

6.3.9 В треугольнике с вершинами $A(6;8;1)$, $B(-4;7;3)$ и $C(0;3;5)$ найти высоту $h = |\overrightarrow{AH}|$.

6.3.10 Вычислить координаты вращающегося момента $\overrightarrow{M}$ силы $\overrightarrow{F} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$, приложенной к точке $B(7;12;19)$ относительно точки $A(5;9;13)$.

6.3.11 Даны три силы $\overrightarrow{F}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{F}_2 = -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и $\overrightarrow{F}_3 = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, приложенных к точке $B(4;7;16)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента равнодействующих этих сил относительно точки $A(6;10;20)$.

6.3.12 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(1;2;-5)$ и $\vec{b}(4;3;2)$, и удовлетворяет условию $(2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot \vec{x} = 272$. Вычислить длину вектора $\vec{x}$.

6.3.13 Найти координаты вектора $\vec{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(1;2;3)$ и $\vec{c}(5;1;2)$, образует с ортом $\vec{k}$ острый угол и $|\vec{x}| = 1004$.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = a_1\vec{p} + a_2\vec{q}$ и $\vec{b} = b_1\vec{p} + b_2\vec{q}$, если $|\vec{p}| = m$, $|\vec{q}| = n$, $\angle(\vec{p}; \vec{q}) = \varphi$.

6.4.1.1 $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = 4\vec{p} - 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\varphi = 150^\circ$.

6.4.1.2 $\vec{a} = 6\vec{p} - 7\vec{q}$, $\vec{b} = 8\vec{p} + 9\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\varphi = 135^\circ$.

6.4.1.3 $\vec{a} = 10\vec{p} + 11\vec{q}$, $\vec{b} = 12\vec{p} - 13\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $\varphi = 120^\circ$.

6.4.1.4 $\vec{a} = 13\vec{p} - 14\vec{q}$, $\vec{b} = 15\vec{p} + 16\vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 6$, $\varphi = 90^\circ$.

6.4.1.5 $\vec{a} = 17\vec{p} + 18\vec{q}$, $\vec{b} = 19\vec{p} - 20\vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 8$, $\varphi = 60^\circ$.

6.4.1.6 $\vec{a} = 6\vec{p} - 5\vec{q}$, $\vec{b} = 4\vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 5$, $\varphi = 45^\circ$.

6.4.1.7 $\vec{a} = 7\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 7\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 5$, $\varphi = 30^\circ$.

6.4.1.8 $\vec{a} = 7\vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + 6\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 8$, $\varphi = 150^\circ$.

6.4.1.9 $\vec{a} = 9\vec{p} + 6\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 4$, $\varphi = 135^\circ$.

6.4.1.10 $\vec{a} = 5\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 10$, $\varphi = 120^\circ$.

6.4.1.11 $\vec{a} = 11\vec{p} + 12\vec{q}$, $\vec{b} = 10\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 12$, $\varphi = 90^\circ$.

6.4.1.12 $\vec{a} = 10\vec{p} - 10\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 12\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 7$, $\varphi = 60^\circ$.

6.4.1.13 $\vec{a} = 3\vec{p} + 5\vec{q}$, $\vec{b} = 7\vec{p} - 6\vec{q}$, $|\vec{p}| = 12$, $|\vec{q}| = 13$, $\varphi = 45^\circ$.

6.4.1.14 $\vec{a} = 16\vec{p} - 15\vec{q}$, $\vec{b} = 14\vec{p} + 13\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 15$, $\varphi = 30^\circ$.

- 6.4.1.15 $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 24, |\vec{q}| = 25, \varphi = 150^\circ.$
- 6.4.1.16 $\vec{a} = 4\vec{p} - 8\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + 7\vec{q}, |\vec{p}| = 6, |\vec{q}| = 5, \varphi = 135^\circ.$
- 6.4.1.17 $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 4\vec{p} - 3\vec{q}, |\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 14, \varphi = 120^\circ.$
- 6.4.1.18 $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 7\vec{p} + 9\vec{q}, |\vec{p}| = 11, |\vec{q}| = 13, \varphi = 90^\circ.$
- 6.4.1.19 $\vec{a} = 2\vec{p} + 9\vec{q}, \vec{b} = 6\vec{p} - 5\vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 17, \varphi = 60^\circ.$
- 6.4.1.20 $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} + 5\vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 18, \varphi = 45^\circ.$
- 6.4.1.21 $\vec{a} = 12\vec{p} + 13\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 4\vec{q}, |\vec{p}| = 6, |\vec{q}| = 9, \varphi = 30^\circ.$
- 6.4.1.22 $\vec{a} = 5\vec{p} - 9\vec{q}, \vec{b} = 9\vec{p} + 5\vec{q}, |\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 9, \varphi = 150^\circ.$
- 6.4.1.23 $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} - 6\vec{q}, |\vec{p}| = 9, |\vec{q}| = 10, \varphi = 135^\circ.$
- 6.4.1.24 $\vec{a} = 15\vec{p} - 12\vec{q}, \vec{b} = 13\vec{p} + 14\vec{q}, |\vec{p}| = 8, |\vec{q}| = 12, \varphi = 120^\circ.$
- 6.4.1.25 $\vec{a} = 4\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 8\vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 1, \varphi = 90^\circ.$
- 6.4.1.26 $\vec{a} = 6\vec{p} - 5\vec{q}, \vec{b} = 4\vec{p} + 3\vec{q}, |\vec{p}| = 9, |\vec{q}| = 11, \varphi = 60^\circ.$
- 6.4.1.27 $\vec{a} = -3\vec{p} + 7\vec{q}, \vec{b} = -2\vec{p} - 5\vec{q}, |\vec{p}| = 8, |\vec{q}| = 11, \varphi = 45^\circ.$
- 6.4.1.28 $\vec{a} = 6\vec{p} - 9\vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} + 3\vec{q}, |\vec{p}| = 6, |\vec{q}| = 12, \varphi = 30^\circ.$
- 6.4.1.29 $\vec{a} = 6\vec{p} + 5\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - 8\vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 3, \varphi = 150^\circ.$
- 6.4.1.30 $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 2, \varphi = 135^\circ.$

6.4.2 Даны четыре точки $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3)$ и $D(x_4; y_4; z_4)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ (координаты точек для каждого варианта приведены в задаче 5.4.1). Требуется:

а) вычислить площадь треугольника ABC ;

б) вычислить длину высоты $h = |\overrightarrow{BN}|$ треугольника BCD ;

в) вычислить величину момента силы $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$, приложенной к материальной точке D , которая под воздействием силы перемещается прямолинейно из точки D в точку пересечения медиан треугольника ABC .

