

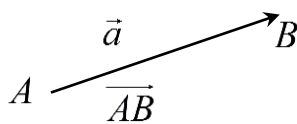
3 ВЕКТОРЫ

В естественных науках рассматривают *скалярные* и *векторные* величины. Скалярная величина полностью характеризуется своим числовым значением (масса m , температура T , время t и т. д.). Векторная величина характеризуется своим числовым значением и направлением (скорость $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}$, сила $\vec{F}$ и т. д.).

Вектор является математической моделью векторной величины. Существуют различные подходы к понятию вектора.

1. *Вектор* – направленный отрезок.
2. *Вектор* – упорядоченная тройка чисел, которая определённым образом преобразуется при переходе от одной системы координат к другой.
3. *Вектор* – определённое преобразование пространства.

Геометрический вектор это – направленный отрезок. Исходя из определения геометрического вектора, он характеризуется длиной и направлением. Для геометрического вектора вводятся понятия равенства, сложения и



умножения на число. Вектор, например $\overrightarrow{AB}$, изображается направленным отрезком со стрелкой, где точка A – начало вектора $\overrightarrow{AB}$ (точка приложения вектора), а точка B – конец этого вектора (рисунок 1).

Рисунок 1 – $\overrightarrow{AB}$

Векторы могут обозначаться малыми буквами латинского алфавита: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и т. д.

Расстояние между началом и концом вектора называется *длиной вектора* или *модулем вектора*, и обозначается, например, для вектора $\overrightarrow{AB}$ – $|\overrightarrow{AB}|$.

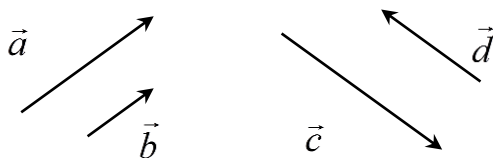


Рисунок 2 – Сонаправленность

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *сонаправленными* и обозначаются $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, если они имеют одно и то же направление. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ называются *противоположно направленными* и обозначаются $\vec{c} \updownarrow \vec{d}$, если они

имеют противоположные направления (рисунок 2).

Два вектора называются равными, если они имеют одинаковые длины и являются сонаправленными.

$$\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \wedge \vec{a} \uparrow \vec{b}.$$

Следовательно, векторы можно переносить в пространстве, параллельно себе, поэтому векторы являются *свободными*. Свободный вектор – это множество всех направленных отрезков, равных между собой.

Нулевым вектором $\vec{0}$ называется вектор, начало и конец которого, совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю. Направление нулевой вектор не имеет. Вектор называется *единичным* или *ортом*, если длина его равна единице.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Рассмотрим линейные операции над векторами.

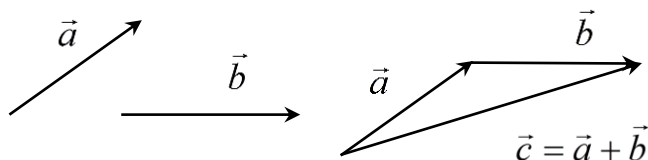


Рисунок 3 – Правило треугольника

Сложение векторов. *Правило треугольника:* суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор, равный вектору $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, который соединяет начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$, причём начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (рисунок 3).

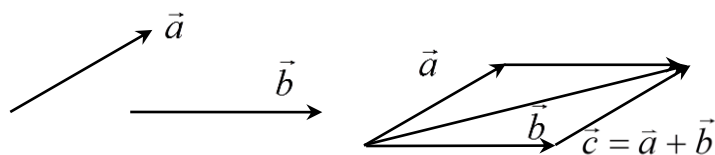


Рисунок 4 – Правило параллелограмма

Правило параллелограмма: суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор, равный вектору $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, который является диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах и имеющий с ними общее начало (рисунок 4).

Умножение вектора на число. Произведением действительного числа α на ненулевой вектор $\vec{a}$ называется вектор $\overrightarrow{\alpha a}$, который удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $|\overrightarrow{\alpha a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) $\overrightarrow{\alpha a} \uparrow \uparrow \vec{a}$, если $\alpha > 0$;
- 3) $\overrightarrow{\alpha a} \uparrow \downarrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$;
- 4) $\overrightarrow{\alpha a} = \vec{0}$, если $\alpha = 0$.

Если $|\alpha| > 1$, то умножение вектора на число соответствует растяжению вектора $\vec{a}$ в $|\alpha|$ раз. Если $|\alpha| < 1$, то умножение вектора на число соответствует сжатию вектора $\vec{a}$ в $1/|\alpha|$ раз.

Вектор $-\vec{a} = -1 \cdot \vec{a}$ называется вектор, противоположный вектору $\vec{a}$. Эти вектора имеют равные длины и противоположные направления. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} - \vec{b}$, равный сумме $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Рассмотрим пространство V геометрических векторов. Векторы, принадлежащие данному пространству, с введенными выше линейными операциями, очевидно, обладают следующими свойствами:

- 1) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V, \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
- 3) $\forall \vec{a} \in V, \exists \vec{0} \in V, \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 4) $\forall \vec{a} \in V, \exists (-\vec{a}) \in V, \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
- 5) $\forall \vec{a} \in V, 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- 6) $\forall \vec{a} \in V, \forall \alpha, \beta \in R, (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$;
- 7) $\forall \vec{a} \in V, \forall \alpha, \beta \in R, (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$;
- 8) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall \alpha \in R, \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$.

Пример 1 Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рисунок 5 а). Изобразить на чертеже их линейную комбинацию $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

Решение. Выбираем на плоскости произвольную точку A и откладываем от неё вектор $2\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, который совпадает по направлению с вектором $\vec{a}$ и имеет длину в два раза больше чем этот вектор (рисунок 5 б). От точки B откладываем вектор $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, который по длине в два раза меньше вектора $\vec{b}$ и противоположен ему по направлению. Затем от полученной точки C строим вектор $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\vec{c}$, который по длине равен одной трети вектора $\vec{c}$ и имеет с ним одно направление. Искомая линейная комбинация векторов $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ изображается вектором $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$, который замыкает полученную ломаную, начало которой находится в начале вектора $2\vec{a}$, то есть в точке A , а конец в конце вектора $\frac{1}{3}\vec{c}$, а, следовательно, в точке D (рисунок 5 б).

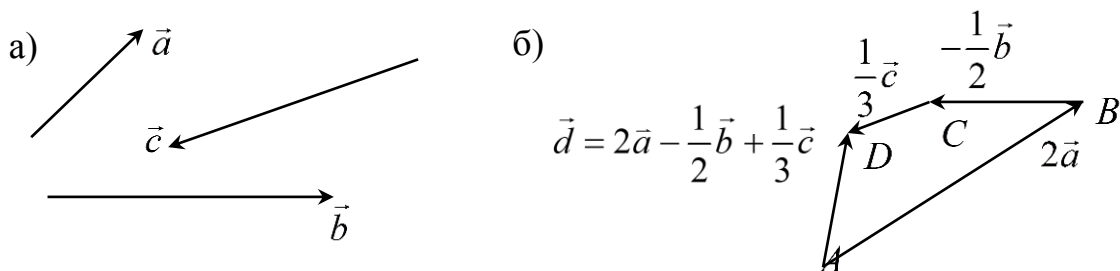


Рисунок 5 – Сумма векторов $2\vec{a}$, $-\vec{b}/2$ и $\vec{c}/3$

Пример 2 В равнобедренной трапеции $ABCD$ на стороне основания BC взята точка M , которая делит это основание в отношении $|\overrightarrow{BM}|:|\overrightarrow{MC}|=5:1$. Боковая сторона CD делится точкой N в отношении $|\overrightarrow{CN}|:|\overrightarrow{ND}|=1:3$. Основание высоты BK делит отрезок AD в отношении $|\overrightarrow{AK}|:|\overrightarrow{KD}|=1:7$. Выразить вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.

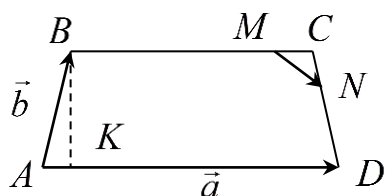


Рисунок 6 – Трапеция

Решение. Изобразим трапецию $ABCD$ с указанием необходимых векторов (рисунок 6). Выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, используя правила сложения векторов и умножение вектора на действительное число.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{8}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \\ &= \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{8}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{16}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{16}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}.\end{aligned}$$

Пример 3 Задан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Выразить через векторы

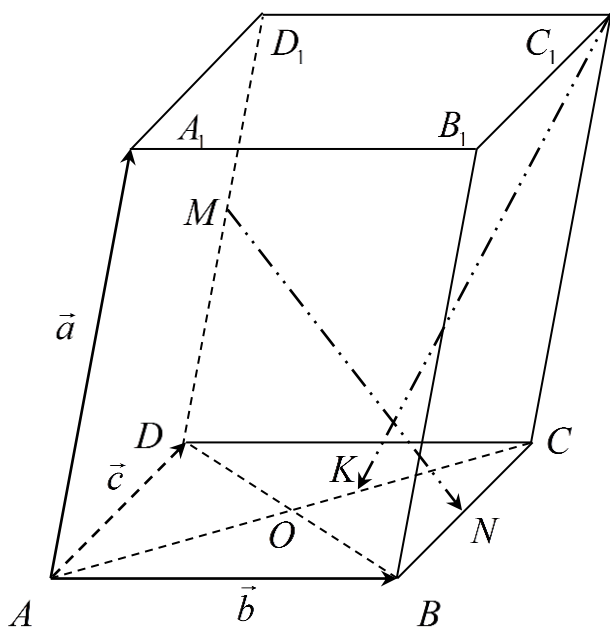


Рисунок 7 – Параллелепипед

$\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1K}$, где M и N – середины рёбер $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{BC}$, а K – точка пересечения медиан треугольника BCD .

Решение. Построим параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с указанием необходимых векторов (рисунок 7). Выразим векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1K}$ через векторы $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, используя правила сложения векторов и умножение вектора на действительное число. Находим вектор $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \overrightarrow{D_1 D} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \\
&= \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \\
&= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \\
&= -\frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c}.
\end{aligned}$$

Разложим вектор $\overrightarrow{C_1 K}$ по заданным векторам векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{C_1 K} &= \overrightarrow{C_1 C} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{A_1 A} + \frac{2}{3} \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} = \\
&= -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = -\vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{c}.
\end{aligned}$$

4 ДЕКАРТОВАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Рассмотрим систему векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ линейного пространства L .

Линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ называется выражение вида:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i, \text{ где } \alpha_i \in R \text{ и } i = \overline{1, n}.$$

Определение 1 Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ линейного пространства L называется *линейно-зависимой*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$), что линейная комбинация этих векторов равна нулю $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$. Если равенство нулю линейной комбинации выполняется только при нулевых коэффициентах ($\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$), то система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ называется *линейно-независимой*.

Теорема 1 Два ненулевых геометрических вектора являются линейно-зависимыми тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Теорема 2 Три ненулевых геометрических вектора являются линейно-зависимыми тогда и только тогда, когда они компланарные.

Теорема 3 Любые четыре геометрических вектора трехмерного пространства являются линейно-зависимыми векторами.

Любой геометрический вектор можно разложить по трем некомпланарным векторам.

Определение 2 *Базисом* линейного пространства L , размерности n называется любая упорядоченная совокупность n линейно-независимых векторов этого пространства.

Базисом линейного пространства V^3 является любая совокупность трех некомпланарных векторов. Наиболее часто используют ортонормированный базис. Ортонормированный базис $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ состоит из трех взаимно ортогональных единичных векторов: $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ и $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Любой вектор $\vec{a}$ разложим по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\vec{a}$ в данном ортонормированном базисе. Координаты вектора представляют проекцию вектора на соответствующие базисные векторы. Для того чтобы сложить два вектора, необходимо сложить соответствующие координаты. Умножение вектора на число означает умножение каждой координаты на это число.

Базисом линейного пространства V^2 является любая совокупность двух неколлинеарных векторов. Наиболее часто используется ортонормированный базис $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, состоит из двух взаимно ортогональных единичных векторов:

$\vec{i} \perp \vec{j}$ и $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Любой вектор $\vec{a}$ разложим по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}$: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, где a_x, a_y – координаты вектора $\vec{a}$ в данном ортонормированном базисе. Сложение и умножение вектора на скаляр вводится аналогично, как и для линейного пространства V^3 .

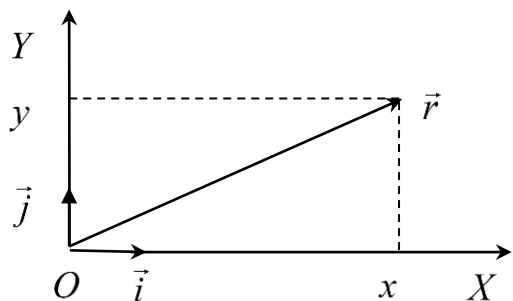


Рисунок 1 – Система координат на плоскости

– начало координат (рисунок 1). Единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$, направленные вдоль осей X и Y соответственно, образуют прямоугольный базис. Любой точке $M(x; y)$ в декартовой системе координат будет соответствовать единственный вектор $\vec{r}$, который называется *радиус-вектором*. Он имеет те же координаты, что и точка M . Таким образом, любой радиус-вектор можно единственным образом разложить по базисным векторам: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Аналогично вводится декартова система координат в пространстве, как совокупность точки и любых трех некопланарных векторов. Наиболее часто используется прямоугольная декартова система координат – $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. В пространстве R^3 прямоугольная декартова система координат представляет собой совокупность взаимно перпендикулярных осей OX, OY и OZ , которые называются *осями координат*, и точки O – *начало координат* (рисунок 2). Единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$, направленные вдоль осей X, Y и Z соответственно, образуют прямоугольный базис. Любой точке $M(x; y; z)$ в системе координат будет соответствовать единственный вектор $\vec{r}$, который называется *радиус-вектором*, с теми же координатами, что и точка M . Таким образом, любой радиус-вектор можно единственным образом разложить по базисным векторам: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

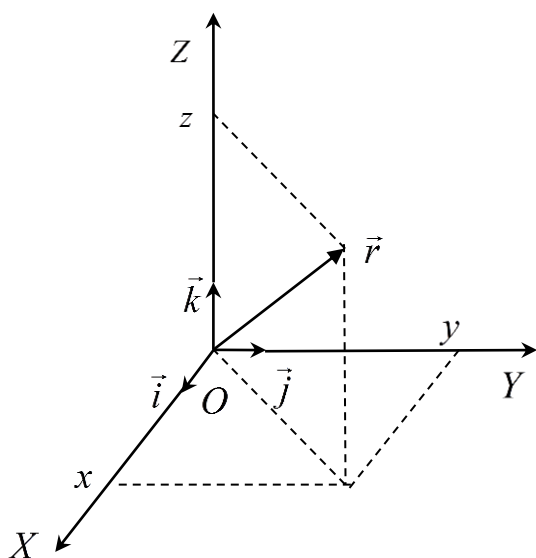


Рисунок 2 – Система координат в пространстве

торам: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Декартовой системой координат на плоскости называется совокупность точки и любых двух неколлинеарных векторов. Наиболее часто используется прямоугольная декартова система координат – $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. В пространстве R^2 прямоугольная декартова система координат представляет собой совокупность взаимно перпендикулярных осей OX и OY , которые называются *осями координат*, и точки O

пространстве R^3 прямоугольная декартова система координат представляет собой совокупность взаимно перпендикулярных осей OX, OY и OZ , которые называются *осями координат*, и точки O – *начало координат* (рисунок 2). Единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$, направленные вдоль осей X, Y и Z соответственно, образуют прямоугольный базис. Любой точке $M(x; y; z)$ в системе координат будет соответствовать единственный вектор $\vec{r}$, который называется *радиус-вектором*, с теми же координатами, что и точка M . Таким образом, любой радиус-вектор можно единственным образом разложить по базисным век-

Проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число $\text{pr}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$.