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют левую тройку и $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=2$. Найти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Решение. Найдём вектор векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$. Длина этого вектора равна $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin 90^\circ = 6 \cdot 4 \cdot 1 = 24$; $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$; вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ образуют правую тройку. По условию векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку. Следовательно, $\vec{a} \times \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{c}$, то есть $\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 180^\circ$. Находим смешанное произведение заданных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 180^\circ = 24 \cdot 2 \cdot (-1) = -48$.

7.2.2 Заданы векторы $\vec{a}(3;4;9)$, $\vec{b}(1;3;1)$ и $\vec{c}(5;6;2)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Какова ориентация тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

Решение. Находим смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 6 \cdot 9 - 9 \cdot 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 3 = -69 < 0.$$

Так как смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отрицательно, то на основании второго свойства смешанного произведения указанные векторы образуют левую тройку.

7.2.3 Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;0;3)$, $B(2;3;5)$, $C(4;2;6)$ и $D(5;2;3)$. Вычислить объём пирамиды $ABCD$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } V_{ABCD} &= \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{6} \text{mod}(\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \text{mod}(1 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

7.2.4 Доказать, что векторы $\vec{e}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{e}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$ в этом базисе.

Решение. Векторы образуют базис, если их смешанное произведение отлично от нуля. Вычисляем смешанное произведение векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$:

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют базис, и вектор $\vec{a}$ линейно выражается через базисные векторы: $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3$, или в координатной форме получаем систему линейных уравнений, которую решим по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 6, \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 2, \\ -3\alpha - 5\beta + \gamma = -7. \end{cases}$$

$$\Delta = \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, \quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, \quad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$ или $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют правую тройку и $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 7$. Найти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Чему равно смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, если они образуют левую тройку?

7.3.2 Заданы векторы $\vec{a}(5;6;8), \vec{b}(3;1;2)$ и $\vec{c}(6;5;3)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Какова ориентация троек

$$(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}); \quad (\vec{a}; \vec{c}; \vec{b}); \quad (\vec{c}; \vec{a}; \vec{b})?$$

7.3.3 Установить, образуют ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ базис в множестве всех векторов, если:

$$\vec{a}(3;2;1), \vec{b}(4;1;5) \text{ и } \vec{c}(2;3;-3); \quad \vec{a}(1;4;3), \vec{b}(3;1;0) \text{ и } \vec{c}(4;5;2).$$

7.3.4 Доказать, что при любых $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы $\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.

7.3.5 Вычислить объём пирамиды $ABCD$, если $\vec{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{AC} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}, \vec{AD} = 8\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

7.3.6 Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(3;1;4), B(5;0;7), C(6;3;2)$ и $D(4;9;5)$. Указать ориентацию векторов $\vec{AB}, \vec{AC}$ и $\vec{AD}$.

7.3.7 Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$ и $D(3;4;-3)$. Вычислить высоту $h = |\overrightarrow{DT}|$.

7.3.8 Доказать, что векторы $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{a} = 6\vec{i} + 9\vec{j} + 14\vec{k}$ в этом базисе.

7.3.9 Доказать, что четыре точки $A(1;2;3)$, $B(2;6;5)$, $C(4;3;3)$ и $D(5;7;5)$ лежат в одной плоскости.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Даны четыре точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ и $D(x_4; y_4; z_4)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ (*координаты точек для каждого варианта приведены в задаче 5.4.1*). Требуется:

- а) доказать, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ образуют базис;
- б) указать ориентацию векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;
- в) найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ в базисе $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, если M – точка пересечения медиан треугольника BCD , а точка N делит ребро AD пополам;
- г) вычислить объём пирамиды $ABCD$;
- д) вычислить длину высоты $h = |\overrightarrow{AH}|$ пирамиды $ABCD$.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

8.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 Записать уравнение прямой с заданным нормальным вектором $\vec{n}(6;8)$ и проходящей через точку $M_0(-1;-3)$. Привести общее уравнение прямой к общему виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

Решение. Воспользуемся уравнением (8.1.1): $6 \cdot (x+1) + 8 \cdot (y+3) = 0$. Общее уравнение прямой имеет вид: $3x + 4y + 15 = 0$. Для записи нормального уравнения прямой умножим общее уравнение прямой на интегрирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}$. Тогда нормальное уравнение имеет вид: $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$.

Расстояние от начала координат до прямой равно $p = 3$.

12.2.2 Составить уравнение прямой l_1 , которая перпендикулярна прямой $l: 3x - 7y + 4 = 0$ и проходит через точку $M_0(2;-5)$. Найти расстояние от точки M_0 до прямой l .

Решение. По условию прямые l_1 и l перпендикулярны. Следовательно, в качестве направляющего вектора $\vec{s}_1$ прямой l_1 можно выбрать нормальный вектор $\vec{n}(3;-7)$ прямой l , так как он параллелен этой прямой. Для составления уравнения прямой l_1 воспользуемся каноническим уравнением прямой (8.1.5): $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-7}$. Общее уравнение прямой l_1 имеет вид: $7x + 3y + 1 = 0$.