Координаты вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ в прямоугольном базисе совпадают с проекциями вектора $\vec{r}$ на базисные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно, а длина вектора $\vec{r}$ равна

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1)$$

Если $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – произвольные точки пространства, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (2)$$

Отсюда, на основании формулы (1), расстояние между точками выражается формулой

$$\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3)$$

Если точка $M(x; y; z)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|} \neq -1$,

то её координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

В частном случае, если точка M делит указанный отрезок пополам, то есть $\lambda = 1$, формулы (4) принимают вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (5)$$

Кроме линейных операций над векторами вводятся и другие нелинейные операции. При рассмотрении этих операций необходимо ввести понятия матриц и определителей второго и третьего порядков, а также методы решения систем алгебраических уравнений.

Матрицей размерности 2×2 называется таблица чисел, содержащая две строки и два столбца.

Определителем второго порядка называется число $|A| = \det A$, вычисляемое по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c. \quad (6)$$

Матрицей размерности 3×3 называется таблица чисел, содержащая три строки и три столбца.

Определителем третьего порядка называется число $|A|$, вычисляемое по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (7)$$

или

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2. \quad (8)$$

Метод вычисления определителя по формуле (8) называется «правилом треугольника»: со знаком «+» выбираем произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «-» выбираем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

Рассмотрим один из методов решения систем линейных алгебраических уравнений, а именно метод Крамера: $x_j = \Delta / \Delta_j$, где Δ – определитель основной матрицы системы (состоит из коэффициентов при неизвестных), а Δ_j – определитель, полученный путём замены j -го столбца основной матрицы системы столбцом свободных членов.

Понятие матриц и операции над ними, вычисление определителей произвольного порядка, а также методы решения систем линейных алгебраических уравнений будут разобраны в полном объёме в дальнейшем.

Пример 1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ на стороне основания BC взята точка M , которая делит это основание в отношении $|\overrightarrow{BM}| : |\overrightarrow{MC}| = 5:1$. Боковая сторона CD делится точкой N в отношении $|\overrightarrow{CN}| : |\overrightarrow{ND}| = 1:3$. Основание высоты BK делит отрезок AD в отношении $|\overrightarrow{AK}| : |\overrightarrow{KD}| = 1:7$. найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ в базисе $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

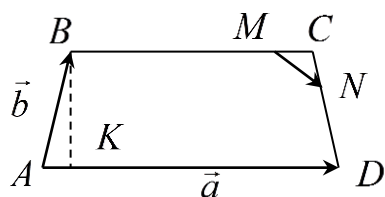


Рисунок 3 – Трапеция

Решение. Изобразим трапецию $ABCD$ с указанием необходимых векторов (рисунок 3). Выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, используя правила сложения векторов и умножение вектора на действительное число.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{6} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{CD} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{8} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{6} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} = \\
&= \frac{3}{8} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{8} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{16} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{16} \vec{a} - \frac{1}{4} \vec{b}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты при базисных векторах и представляют координаты вектора $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{16}; -\frac{1}{4} \right)$ в заданном базисе.

Пример 2. Задан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1 K}$ в базисе $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, где M и N – середины рёбер DD_1 и BC , а K – точка пересечения медиан треугольника BCD .

Решение. Построим параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с указанием необходимых векторов (рисунок 4).

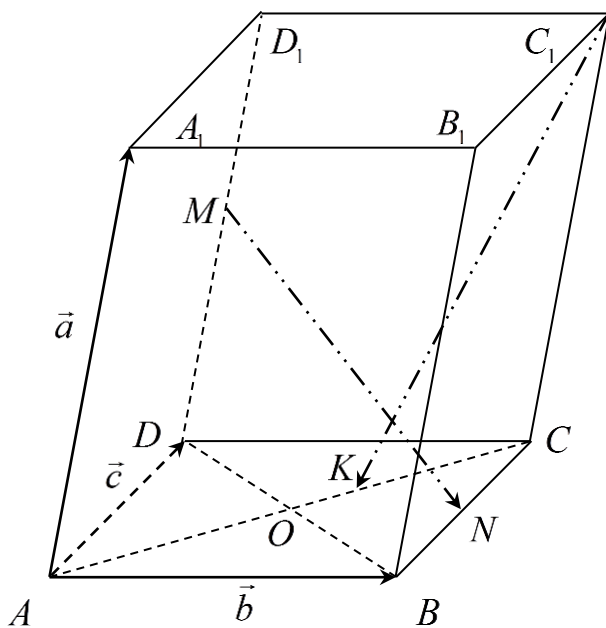


Рисунок 4 – Параллелепипед

Выразим векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1 K}$ через векторы $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, используя правила сложения векторов и умножение вектора на действительное число. Находим вектор $\overrightarrow{MN}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \\
&= \frac{1}{2} \overrightarrow{D_1 D} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \\
&= \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1 A} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \\
&= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \\
&= -\frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c}.
\end{aligned}$$

Разложим вектор $\overrightarrow{C_1 K}$ по заданным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{C_1 K} &= \overrightarrow{C_1 C} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{A_1 A} + \frac{2}{3} \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} = \\
&= -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = -\vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{c}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты при базисных векторах и представляют координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{C_1 K}$ в заданном базисе, то есть $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2} \right)$, $\overrightarrow{C_1 K} = \left(-1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right)$.

Пример 3 Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC , если известны координаты его вершин: $A(0; 7; -3)$, $B(2; 5; 7)$ и $C(4; 3; 5)$. Вычислить длину медианы AL .

Решение. Найдем координаты точки L , которая, по определению медианы треугольника, делит сторону BC пополам. Воспользуемся формулами (5):

$$x_L = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3; \quad y_L = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4; \quad z_L = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{7 + 5}{2} = 12.$$

Находим длину медианы AL по формуле (3):

$$|AL| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-7)^2 + (12+3)^2} = \sqrt{9+9+81} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}.$$

Пусть точка M является точкой пересечения медиан треугольника. Если AL является медианой, то, по свойству медианы, точка M делит медианы в отношении два к одному, считая от вершины A , то есть $\lambda = \frac{2}{1} = 2$. Воспользуемся

формулами (4): $x_M = \frac{x_A + 2 \cdot x_L}{1 + 2} = \frac{0 + 2 \cdot 3}{3} = 2; \quad y_M = \frac{y_A + 2 \cdot y_L}{1 + 2} = \frac{7 + 2 \cdot 4}{3} = 5;$
 $z_M = \frac{z_A + 2 \cdot z_L}{1 + 2} = \frac{-3 + 2 \cdot 12}{3} = 3$. Следовательно, точка $M(2; 5; 3)$.

Пример 4. Заданы векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$. Найти: а) координаты вектора $\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$; б) разложение вектора $2\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{k}$ по базису $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$; в) координаты орта $\vec{c}^0$.

Решение. а) $\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = (2; 3; -2) + (1; -1; 3) - 3 \cdot (2; 6; 3) = (3; 2; 1) - (6; 18; 9) = (-3; -16; -8)$; б) $2\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{k} = 2 \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) - (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) + 4 \cdot (2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}) = (4\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}) - (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) + (8\vec{i} + 24\vec{j} + 12\vec{k}) = 11\vec{i} + 31\vec{j} + 5\vec{k}$; в) $\vec{c}^0 = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}} = \frac{2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{7} = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}$.

Пример 5. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{k}$ тупой угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 26$.

Решение. Вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$ является коллинеарным вектору $\vec{a}$, а, следовательно, координаты векторов пропорциональны, то есть $\vec{x} = \alpha \vec{a}$ или $\vec{x} = (4\alpha; -3\alpha; 12\alpha)$. По условию $|\vec{x}| = 26$. Тогда $\sqrt{16\alpha^2 + 9\alpha^2 + 144\alpha^2} = 26$ или $|\alpha| = 2$. Вектор $\vec{x}$ образует с ортом $\vec{k}$ тупой угол, то есть $x_3 = 12\alpha < 0$ и значение $\alpha < 0$. Следовательно, $\alpha = -2$, а искомый вектор имеет координаты $\vec{x} = (-8; 6; -24)$.

5 СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 1 Скалярной проекцией или просто проекцией вектора $\vec{AB}$ на ось l называется число, определенное равенством

$$\text{пр}_l \vec{AB} = \begin{cases} |\vec{A_1B_1}|, & \text{если } \vec{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{e^0}, \\ -|\vec{A_1B_1}|, & \text{если } \vec{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{e^0}, \end{cases} \quad (1)$$

где точки A_1 и B_1 – ортогональные проекции точек A и B на ось l , соответственно. Вектор $\vec{e^0}$ задает направление оси l .

Проекция вектора вычисляется по формуле: $\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$, где $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{e^0})$.

Определение 2 Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (2)$$

Рассмотрим свойства скалярного произведения.

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0 \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$; 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$;
- 3) $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$; 4) $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$;
- 5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; 6) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Пример 1 Даны длины векторов $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, и угол между ними равен 60° . Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 12$, $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{12}{6} = 2$.

Рассмотрим ортонормированный базис $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$. Предположим, что в этом базисе заданы векторы $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ и $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$. Тогда скалярное произведение определяем по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3. \quad (3)$$

Длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Косинус угла между векторами: $\cos \varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

Проекция вектора на другой вектор: $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$.

Определение 3 *Направляющими косинусами* вектора называются координаты единичного вектора по направлению заданного вектора.

Найдем координаты единичного вектора $\vec{a}^0$ для вектора $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(a_1; a_2; a_3)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right).$$

Следовательно, направляющие косинусы равны

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

где α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{a}$ с базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, соответственно.

Замечание. Все указанные выше формулы приведены для трехмерного пространства. На плоскости указанные формулы также справедливы. Отличие состоит в отсутствии третьей координаты.

Пример 2 Заданы векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$, $\vec{b} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$. Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ и $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$. Найти координаты единичного вектора $\vec{a}^0$. Какой угол (острый или тупой) образует вектор $\vec{a}$ с ортом $\vec{j}$?

Решение. Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + 12 \cdot 3 = 42.$$

Для определения угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находим косинус угла между этими векторами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot (-6) - 4 \cdot 3 + 12 \cdot (-2)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = -\frac{54}{91}.$$

Следовательно, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos(-54/91) = \pi - \arccos(54/91)$.

Вычислим проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$$\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-6 \cdot 4 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{-30}{5} = -6.$$

Для определения координат единичного вектора $\vec{a}^0$ вычисляем длину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = 13$. Находим координаты искомого единичного вектора:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}}{13} = \frac{3}{13}\vec{i} - \frac{4}{13}\vec{j} + \frac{12}{13}\vec{k}.$$

Координаты единичного вектора являются направляющими косинусами, следовательно, $\cos \beta = -4/13 < 0$, а поэтому угол между вектором $\vec{a}$ и ортом $\vec{j}$ является тупым углом.

Пример 3 Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами в точках $A(-1; 2; 4)$, $B(-4; 2; 0)$ и $C(3; 2; 1)$.

Решение. Определим координаты и длины векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{BC}$:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (-4 - (-1); 2 - 2; 0 - 4) = (-3; 0; -4), & |\vec{AB}| &= \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2} = 5; \\ \vec{AC} &= (3 - (-1); 2 - 2; 1 - 4) = (4; 0; -3), & |\vec{AC}| &= \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5; \\ \vec{BC} &= (3 - (-4); 2 - 2; 1 - 0) = (7; 0; 1), & |\vec{BC}| &= \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Находим углы треугольника: $\cos A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-3)}{5 \cdot 5} = 0$,

тогда $\angle A = 90^\circ$. Так как $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$, то треугольник является равнобедренным, а, следовательно, $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 45^\circ$.

Пример 4 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(3; 6; -4)$ и $\vec{b}(8; 5; -7)$, и удовлетворяет условию $(3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot \vec{x} = 23$. Найти координаты вектора $\vec{x}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ через x_1, x_2, x_3 . Если вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ и $\vec{b} \cdot \vec{x} = 0$. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 23. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера: $x_j = \Delta / \Delta_j$, где Δ — определитель основной матрицы системы, а Δ_j — определитель, полученный путём замены j -го столбца столбцом свободных членов. Вычислим необходимые определители:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 8 & 5 & -7 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 5 - 7 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 3 = -253; \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 23 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 \cdot 5 - 7 \cdot 6 \cdot 23 - 4 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 23 - 0 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 0 = -506;\end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & -7 \\ 3 & 23 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 5 - 7 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot 23 \cdot 8 + 4 \cdot 0 \cdot 3 - 8 \cdot 0 \cdot 5 + 7 \cdot 23 \cdot 3 = -253;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 23 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 23 + 0 \cdot 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 23 - 0 \cdot 2 \cdot 3 = -759.$$

Решение системы представляют собой координаты искомого вектора $\vec{x}$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-506}{-253} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-253}{-253} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-759}{-253} = 3.$$

Итак, $\vec{x} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (2; 1; 3)$.

Механический смысл скалярного произведения. Работа A силы $\vec{F}$, произведённая этой силой при перемещении материальной точки на пути $|\vec{s}|$, определяемом вектором $\vec{s}$, вычисляется по формуле

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s}). \quad (4)$$

Пример 5 Вычислить работу A силы $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $M(2; 3; 4)$ в положение $N(4; 7; 8)$.

Решение. Находим вектор $\overrightarrow{MN} = (4 - 2; 7 - 3; 8 - 4) = (2; 4; 4)$. Тогда работа силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$ равна: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 12$ (Дж.).

6 ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 1 Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, начала которых совмещены, называется *правой*, если смотреть с конца последнего вектора $\vec{c}$, кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$, осуществляется против часовой стрелки. Если поворот осуществляется по часовой стрелке, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется *левой*.

Определение 2 Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$, удовлетворяющий трем условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Рассмотрим свойства векторного произведения векторов.

1) Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, то есть $\vec{a} \parallel \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

2) Длина векторного произведения двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах, то есть $S_{\text{пар-ма}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$.

$$3) \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

$$4) [\alpha \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha \vec{b}] = \alpha \cdot [\vec{a}, \vec{b}].$$

$$5) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \quad \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}.$$

Рассмотрим ортонормированный базис $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$. Предположим, что в базисе заданы векторы $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$.

Тогда векторное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (1)$$

Пример 1 Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(3;6;-4)$ и $\vec{b}(8;5;-7)$ и удовлетворяет условию $(3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot \vec{x} = 23$. Вычислить длину вектора $\vec{x}$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{x}$, который задан в базисе $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$, тройкой чисел x_1, x_2, x_3 . Исходя из условия задачи, имеем

$\vec{x} \perp \vec{a}, \vec{x} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{x} \parallel \vec{a} \times \vec{b} \rightarrow \vec{x} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Найдём векторное произведение векторов $\vec{a}$ $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & -4 \\ 8 & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \vec{k} = -22\vec{i} - 11\vec{j} - 33\vec{k}.$$

Следовательно, $\vec{x} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -22 \cdot \alpha \cdot \vec{i} - 11 \cdot \alpha \cdot \vec{j} - 33 \cdot \alpha \cdot \vec{k}$. Воспользуемся скалярным произведением векторов $(3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot \vec{x} = 23$. Следовательно, $3 \cdot (-22\alpha) + 2 \cdot (-11\alpha) + 5 \cdot (-33 \cdot \alpha) = 23$ или $\alpha = -1/11$. Находим координаты вектора $\vec{x} = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -22 \cdot \left(-\frac{1}{11}\right) \cdot \vec{i} - 11 \cdot \left(-\frac{1}{11}\right) \cdot \vec{j} - 33 \cdot \left(-\frac{1}{11}\right) \cdot \vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Находим длину вектора $\vec{x}$: $|\vec{x}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = 14$ (лин. ед.).