Расстояние от точки M_0 до прямой l находим по формуле (8.1.11):

$$\rho(M_0; l) = \frac{|3 \cdot 2 - 7 \cdot (-5) + 4|}{\sqrt{3^2 + (-7)^2}} = \frac{45}{\sqrt{58}} = \frac{45 \cdot \sqrt{58}}{58}.$$

12.2.3 Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2;-3)$ и $M_2(7;1)$. Указать направляющий и нормальный вектор этой прямой.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (8.1.6): $\frac{x-2}{7-2} = \frac{y+3}{1+3}$. Каноническое уравнение прямой имеет вид $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4}$ с направляющим вектором $\vec{s}(5;4)$. Общее уравнение прямой имеет вид $4x - 5y - 23 = 0$ с нормальным вектором $\vec{n}(4;-5)$.

12.2.4 Найти площадь треугольника, ограниченного прямой $l: 3x + 8y - 24 = 0$ и координатными осями.

Решение. Уравнение прямой l в отрезках (8.1.7) имеет вид $\frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 1$, где $a=8$ и $b=3$ – отрезки, отсекаемые прямой от осей координат Ox и Oy ,

соответственно. Таким образом, получаем прямоугольный треугольник с катетами длиной 8 и 3 (лин. ед.). Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ (кв. ед.).

12.2.5 Записать уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(1; 2)$ и образует угол 45° с прямой $y = 2x + 3$.

Решение. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$, где $\varphi = 45^\circ$ – угол между искомой и заданной прямой, $k_1 = 2$ – угловой коэффициент заданной прямой, k_2 – угловой коэффициент искомой прямой. Находим угловой коэффициент k_2 искомой прямой из уравнения $\left| \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} \right| = \operatorname{tg} 45^\circ$ или $\left| \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} \right| = 1$, которое равносильно двум уравнениям $\frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} = 1$ и $\frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} = -1$. Решая полученные

уравнения, находим два возможных угловых коэффициента $k_2 = -3$ и $k_1 = \frac{1}{3}$.

Используя уравнение $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку (4.1.8), находим уравнения искомых прямых, удовлетворяющих условию задачи: $y = -3x + 5$ или $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$.

12.2.6 Найти угол между прямой $l_1: 3x - 4y - 2 = 0$ и прямой $l_2: 5x + 12y - 22 = 0$. Определить координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2 .

Решение. Угол между прямыми найдём как угол φ между нормальными векторами прямых l_1 и l_2 , то есть между векторами $\vec{n}_1(3; -4)$ и $\vec{n}_2(5; 12)$, соответственно.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3 \cdot 5 + (-4) \cdot 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 12^2}} = -\frac{33}{65}, \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{33}{65}\right) = \pi - \arccos \frac{33}{65}.$$

Угол между прямыми равен $\pi - (\pi - \arccos 33/65) = \arccos 33/65$.

Для определения точки пересечения прямых решим систему уравнений.

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0, \\ 5x + 12y - 22 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 5x + 12y = 22. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 56, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 22 & 12 \end{vmatrix} = 112, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 22 \end{vmatrix} = 56.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{112}{56} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{56}{56} = 1.$$

Точка пересечения прямых l_1 и l_2 имеет координаты $M_0(2; 1)$.

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 В задачах 8.3.1.1–8.3.1.3 требуется:

а) записать уравнение прямой, привести его к общему виду и построить прямую;

б) привести общее уравнение прямой к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

8.3.1.1 Прямая l задана точкой $M_0(3; -2)$ и нормальным вектором $\vec{n}(3; -4)$.

8.3.1.2 Прямая l задана точкой $M_0(1; 2)$ и направляющим вектором $\vec{s}(12; -5)$.

8.3.1.3 Прямая l задана двумя своими точками $M_1(5; 8)$ и $M_2(13; 14)$.

8.3.2 Из точки $M_0(3; 1)$ выходит луч света под углом $\varphi = \arctg 3$ к оси Ox и отражается от неё. Написать уравнения падающего и отражённого лучей.

8.3.3 Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(4; 1)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью равной 8.

8.3.4 Задана прямая $l: -3x + 4y - 1 = 0$ и точка $M_0(5; 3)$. Требуется:

а) вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l ;

б) написать уравнение прямой l_1 , проходящей через точку M_0 параллельно прямой l ;

в) написать уравнение прямой l_2 , проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой l .

8.3.5 В задачах 8.3.5.1–8.3.5.4 исследовать взаимное расположение заданных прямых l_1 и l_2 . При этом в случае параллельности найти расстояние между этими прямыми, а в случае пересечения, найти угол между этими прямыми и точку их пересечения.

8.3.5.1 $l_1: 3x - 2y - 11 = 0, \quad l_2: \frac{x+2}{4} = \frac{y+4}{6}.$

8.3.5.2 $l_1: \frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{7}, \quad l_2: 4x - 5y + 36 = 0.$

8.3.5.3 $l_1: 4x - 5y - 2 = 0, \quad l_2: \frac{x-3}{10} = \frac{y-2}{8}.$

8.3.5.4 $l_1: \frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{7}, \quad l_2: 3x - 7y + 11 = 0.$

8.3.6 Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(3; 4)$, $B(7; 7)$ и $C(8; 16)$. Требуется:

а) написать уравнение стороны AB ;

б) написать уравнение высоты CH и вычислить ее длину $h = |\overline{CH}|$;

в) найти угол φ между высотой CD и медианой AM ;

г) написать уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине B .

8.3.7 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; 2)$ под углом $\pi/4$ к прямой $l: x = 2 - t, y = 3 + 4t$.

8.3.8 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;4)$ на одинаковых расстояниях от точек $B(3;7)$ и $C(6;1)$.

8.3.9 Написать уравнения сторон треугольника ABC , если задана одна из его вершин $A(7;13)$, и уравнения двух медиан $x-5=0$ и $4x-3y-3=0$.

8.3.10 Написать уравнения сторон треугольника ABC , если задана одна из его вершин $B(1;1)$, и уравнения двух высот $2x+y-23=0$ и $4x-3y-11=0$.

8.3.11 Уравнение одной из сторон некоторого угла $2x-9y-3=0$, а уравнение биссектрисы $4x-y+11=0$. Найти уравнение второй стороны угла.

8.3.12 Написать уравнения сторон треугольника, зная координаты одной из его вершин $A(4;5)$, а также уравнения биссектрисы $4x-3y+5=0$ и высоты $3x-4y-15=0$, которые проведены из одной вершины.

8.3.13 Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(6;9)$, а также уравнения медианы $x-3y+13=0$ и высоты $x+y-7=0$, проведённых из различных вершин.

8.3.14 Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $C(1;5)$, а также уравнения медианы $3x+4y-25=0$ и биссектрисы $x-3y+4=0$, проведённых из различных вершин.

8.3.15 В треугольнике MNP даны уравнения стороны MN $x+7y-6=0$ и биссектрис $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$. Найти координаты его вершин.

8.3.16 Найти точку, симметричную точке $N(1;7)$ относительно прямой $2x-5y+4=0$.

8.3.17 Две стороны квадрата лежат на прямых: $x+y-2=0$, $x+y+2=0$. Вычислить площадь заданного квадрата.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$. Требуется:

- а) записать общее уравнение прямой AB ;
- б) найти каноническое уравнение прямой BC ;
- в) найти уравнение высоты CH и вычислить ее длину $h = |\overline{CH}|$;
- г) найти уравнение медианы AM ;
- д) найти точку пересечения медианы AM и высоты CD , а также угол между высотой и медианой;
- е) вычислить расстояние от точки C до прямой AB ;
- ж) написать уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A .

8.4.1.1 $A(1; -1)$, $B(4; 2)$, $C(3; -5)$.

8.4.1.2 $A(6; -4)$, $B(4; 10)$, $C(-4; 2)$.

8.4.1.3 $A(-7; 4)$, $B(5; -5)$, $C(-7; -2)$.

8.4.1.4 $A(4; -5)$, $B(-3; 1)$, $C(10; -2)$.

8.4.1.5 $A(-3; 5)$, $B(4; 0)$, $C(-2; -6)$.

8.4.1.6 $A(-7; -4)$, $B(3; 2)$, $C(0; 2)$.

8.4.1.7 $A(0; 7)$, $B(-2; 4)$, $C(1; -3)$.

8.4.1.8 $A(-3; 1)$, $B(0; 4)$, $C(2; 5)$.

8.4.1.9 $A(14; 4)$, $B(6; 8)$, $C(-3; -2)$.

8.4.1.10 $A(-1; 4)$, $B(9; 5)$, $C(1; 0)$.

8.4.1.11 $A(1; 6)$, $B(6; 1)$, $C(-2; -3)$.

8.4.1.12 $A(7; 3)$, $B(1; 10)$, $C(4; -3)$.

8.4.1.13 $A(2; 5)$, $B(-3; -4)$, $C(7; 6)$.

8.4.1.14 $A(5; 11)$, $B(4; -1)$, $C(3; 8)$.

8.4.1.15 $A(6; -5)$, $B(-8; -1)$, $C(3; 5)$.

8.4.1.16 $A(5; 2)$, $B(7; 3)$, $C(4; -3)$.

8.4.1.17 $A(4; 7)$, $B(5; -5)$, $C(4; 8)$.

8.4.1.18 $A(6; -3)$, $B(-7; 1)$, $C(-4; 5)$.

8.4.1.19 $A(1; -2)$, $B(4; 7)$, $C(3; -8)$.

8.4.1.20 $A(3; -5)$, $B(-5; 4)$, $C(2; -6)$.

8.4.1.21 $A(9; -5)$, $B(3; -1)$, $C(-6; 4)$.

8.4.1.22 $A(6; -5)$, $B(1; 1)$, $C(3; 0)$.

8.4.1.23 $A(8;)$, $B(0; -1)$, $C(3; 7)$.

8.4.1.24 $A(2; -1)$, $B(3; 1)$, $C(4; -4)$.

8.4.1.25 $A(1; -6)$, $B(-3; -1)$, $C(1; 5)$.

8.4.1.26 $A(8; -10)$, $B(-5; 7)$, $C(-3; 8)$.

8.4.1.27 $A(9; 11)$, $B(10; 12)$, $C(12; 9)$.

8.4.1.28 $A(4; -5)$, $B(-5; 6)$, $C(6; -4)$.

8.4.1.29 $A(10; 2)$, $B(12; 5)$, $C(3; -4)$.

8.4.1.30 $A(5; -6)$, $B(-3; 2)$, $C(4; 1)$.

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Написать уравнение плоскости π_1 , проходящей через точку $M_0(2;1;3)$ параллельно плоскости $\pi: 2x - 6y + 3z + 1 = 0$. Вычислить расстояние между плоскостями.

Решение. Так как плоскости параллельны, то нормальные векторы являются коллинеарными. Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости π_1 выбираем нормальный вектор плоскости π , то есть нормальный вектор плоскости π_1 имеет координаты: $\vec{n}_1(2; -6; 3)$. Воспользуемся уравнением плоскости (9.1.1): $2 \cdot (x - 2) - 6 \cdot (y - 1) + 3 \cdot (z - 3) = 0$ или $2x - 6y + 3z - 7 = 0$.

Расстояние между плоскостями найдём как расстояние от точки $M_0(2;1;3)$ до плоскости $\pi: 2x - 6y + 3z + 1 = 0$ по формуле (9.1.8):

$$\rho(\pi_1; \pi) = \rho(M_0; \pi) = \frac{|2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{8}{7}.$$

9.2.2 Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;4;5)$, $M_2(5;7;9)$ и $M_3(6;8;6)$. Определить угол между полученной плоскостью и плоскостью π , заданной в задаче 9.2.1.