Механический смысл векторного произведения. Вращающий момент M силы $\vec{F}$, приложенный к точке B тела, закреплённого в точке A , вычисляется по формуле:

$$M = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}. \quad (2)$$

Пример 2 Найти координаты вращающегося момента силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, приложенной к точке $B(6;8;13)$ относительно точки $A(4;5;9)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2), предварительно найдя координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (6 - 4; 8 - 5; 13 - 9) = (2; 3; 4)$.

$$M = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -23\vec{i} + 22\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Геометрический смысл векторного произведения. Модуль векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (3)$$

Пример 3 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 5$, $\angle(\vec{p}; \vec{q}) = 30^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } S_{\text{параллелограмма}} &= |\vec{a} \times \vec{b}| = |(2\vec{p} + 3\vec{q}) \times (3\vec{p} - 4\vec{q})| = \\ &= |6\vec{p} \times \vec{p} - 8\vec{p} \times \vec{q} + 9\vec{q} \times \vec{p} - 12\vec{q} \times \vec{q}| = |\vec{0} - 8\vec{p} \times \vec{q} - 9\vec{p} \times \vec{q} - \vec{0}| = \end{aligned}$$

$$= |-17 \vec{p} \times \vec{q}| = 17 \cdot |\vec{p} \times \vec{q}| = 17 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin(\vec{p}; \vec{q}) = 17 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 170 \text{ (кв. ед.)}.$$

Рассмотрим треугольник $M_1M_2M_3$ с вершинами в точках $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$. Площадь треугольника вычисляется по формуле

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot S_{\square} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}| = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Пример 4 Задан треугольник ABC с вершинами в точках $A(1;0;3)$, $B(2;3;5)$ и $C(4;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC .

Решение. Для вычисления площади найдём координаты необходимых для этого векторов: $\overrightarrow{AB}(1;3;2)$ и $\overrightarrow{AC}(3;2;3)$.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \text{mod}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{mod} \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \text{mod}(5\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + (-7)^2} = \frac{\sqrt{83}}{2} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Если треугольник $M_1M_2M_3$ задан на плоскости, а вершины имеют координаты $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$, то площадь этого треугольника равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Пример 5 В параллелограмме с вершинами $A(1;2)$, $B(4;6)$, $C(8;7)$ и $D(4;6)$ найти высоту $h = |\overrightarrow{BH}|$, проведённую к стороне AD .

Решение. Площадь параллелограмма находим по формуле $S_{\square} = |\overrightarrow{AD}| \cdot h$, откуда $h = S_{\square} / |\overrightarrow{AD}|$. Находим длину вектора $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = 5 \text{ (лин. ед.)}$.

Площадь параллелограмма равна

$$S_{\square} = \text{mod} \begin{vmatrix} 4-1 & 6-2 \\ 5-1 & 3-2 \end{vmatrix} = \text{mod} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \text{mod}(-13) = 13 \text{ (кв. ед.)}.$$

Следовательно, длина высоты равна $h = S_{\square} / |\overrightarrow{AD}| = 13/5 = 2,6 \text{ (лин. ед.)}$.

7 СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 1 Смешанным произведением векторов называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, умноженному на вектор $\vec{c}$.

Рассмотрим свойства смешанного произведения векторов.

1) Смешанное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти три вектора компланарны.

2) Смешанное произведение трех некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равно объему параллелепипеда, если тройка векторов правая, и объему параллелепипеда, взятому со знаком минус, если тройка векторов левая.

$$3) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

$$4) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

Таким образом, если в смешанном произведении поменять местами два вектора, то знак смешанного произведения изменится на противоположный знак. Если же в смешанном произведении поменять местами все три вектора, то знак смешанного произведения не изменится.

Так как, три некопланарных вектора в трёхмерном пространстве образуют базис, то на основании первого свойства смешанного произведения, для доказательства некопланарности векторов или доказательства того, что три вектора образуют базис необходимо показать, что смешанное произведение трёх векторов отлично от нуля.

Если смешанное произведение трёх векторов имеет положительный знак, то эта тройка векторов правая, на основании второго свойства. Если смешанное произведение отрицательное, то тройка векторов является левой.

Пример 1 Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют левую тройку и $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 2$. Найти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Решение. Найдём вектор векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$. Длина вектора равна $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin 90^\circ = 6 \cdot 4 \cdot 1 = 24$; $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$; вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ образуют правую тройку. По условию векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку. Следовательно, $\vec{a} \times \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{c}$, то есть $\angle(\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}) = 180^\circ$. Находим смешанное произведение заданных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 180^\circ = 24 \cdot 2 \cdot (-1) = -48$.

Рассмотрим ортонормированный базис $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$. Предположим, что в базисе заданы векторы $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$.

Тогда смешанное произведение векторов определяем по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Пример 2 Заданы векторы $\vec{a}(3;4;9)$, $\vec{b}(1;3;1)$ и $\vec{c}(5;6;2)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Какова ориентация тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

Решение. Находим смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 6 \cdot 9 - 9 \cdot 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 3 = -69 < 0.$$

Так как, смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отрицательно, то на основании второго свойства смешанного произведения указанные векторы образуют левую тройку.

Пример 3 Доказать, что векторы $\vec{e}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{e}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$ в этом базисе.

Решение. Векторы образуют базис, если их смешанное произведение отлично от нуля. Вычисляем смешанное произведение векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$:

$$\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис, и вектор $\vec{a}$ линейно выражается через базисные векторы: $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3$, или в координатной форме получаем систему линейных уравнений, которую решим по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 6, \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 2, \\ -3\alpha - 5\beta + \gamma = -7. \end{cases}$$

$$\Delta = \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$ или $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Геометрический смысл смешанного произведения. Объём параллелепипеда равен абсолютной величине смешанного произведения трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, на которых он построен:

$$V_{\text{параллелепипеда}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (2)$$

Рассмотрим пирамиду $M_1M_2M_3M_4$ с вершинами в точках $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, $M_4(x_4; y_4; z_4)$. Объём пирамиды V вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{парал-да}} = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{M_1M_2} \overrightarrow{M_1M_3} \overrightarrow{M_1M_4}| = \frac{1}{6} \cdot \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Пример 4 Дана пирамида с вершинами в точках $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; 5)$, $C(4; 2; 6)$ и $D(5; 2; 3)$. Вычислить объём пирамиды $ABCD$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } V_{ABCD} &= \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{6} \text{mod}(\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \text{mod}(1 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} (\text{куб. ед}). \end{aligned}$$

8 ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим различные уравнения прямых на плоскости. В зависимости от параметров, которые определяют положение прямой на плоскости, рассматривают различные уравнения прямой на плоскости:

1) *уравнение прямой с заданным нормальным вектором и проходящей через точку* (нормальный вектор $\vec{n}(A;B)$ – любой вектор, перпендикулярный прямой; $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ – заданная и произвольная точка на этой прямой):

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0; \quad (1)$$

2) *общее уравнение прямой* (при условии $A^2 + B^2 > 0$):