Решение. Находим уравнение плоскости $M_1M_2M_3$, используя уравнение плоскости, проходящей через три точки (9.1.5):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 13x - 10y - z - 4 = 0.$$

Определим угол между плоскостью $13x - 10y - z - 4 = 0$ и плоскостью $2x - 6y + 3z - 7 = 0$. Угол между плоскостями находим как угол между нормальными векторами плоскостей по формуле (9.1.9):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{M_1M_2M_3}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{M_1M_2M_3}|} = \frac{13 \cdot 2 + (-10) \cdot (-6) + (-1) \cdot 3}{\sqrt{13^2 + (-10)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{83}{21\sqrt{30}}.$$

Тогда угол между плоскостями равен значению $\varphi = \arccos \frac{83}{21\sqrt{30}}$.

9.2.3 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;2;3)$ параллельно векторам $\vec{a}(3;5;7)$ и $\vec{c}(4;1;3)$.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ параллельны плоскости, а, следовательно, вектор их векторного произведения будет перпендикулярен плоскости и его можно выбрать в качестве нормального вектора.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 8\vec{i} + 19\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Воспользуемся уравнением плоскости (9.1.1):

$$8 \cdot (x-1) + 19 \cdot (y-2) - 17 \cdot (z-3) = 0 \text{ или } 8x + 19y - 17z + 5 = 0.$$

9.2.4 Вычислить объём пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $\pi: 3x - 4y + 6z - 24 = 0$.

Решение. Запишем уравнение плоскости π в отрезках, то есть воспользуемся уравнением плоскости (9.1.6): $\frac{x}{8} - \frac{y}{6} + \frac{z}{4} = 1$. Тогда

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{основания}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 = 32 \text{ (кв. ед.)}.$$

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Написать уравнение плоскости π_1 , проходящей через точку $M_0(4; 2; 5)$ параллельно плоскости $\pi: 12x - 3y + 4z - 13 = 0$. Вычислить расстояние между плоскостями.

9.3.2 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 2; 3)$ параллельно векторам $\vec{a}_1(0; 1; 2)$ и $\vec{a}_2(-1; 0; 1)$.

9.3.3 Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; 5; 4)$ и $M_2(4; 8; 3)$ параллельно вектору $\vec{a}(3; 2; 7)$.

9.3.4 Написать уравнение плоскости π_1 , проходящей через точки $M_1(3; 4; 5)$ и $M_2(1; -3; 0)$ перпендикулярно плоскости $\pi: 2x - 3y + 5z - 3 = 0$.

9.3.5 Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1; 2; 0)$, $M_2(3; 0; 1)$ и $M_3(2; 1; 1)$.

9.3.6 Вычислить объём пирамиды ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $\pi: 5x - 3y - 7z + 105 = 0$.

9.3.7 В задачах 9.3.7.1–9.3.7.3 исследовать взаимное расположение заданных плоскостей π_1 и π_2 . При этом в случае параллельности найти расстояние между плоскостями, а в случае пересечения, найти угол между этими плоскостями.

9.3.7.1 $\pi_1: 2x - 3y + 6z - 5 = 0, \pi_2: 12x + 3y - 4z - 19 = 0.$

9.3.7.2 $\pi_1: 12x - 8y + 3z - 25 = 0, \pi_2: \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{8} = 1.$

9.3.7.3 $\pi_1: 20x + 15y - 12z - 60 = 0, \pi_2: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{z}{5} = 1.$

9.3.8 Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $\pi_1: x - 3y + 2z - 5 = 0$ и $\pi_2: 3x - 2y - z + 3 = 0$.

9.3.9 Написать уравнение плоскости, равноудалённой от двух заданных плоскостей $\pi_1: 4x - y - 2z - 3 = 0$ и $\pi_2: 4x - y - 2z - 5 = 0$.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Даны четыре точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ и $D(x_4; y_4; z_4)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ (*координаты точек для каждого варианта приведены в задаче 5.4.1*). Требуется:

- а) найти уравнение плоскости ABC ;
- б) найти нормальное уравнение плоскости ABD и указать расстояние от этой плоскости до начала координат;
- в) найти уравнение плоскости, которая параллельна векторам $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BD}$ и проходит через точку C ;
- г) вычислить расстояние от точки D до плоскости ABC ;
- д) найти угол между плоскостью ABD и плоскостью ABC .

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(5; -1; 7)$ на плоскость $4x + 7y - 9z + 3 = 0$.

Решение. Так как уравнение прямой является перпендикулярной заданной плоскости, то в качестве направляющего вектора прямой выбираем нормальный вектор плоскости: $\vec{n}(4; 7; -9) = \vec{s}$. Используя каноническое уравнение прямой (10.1.4), получаем искомое уравнение прямой: $\frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-7}{-9}$.

10.2.2 Найти точку пересечения прямой l и плоскости π , записав уравнение прямой l в каноническом виде, если заданы уравнения прямой и плоскости.

$$l: \begin{cases} 3x + 4y - 6z - 11 = 0; \\ 2x - 3y + 9z + 4 = 0, \end{cases} \quad \pi: x + 4y - z - 4 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение прямой l в каноническом виде. Для определения точки, которая принадлежит прямой, предположим, что одна из переменных равна нулю. Например, пусть $z = 0$. В результате приходим к системе из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$$

Решение системы $x=1$, $y=2$. Таким образом, точка $M_0(1; 2; 0)$ принадлежит прямой l . В качестве направляющего вектора прямой l возьмём вектор векторного произведения нормальных векторов плоскостей, которые задают прямую l .

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 18\vec{i} - 39\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Тогда уравнение прямой l в каноническом виде: $\frac{x-1}{18} = \frac{y-2}{-39} = \frac{z}{-17}$. Для определения точки пересечения прямой и плоскости запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + 18t, \\ y = 2 - 39t, \\ z = -17t. \end{cases}$$

Подставляя переменные x , y и z в уравнение плоскости π , находим значение параметра t : $\pi: 1 + 18t + 4 \cdot (2 - 39t) + 17t - 4 = 0$, $t = \frac{5}{121}$. Подставляя значение параметра t в последнюю систему, определяем координаты точки пересечения прямой l с плоскостью π : $M_0\left(\frac{211}{121}; \frac{47}{121}; -\frac{85}{121}\right)$.

10.2.3 Найти угол между прямыми $l_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-8}{-1}$ и

$$l_2: \frac{x-7}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z+8}{0}.$$

Решение. Угол между прямыми найдём как угол между направляющими

векторами прямых: $\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{11}{\sqrt{406}},$

$$\varphi = \angle(l_1; l_2) = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{406}}\right).$$

10.2.4 Найти угол между прямой $l: \frac{x+4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-9}{3}$ и плоскостью

$$\pi: 4 \cdot x + 7 \cdot y + z - 12 = 0.$$

Решение. Угол между прямой и плоскостью найдём по формуле

$$\sin \Theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ где } \vec{n}(A; B; C) \text{ и } \vec{s}(m; n; p) -$$

нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой, соответственно.

Находим синус угла между заданной прямой l и плоскостью π :

$$\sin \Theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{21}{2\sqrt{231}}.$$

Тогда угол между прямой l и плоскостью π равен: $\Theta = \angle(l; \pi) = \arcsin\left(\frac{21}{2\sqrt{231}}\right).$

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; 2; 3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{a}(0; 3; 2)$; б) оси Oz ; б) прямой $x = 4 + 3t, y = 2 - t, z = 7t$;

в) прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+6}{5}$; г) прямой $\begin{cases} 2x - 3y - 4z + 5 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$

10.3.2 Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(3; 0; 2)$ и $M_2(3; 5; -2)$.

10.3.3 Задана прямая $l: \frac{x-1}{6} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{2}$ и точка $M_0(3; 1; 4)$. Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l и точку $M_0(3; 1; 4)$;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой l ;

в) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l ;

г) найти координаты точки M_1 , которая симметрична точке M_0 относительно прямой l ;

д) вычислить расстояние от точки M_0 до прямой l .

10.3.4 Задана плоскость $\pi: 2x - 6y + 3z - 17 = 0$ и прямая $l: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{12}$.

Требуется:

а) проверить, принадлежит ли прямая l заданной плоскости π ;

б) найти координаты точки пересечения прямой l и плоскости π ;

в) вычислить синус угла между прямой l и плоскостью π ;

г) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l перпендикулярно к плоскости π .

10.3.5 Написать каноническое уравнение прямой которая проходит через точку $M_0(1; 2; 3)$ параллельно плоскости $2x - 6y + 3z + 1 = 0$ и пересекает прямую $\frac{x-3}{12} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3}$.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Даны четыре точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ и $D(x_4; y_4; z_4)$ в ортонормированном базисе $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ (*координаты точек для каждого варианта приведены в задаче 5.4.1*). Требуется:

а) найти уравнение прямой AB ;

б) найти уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC ;

в) найти координаты точки D_1 , которая симметрична точке D относительно плоскости ABC ;

г) найти уравнение прямой DN , которая параллельна прямой AB ;

д) найти уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB ;

е) вычислить угол между прямой AD и плоскостью ABC ;

ж) вычислить угол между прямыми AB и AD .

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

12.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 Написать каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет равен 0,6.

Решение. По условию расстояние между фокусами равно $|\overline{F_1F_2}| = 2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$. Следовательно, $c = 3$ и $a = 5$. Находим параметр b из соотношения $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

12.2.2 Написать каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между её фокусами равно 8, а расстояние между директрисами равно 18.

Решение. По условию расстояние между фокусами равно $|\overline{F_1F_2}| = 2c = 8$, а расстояние между директрисами $|\overline{D_1D_2}| = 2\frac{a}{\varepsilon} = \frac{1}{8}$. Учитывая, что эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{a}$, получаем значения параметров: $c = 4$ и $a = \frac{1}{2}$. Находим параметр b из соотношения $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{255}}{4}$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{255/16} = 1$.

12.2.3 Написать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $M_0(-2; -4)$.

Решение. Так как парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $M_0(-2; -4)$, то каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = -2px$. Так как точка $M_0(-2; -4)$ принадлежит параболе, то справедливо равенство: $(-4)^2 = -2 \cdot p \cdot (-2)$. Следовательно, значение параметра $p = 4$. Тогда каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = -8x$.

12.2.4 Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $4x^2 - 25y^2 - 8x - 100y - 196 = 0$. Найти основные характеристики данной линии.

Решение. Для приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду воспользуемся методом выделения полного квадрата.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25y^2 - 8x - 100y - 196 &= 0, \\ 4(x^2 - 2x + 1) - 25(y^2 + 4y + 4) - 4 + 100 - 196 &= 0, \\ 4(x - 1)^2 - 25(y + 2)^2 &= 100, \end{aligned}$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Выполним замену $x' = x - 1$, $y' = y + 2$. В результате получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{25} - \frac{y'^2}{4} = 1,$$

в новой системе координат $O'x'y'$, где точка O' в системе координат Oxy имеет координаты $(1; -2)$. В новой системе координат действительная полуось равна $a = 5$, а мнимая полуось $b = 2$. Для гиперболы всегда выполняется равенство $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Следовательно, координаты фокусов равны: $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$. Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = c/a = \sqrt{5}/5$. Уравнения директрис: $x = \pm a/\varepsilon$ или $x = \pm 5\sqrt{5}$. Уравнения асимптот: $y = \pm bx/a$ или $y = \pm 2x/5$.

12.2.5 Составить канонические уравнения: а) эллипса, если сумма полуосей $a + b = 12$, а расстояние между фокусами $2c = 8\sqrt{3}$; б) гиперболы, с вершиной в точке $A(2; 0)$ и проходящей через точку $B(4; 3\sqrt{3})$; в) параболы, зная, что её вершина находится в начале координат, расстояние от фокуса до вершины равно 4, осью симметрии служит ось Ox и она проходит через точку $C(-1; 4)$.