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0; \quad (2)$$

3) *векторно-параметрическое уравнение прямой* (направляющий вектор $\vec{s}(m;n)$ – любой вектор, параллельный прямой; $M_0(x_0; y_0)$, $M(x, y)$ – заданная и произвольная точка прямой, с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно; $t \in R$ – параметр):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}; \quad (3)$$

4) *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n; \end{cases} \quad (4)$$

5) *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \quad (5)$$

6) *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad (6)$$

7) *уравнение прямой в отрезках* (значение a равно длине отрезка, отсекаемого прямой от оси абсцисс, значение b равно длине отрезка, отсекаемого прямой от оси ординат, то есть прямая проходит через точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \quad (7)$$

8) *уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку* (прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и задан угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона прямой к оси абсцисс):

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0); \quad (8)$$

9) *уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом* (для прямой задан угловой коэффициент k , и прямая проходит через точку $B(0;b)$):

$$y = k \cdot x + b; \quad (9)$$

10) *нормальное уравнение прямой* ($\vec{n}^0(\cos \alpha; \sin \alpha)$ – единичный нормальный вектор, направленный от начала координат к прямой; p – расстояние от начала координат до прямой):

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) является нормальным уравнением прямой при выполнении двух условий: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ – $p \leq 0$.

Для приведения общего уравнения прямой $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ к нормальному виду необходимо умножить обе части уравнения на интегрирующий множитель $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, причём $\mu \cdot C \leq 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $l: A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0; l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (11)$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямых на плоскости.

1. Угол φ между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ находится из формулы $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Условие параллельности прямых: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

В случае выполнения последнего равенства прямые совпадают.

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2. Угол φ между прямыми $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$ находится из формулы $\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$.

Условие параллельности прямых: $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

3. Угол φ между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ находится из формулы $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|$.

Условие параллельности прямых: $k_2 = k_1$.

Условие перпендикулярности: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Пример 1 Записать уравнение прямой с заданным нормальным вектором $\vec{n}(6;8)$ и проходящей через точку $M_0(-1;-3)$. Привести общее уравнение прямой к общему виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

Решение: Воспользуемся уравнением (1): $6 \cdot (x+1) + 8 \cdot (y+3) = 0$. Общее уравнение прямой имеет вид: $3x + 4y + 15 = 0$. Для записи нормального уравнения прямой умножим общее уравнение прямой на нормирующий множитель

$\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}$. Тогда нормальное уравнение имеет вид: $-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$.

Расстояние от начала координат до прямой равно $p = 3$.

Пример 2 Составить уравнение прямой l_1 , которая перпендикулярна прямой $l: 3x - 7y + 4 = 0$ и проходит через точку $M_0(2; -5)$. Найти расстояние от точки M_0 до прямой l .

Решение. По условию прямые l_1 и l перпендикулярны. Следовательно, в качестве направляющего вектора $\vec{s}_1$ прямой l_1 можно выбрать нормальный вектор $\vec{n}(3; -7)$ прямой l , так как он параллелен этой прямой. Для составления уравнения прямой l_1 воспользуемся каноническим уравнением прямой (5): $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-7}$. Общее уравнение прямой l_1 имеет вид: $7x + 3y + 1 = 0$.

Расстояние от точки M_0 до прямой l находим по формуле (11):

$$\rho(M_0; l) = \frac{|3 \cdot 2 - 7 \cdot (-5) + 4|}{\sqrt{3^2 + (-7)^2}} = \frac{45}{\sqrt{58}} = \frac{45 \cdot \sqrt{58}}{58}.$$

Пример 3 Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2; -3)$ и $M_2(7; 1)$. Указать направляющий и нормальный вектор прямой.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (6): $\frac{x-2}{7-2} = \frac{y+3}{1+3}$. Каноническое уравнение прямой имеет вид $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4}$ с направляющим вектором $\vec{s}(5; 4)$. Общее уравнение прямой имеет вид $4x - 5y - 23 = 0$ с нормальным вектором $\vec{n}(4; -5)$.

Пример 4 Найти площадь треугольника, ограниченного прямой $l: 3x + 8y - 24 = 0$ и координатными осями.

Решение. Уравнение прямой l в отрезках (7) имеет вид $\frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 1$, где $a = 8$ и $b = 3$ – отрезки, отсекаемые прямой от осей координат Ox и Oy , соответственно. Таким образом, получаем прямоугольный треугольник с катетами длиной 8 и 3 (лин. ед.). Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ (кв. ед.).

Пример 5 Записать уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(1; 2)$ и образует угол 45° с прямой $y = 2x + 3$.

Решение. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$, где $\varphi = 45^\circ$ – угол между искомой и заданной прямой, $k_1 = 2$ – угловой коэффициент заданной прямой, k_2 – угловой коэффициент искомой прямой. Находим угловой коэффициент k_2 искомой прямой из уравнения $\left| \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} \right| = \operatorname{tg} 45^\circ$ или $\left| \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} \right| = 1$, которое равносильно двум уравнениям $\frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} = 1$ и $\frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} = -1$. Решая полученные уравнения, находим два возможных угловых коэффициента $k_2 = -3$ и $k_1 = \frac{1}{3}$. Используя уравнение $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку (4.1.8), находим уравнения искомых прямых, удовлетворяющих условию задачи: $y = -3x + 5$ или $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$.

Пример 6 Найти угол между прямой $l_1: 3x - 4y - 2 = 0$ и прямой $l_2: 5x + 12y - 22 = 0$. Определить координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2 .

Решение. Угол φ между прямыми найдём как угол между нормальными векторами прямых l_1 и l_2 , то есть между векторами $\vec{n}_1(3; -4)$ и $\vec{n}_2(5; 12)$, соответственно.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3 \cdot 5 + (-4) \cdot 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 12^2}} = -\frac{33}{65}, \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{33}{65}\right) = \pi - \arccos \frac{33}{65}.$$

Для определения точки пересечения прямых решим систему уравнений.

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0, \\ 5x + 12y - 22 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 5x + 12y = 22. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 56, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 22 & 12 \end{vmatrix} = 112, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 22 \end{vmatrix} = 56.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{112}{56} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{56}{56} = 1.$$

Точка пересечения прямых l_1 и l_2 имеет координаты $M_0(2; 1)$.

9 ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим различные уравнения плоскостей в пространстве. В зависимости от параметров, которые определяют положение плоскости в пространстве, рассматривают различные уравнения плоскостей:

1) *уравнение плоскости с заданным нормальным вектором и проходящей через точку (нормальный вектор $\vec{n}(A;B;C)$)* – любой вектор, перпендикулярный плоскости; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $M(x; y; z)$ – заданная и произвольная точка на этой плоскости):

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0; \quad (1)$$

2) *общее уравнение плоскости* (при условии $A^2 + B^2 + C^2 > 0$):

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0; \quad (2)$$

Пример 1 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 2; 3)$ параллельно векторам $\vec{a}(3; 5; 7)$ и $\vec{c}(4; 1; 3)$.

Решение. Вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$ параллельны плоскости, а, следовательно, вектор их векторного произведения будет перпендикулярен плоскости и его можно выбрать в качестве нормального вектора.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 8\vec{i} + 19\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Воспользуемся уравнением плоскости (1):

$$8 \cdot (x - 1) + 19 \cdot (y - 2) - 17 \cdot (z - 3) = 0 \text{ или } 8x + 19y - 17z + 5 = 0.$$

3) *векторно-параметрическое уравнение плоскости (направляющие векторы $\vec{p}(p_1; p_2; p_3)$, $\vec{q}(q_1; q_2; q_3)$)* – любые два неколлинеарных вектора, параллельные плоскости; $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M(x; y; z)$ – заданная и произвольная точка плоскости, с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно; $\alpha \in R$, $\beta \in R$ – параметры):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{q}; \quad (3)$$

4) *параметрические уравнения плоскости:*

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot p_1 + \beta \cdot q_1, \\ y = y_0 + \alpha \cdot p_2 + \beta \cdot q_2, \\ z = z_0 + \alpha \cdot p_3 + \beta \cdot q_3; \end{cases} \quad (4)$$

5) *уравнение плоскости, проходящей через три точки*
 $M_i(x_i; y_i; z_i), i = 1; 2; 3$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0; \quad (5)$$

6) *уравнение плоскости в отрезках* (значение a равно длине отрезка, отсекаемого плоскостью от оси абсцисс, значение b равно длине отрезка, отсекаемого плоскостью от оси ординат, значение c равно длине отрезка, отсекаемого плоскостью от оси аппликат, то есть плоскость проходит через точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; \quad (6)$$

Пример 2 Вычислить объём пирамиды ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $\pi: 3x - 4y + 6z - 24 = 0$.

Решение. Запишем уравнение плоскости π в отрезках, то есть воспользуемся уравнением плоскости (6): $\frac{x}{8} - \frac{y}{6} + \frac{z}{4} = 1$. Тогда

$$V_{\text{пирамиды}} = S_{\text{основания}} \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 = 96 \text{ (кв. ед.)}.$$

7) *нормальное уравнение плоскости* (вектор $\vec{n}^0(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – единичный нормальный вектор, направленный от начала координат к плоскости; p – расстояние от начала координат до плоскости):

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) является нормальным уравнением плоскости при выполнении двух условий: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ и $-p \leq 0$.

Для приведения общего уравнения плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ к нормальному виду необходимо умножить обе части уравнения на интегрирующий множитель $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, причём $\mu \cdot D \leq 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0; \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8)$$

Пример 3 Написать уравнение плоскости π_1 , проходящей через точку $M_0(2; 1; 3)$ параллельно плоскости $\pi: 2x - 6y + 3z + 1 = 0$. Вычислить расстояние между плоскостями.

Решение. Так как плоскости параллельны, то нормальные векторы являются коллинеарными. Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости π_1 выбираем нормальный вектор плоскости π , то есть нормальный вектор плоскости π_1 имеет координаты: $\vec{n}_1(2; -6; 3)$. Воспользуемся уравнением плоскости (1): $2 \cdot (x - 2) - 6 \cdot (y - 1) + 3 \cdot (z - 3) = 0$ или $2x - 6y + 3z - 7 = 0$.

Расстояние между плоскостями найдём как расстояние от точки $M_0(2; 1; 3)$ до плоскости $\pi: 2x - 6y + 3z + 1 = 0$ по формуле (8):

$$\rho(\pi_1; \pi) = \rho(M_0; \pi) = \frac{|2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{8}{7}.$$

Угол ϕ между плоскостями $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ равен углу между нормальными векторами плоскостей, а, следовательно, его можно определить по формуле

$$\cos \phi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (9)$$

Пример 4 Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3; 4; 5)$, $M_2(5; 7; 9)$ и $M_3(6; 8; 6)$. Определить угол между полученной плоскостью и плоскостью π , заданной в примере 3.

Решение. Находим уравнение плоскости $M_1M_2M_3$, используя уравнение плоскости, проходящей через три точки (5):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 13x - 10y - z - 4 = 0.$$

Определим угол между плоскостью $13x - 10y - z - 4 = 0$ и плоскостью $2x - 6y + 3z - 7 = 0$. Угол между плоскостями находим как угол между нормальными векторами плоскостей по формуле (9):

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{M_1M_2M_3}}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{M_1M_2M_3}|} = \frac{13 \cdot 2 + (-10) \cdot (-6) + (-1) \cdot 3}{\sqrt{13^2 + (-10)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = \frac{83}{21\sqrt{30}}.$$

Тогда угол между плоскостями равен значению

$$\varphi = \arccos \frac{83}{21\sqrt{30}}.$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

В случае выполнения последнего равенства плоскости совпадают.

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

10 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим различные уравнения прямых в пространстве. В зависимости от параметров, которые определяют положение прямой в пространстве, рассматривают различные уравнения прямой:

1) *общее уравнение прямой в пространстве:*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \quad (1)$$

Пример 1 Найти точку пересечения прямой l и плоскости π , записав уравнение прямой l в каноническом виде, если заданы уравнения прямой и плоскости.

$$l: \begin{cases} 3x + 4y - 6z - 11 = 0; \\ 2x - 3y + 9z + 4 = 0, \end{cases} \quad \pi: x + 4y - z - 4 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение прямой l в каноническом виде. Для определения точки, которая принадлежит прямой, предположим, что одна из переменных равна нулю. Например, пусть $z = 0$. В результате приходим к системе из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$$

Решение системы $x=1$, $y=2$. Таким образом, точка $M_0(1;2;0)$ принадлежит прямой l . В качестве направляющего вектора прямой l возьмём вектор векторного произведения нормальных векторов плоскостей, которые задают прямую l .

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 18\vec{i} - 39\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Тогда уравнение прямой l в каноническом виде: $\frac{x-1}{18} = \frac{y-2}{-39} = \frac{z}{-17}$. Для определения точки пересечения прямой и плоскости запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + 18t, \\ y = 2 - 39t, \\ z = -17t. \end{cases}$$

Подставляя переменные x , y и z в уравнение плоскости π , находим значение параметра t : $\pi: 1 + 18t + 4 \cdot (2 - 39t) + 17t - 4 = 0$, $t = \frac{5}{121}$. Подставляя значение параметра t в последнюю систему, определяем координаты точки пересечения прямой l с плоскостью π : $M_0\left(\frac{211}{121}; \frac{47}{121}; -\frac{85}{121}\right)$.

2) *векторно-параметрическое уравнение прямой* (направляющий вектор $\vec{s}(m; n; p)$ – любой вектор, параллельный прямой; $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M(x; y; z)$ – заданная и произвольная точка прямой, с радиус-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, соответственно; $t \in R$ – параметр):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}; \quad (2)$$

3) *параметрические уравнения прямой*:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p; \end{cases} \quad (3)$$

4) *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \quad (4)$$

Пример 2 Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(5; -1; 7)$ на плоскость $4x + 7y - 9z + 3 = 0$.

Решение. Так как уравнение прямой является перпендикулярной заданной плоскости, то в качестве направляющего вектора прямой выбираем нормальный вектор плоскости: $\vec{n}(4; 7; -9) = \vec{s}$. Используя каноническое уравнение прямой (4), получаем искомое уравнение прямой: $\frac{x - 5}{4} = \frac{y + 1}{7} = \frac{z - 7}{-9}$.

5) уравнение прямой, проходящей через две точки $M_i(x_i; y_i; z_i), i = 1; 2$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (5)$$

Угол φ между прямыми $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ и $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ совпадает с углом между направляющими векторами $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$. Следовательно, угол между прямыми находится из формулы

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (6)$$

Условие параллельности прямых: $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Пример 3 Найти угол между прямыми $l_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-8}{-1}$ и $l_2: \frac{x-7}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z+8}{0}$.

Решение. Угол между прямыми найдём как угол между направляющими векторами прямых:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{11}{\sqrt{406}},$$

$$\varphi = \angle(l_1; l_2) = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{406}}\right).$$

Угол Θ между прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскостью

$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ совпадает с углом между направляющим вектором $\vec{s}(m; n; p)$ прямой и нормальным вектором $\vec{n}(A; B; C)$ плоскости. Следовательно, угол между прямой и плоскостью находится из формулы

$$\sin \Theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (7)$$

Условие параллельности прямой и плоскости: $\vec{s} \perp \vec{n} \leftrightarrow mA + nB + pC = 0$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\vec{s} \parallel \vec{n} \leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$.

Пример 4 Найти угол между прямой $l: \frac{x+4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-9}{3}$ и плоскостью $\pi: 4 \cdot x + 7 \cdot y + z - 12 = 0$.