Решение: а) каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a – малая полуось; b – большая полуось. Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$. Для определения уравнения эллипса необходимо найти неизвестные параметры a и b . По свойствам уравнения эллипса формула, которая связывает его параметры, имеет вид: $a^2 - b^2 = c^2$. По условию $c = 4\sqrt{3}$. В результате получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 48, \\ a - b = 4. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим, что $a = 8$, $b = 4$. Следовательно, каноническое уравнение искомого эллипса имеет вид $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$;

б) каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a – действительная полуось; b – мнимая полуось. Гипербола проходит через две известные точки A и B , а, следовательно, координаты этих точек удовлетворяют искомому уравнению гиперболы, то есть при подстановке координат точек получаем верные равенства. В результате имеем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{2^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1, \\ \frac{4^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{3})^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

решив которую, находим, что действительная полуось $a=2$, мнимая полуось $b=3$. Следовательно, каноническое уравнение искомой гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

в) так как осью симметрии параболы служит ось Ox , а вершиной – начало координат, то уравнение параболы может быть определено одним из канонических уравнений $y^2 = 2px$ или $y^2 = -2px$, где p – расстояние от директрисы $x = -\frac{p}{2}$ до начала координат. Расстояние от фокуса до вершины равно половине параметра p . Следовательно, $p/2 = 4$ и $p = 8$. Подставляя это значение p в каждое из приведённых выше уравнений, получаем уравнения парабол: $y^2 = 16x$ или $y^2 = -16x$. Учитывая, что искомая парабола проходит через точку $C(-1; 4)$, получаем, что уравнение искомой параболы $y^2 = -16x$.

12.2.6 Найти уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(3; -4)$ на расстоянии в три раза большем, чем от прямой $x = -13$.

Решение. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка искомой линии. По условию задачи $|\overline{AM}| = 3 \cdot |\overline{BM}|$, где $|\overline{BM}|$ – расстояние от точки M до прямой $x = -13$. Так как

$$|\overline{AM}| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}, \quad |\overline{BM}| = \sqrt{(x+13)^2 + (y-y)^2} = |x+13|,$$

то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 3 \cdot |x+13|.$$

Преобразуем уравнение, возведя обе части в квадрат. Имеем

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 9x^2 + 234x + 1521,$$

$$8x^2 - y^2 + 240x - 8y + 1496 = 0.$$

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, приходим к уравнению вида $\frac{(x+15)^2}{36} - \frac{(y+4)^2}{288} = 1$.

Выполним замену $x' = x + 15$, $y' = y + 4$. В результате получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{36} - \frac{y'^2}{288} = 1,$$

в новой системе координат $O'x'y'$, где точка O' в системе координат Oxy имеет координаты $(-15; -4)$. В новой системе координат действительная полуось равна

$a=6$, а мнимая полуось – $b=12\sqrt{2}$. Для гиперболы всегда выполняется равенство $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + (12\sqrt{2})^2} = 18$. Следовательно, координаты фокусов равны: $F_1(-18;0)$, $F_2(18;0)$. Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = c/a = 3$. Уравнения директрис: $x = \pm a/\varepsilon$ или $x = \pm 2$. Уравнения асимптот: $y = \pm bx/a$ или $y = \pm 2\sqrt{2}x$.

12.2.7 Построить кривую, заданную в полярной системе координат. Записать уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат.

Решение. Полярному углу φ будем придавать значения от угла $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ через промежуток $\varphi = \frac{\pi}{8}$ и вычисляем соответствующие значения полярного радиуса r . Полярный радиус $r \geq 0$, тогда $\cos 2\varphi \geq 0$ и угол φ : $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Найденные значения запишем в виде таблицы:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$r = a \cos 2\varphi$	a	$a \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$a \frac{\sqrt{2}}{2}$	a	$a \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$a \frac{\sqrt{2}}{2}$	a

Построим заданную кривую. При построении кривой линии принимаем произвольный отрезок за единицу масштаба. Полюс полярной системы координат помещаем в центр декартовой прямоугольной системы, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс. Полученная кривая называется двулепестковой розой (рисунок 12.2.1).

Найдем уравнение двулепестковой розы в декартовой системе координат, используя формулы перехода от полярных координат $(\varphi; r)$ к декартовым координатам $(x; y)$:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

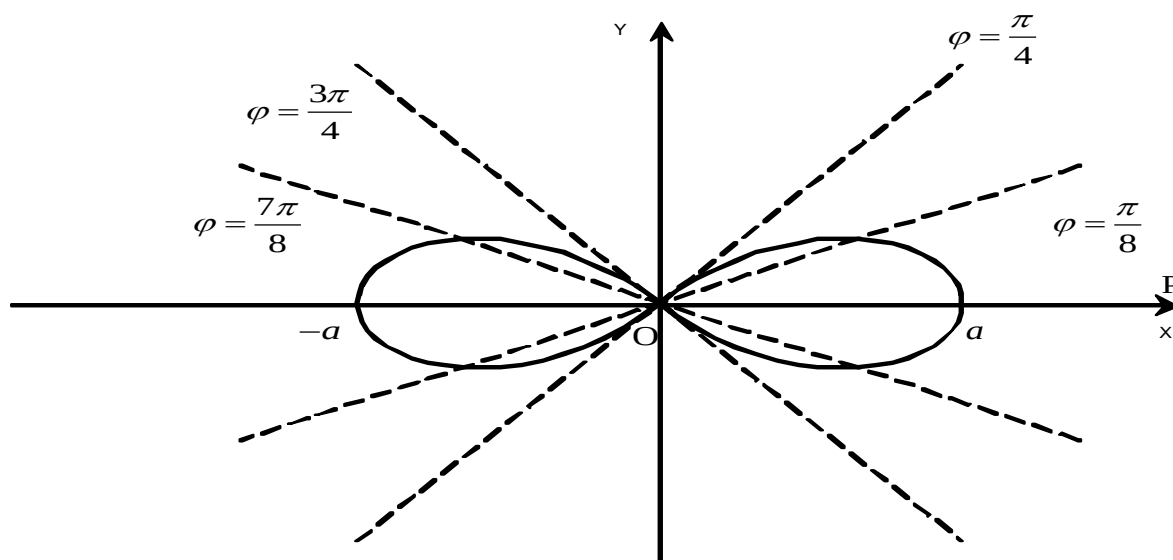


Рисунок 12.2.1 – Двухлепестковая роза

Следовательно, уравнение двухлепестковой розы в декартовой системе координат имеет вид $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)$ или $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Умножая обе части уравнения на множитель $x^2 + y^2$, получаем уравнение вида:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) = a \cdot (x^2 - y^2).$$

Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получаем окончательно уравнение двухлепестковой розы: $(x^2 + y^2)^3 = a^2 \cdot (x^2 - y^2)^2$.

12.3 Задания для решения на практическом занятии

12.3.1 Построить эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

12.3.2 Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

12.3.3 Построить следующие параболы и найти их параметры: а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = 8y$; в) $y^2 = -10x$; г) $x^2 = -4y$.

12.3.4 Написать каноническое уравнение эллипса и построить его, если:

- а) малая полуось равна 3 и большая полуось равна 5;
- б) большая полуось равна 13 и расстояние между фокусами равно 24;
- в) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен $3/5$;
- г) малая полуось равна 5 и эксцентриситет равен $12/13$;
- д) расстояние между фокусами равно 4 и расстояние между директрисами равно 5;
- е) эксцентриситет равен $3/5$ и расстояние между директрисами равно 32.

12.3.5 Написать каноническое уравнение гиперболы и построить её, если:

- а) мнимая полуось равна 3 и действительная полуось равна 2;
- б) мнимая полуось равна 4 и расстояние между фокусами равно 10;
- в) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен $3/2$;
- г) действительная полуось равна 8 и эксцентриситет равен $5/4$;

д) расстояние между фокусами равно 20 и уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$;

е) эксцентриситет равен $3/2$ и расстояние между директрисами равно $8/3$.

12.3.6 Написать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и построить её, если известно, что:

а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и $p = \frac{1}{2}$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $A(4; -8)$;

в) фокус параболы находится в точке $F(0; -3)$.

12.3.7 Определить тип уравнения линии второго порядка, предварительно приведя его к каноническому виду. Построить линию в новой системе координат и определить его характеристики.

а) $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 16 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

в) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

г) $2y^2 - 3x - 12y + 18 = 0$.

12.3.8 Написать уравнение кривой, по которой движется точка M , если расстояние от неё до точки $A(1, 4)$ остаётся в три раза меньше расстояния до прямой $x = -7$.

12.3.9 Написать уравнение кривой, по которой движется точка M , если расстояние от неё до точки $A(1, 3)$ остаётся в три раза больше расстояния до прямой $x = -6$.

12.3.10 Написать уравнение кривой, по которой движется точка M , если расстояние от неё до точки $A(5, 2)$ равно расстоянию до прямой $x = 1$.

12.3.11 Записать уравнения заданных кривых в полярных координатах:

а) $y = x$; б) $x + y - 2 = 0$; в) $x^2 + y^2 = 9$; г) $x^2 - y^2 = 4$; д) $x^2 + y^2 = 12y$.

12.3.12 Записать уравнения заданных кривых в декартовых прямоугольных координатах и построить эти кривые:

а) $r = 4$; б) $\varphi = 3\pi/4$; в) $r = 10\cos\varphi$; г) $r = 1 - \cos\varphi$; д) $r = 10(1 + \sin\varphi)$.

12.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

12.4.1 Задана точка $N(n;0)$ и прямая $l: y = -n$, где n – номер варианта.

Написать уравнение линии γ , каждая точка которой:

- а) равноудалена от точки N и прямой l ;
- б) расположена в два раза дальше от точки N , чем к прямой l ;
- в) расположена в два раза ближе к точке N , чем к прямой l .

Привести полученные уравнения линий к каноническому виду, указать их параметры и характеристики. Построить линии.

12.4.2 Построить кривую, заданную в полярной системе координат. Записать уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат.

12.4.2.1	$r = 6\sin \varphi.$	12.4.2.2	$r = 3(1 - \cos \varphi).$	12.4.2.3	$r = 8\cos \varphi.$
12.4.2.4	$r = 3\sin 2\varphi.$	12.4.2.5	$r = 2(1 + \cos \varphi).$	12.4.2.6	$r = 3\cos 2\varphi.$
12.4.2.7	$r = -4\sin 3\varphi.$	12.4.2.8	$r = 3(1 - \sin \varphi).$	12.4.2.9	$r = 4\cos 3\varphi.$
12.4.2.10	$r = -3\sin 4\varphi.$	12.4.2.11	$r = 2(1 + \sin \varphi).$	12.4.2.12	$r = 5\cos 4\varphi.$
12.4.2.13	$r = -2\sin \varphi.$	12.4.2.14	$r = 6(1 - \cos \varphi).$	12.4.2.15	$r = -6\cos \varphi.$
12.4.2.16	$r = 5\sin 2\varphi.$	12.4.2.17	$r = 4(1 + \cos \varphi).$	12.4.2.18	$r = -2\cos 2\varphi.$
12.4.2.19	$r = 2\sin 3\varphi.$	12.4.2.20	$r = 6(1 - \sin \varphi).$	12.4.2.21	$r = -6\cos 3\varphi.$
12.4.2.22	$r = 6\sin 4\varphi.$	12.4.2.23	$r = 4(1 + \sin \varphi).$	12.4.2.24	$r = -7\cos 4\varphi.$
12.4.2.25	$r = -4\sin \varphi.$	12.4.2.26	$r = 8(1 - \cos \varphi).$	12.4.2.27	$r = 10\cos \varphi.$
12.4.2.28	$r = -6\sin 2\varphi.$	12.4.2.29	$r = 12(1 + \sin \varphi).$	12.4.2.30	$r = 2\cos 2\varphi.$