Решение. Угол между прямой и плоскостью найдём по формуле

$$\sin \Theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где $\vec{n}(A; B; C)$ и $\vec{s}(m; n; p)$ – нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой, соответственно. Находим синус угла между заданной прямой l и плоскостью π :

$$\sin \Theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{21}{2\sqrt{231}}.$$

Тогда угол между прямой l и плоскостью π равен:

$$\Theta = \angle(l; \pi) = \arcsin\left(\frac{21}{2\sqrt{231}}\right).$$

11 ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Определение 1 *Линией второго порядка* в декартовой системе координат называется множество точек плоскости, удовлетворяющих следующему уравнению $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$, где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$.

Рассмотрим основные линии второго порядка.

1. Окружность.

Окружность (рисунок 1) с центром в точке $C(a;b)$ и радиусом R задаётся уравнением:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (1)$$

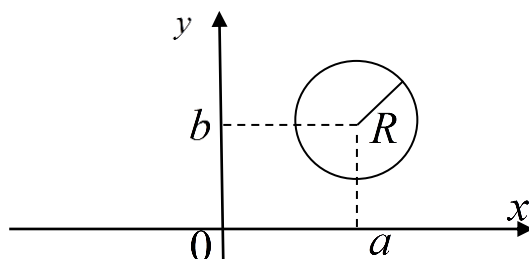


Рисунок 1 – Окружность

2. Эллипс.

Определение 1 *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 , которые называются фокусами, есть величина постоянная: $|F_1M| + |F_2M| = Const$.

Эллипс (рисунок 2) с полуосями a и b ($a \geq b > 0$), центром в начале координат и вершинами $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ задаётся каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

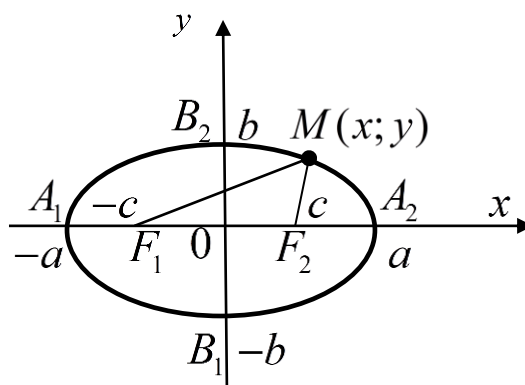


Рисунок 2 – Эллипс

Параметры a и b называются полуосями эллипса (большой и малой соответственно), оси симметрии Ox и Oy – главными осями, а центр симметрии O – центром эллипса. Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$, называются фокусами эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – фокальными радиус-векторами, а числа $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ – фокальными радиусами точки $M(x;y)$, принадлежащей эллипсу. В частном случае, если $a = b$, то фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$, то есть описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$ называется эксцентриситетом эллипса и показывает степень вытянутости вдоль большей оси (при значении $\varepsilon = 0$ эллипс является окружностью). Прямые $D_1: x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $D_2: x = \frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные главной оси, называются директрисами эллипса.

Пример 1 Написать каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет равен 0,6.

Решение. По условию расстояние между фокусами равно $|F_1F_2| = 2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$. Следовательно, $c = 3$ и $a = 5$. Находим параметр b из соотношения $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3. Гипербола.

Определение 12.1.3 Гиперболой называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 , которые называются фокусами, есть величина постоянная:

$$\left| |\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| \right| = \text{Const}.$$

Гипербола (рисунок 3) с действительной полуосью a и мнимой полуосью b , центром в начале координат и вершинами $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ задаётся каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

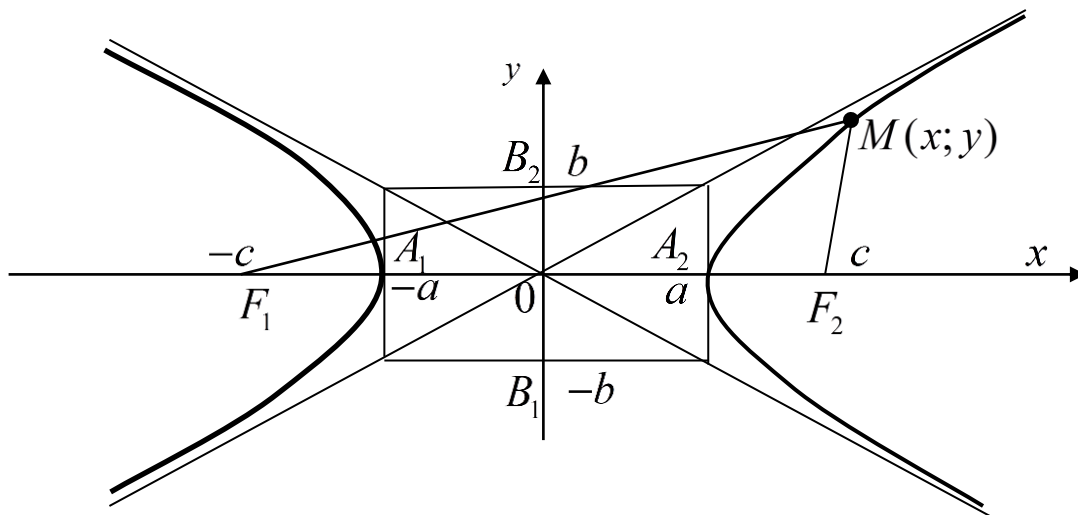


Рисунок 3 – Гипербола

Параметры a и b называются полуосями гиперболы (действительной и мнимой соответственно), оси симметрии Ox и Oy – действительной и мнимой осями, а центр симметрии O – центром гиперболы. Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, называются фокусами эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – фокальными радиус-векторами, а числа $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ – фокальными радиусами точки $M(x; y)$, принадлежащей гиперболе.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы и по-

казывает степень вытянутости вдоль действительной оси. Прямые $D_1: x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и

$D_2: x = \frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные главной оси, называются директрисами гипербо-

лы. Прямые $C_1: y = -\frac{b}{a}x$ и $C_2: y = \frac{b}{a}x$, к которым неограниченно близко при-

ближаются ветви гиперболы на бесконечности, называются асимптотами ги-

перболы. Гипербола, уравнение которой имеет вид $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, называется сопряжённой к гиперболе вида (3).

Пример 2 Написать каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 8, а расстояние между директрисами равно 18.

Решение. По условию расстояние между фокусами равно $|F_1F_2| = 2c = 8$, а расстояние между директрисами $|D_1D_2| = 2\frac{a}{\varepsilon} = \frac{1}{8}$. Учитывая, что эксцентриси-

тет гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{a}$, получаем значения параметров: $c = 4$ и $a = \frac{1}{2}$.

Находим параметр b из соотношения $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{255}}{4}$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{255} = 1$.

4. Парабола.

Определение 12.1.4 *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудалённых от фиксированной точки F , которая называется фокусом, и некоторой данной прямой, которая называется директрисой: $|\overline{FM}| = |\overline{NM}|$.

Парабола (рисунок 4) с вершиной в начале координат и симметричная относительно оси Ox , при условии $p > 0$, задаётся каноническим уравнением

$$y^2 = 2px. \quad (4)$$

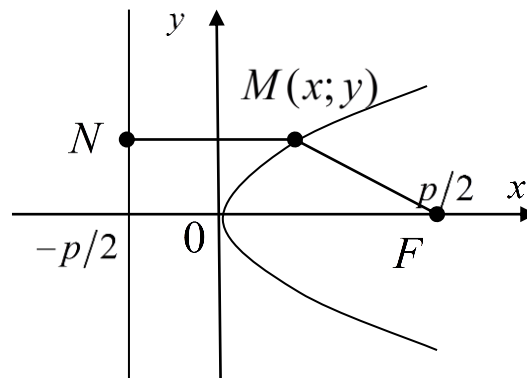


Рисунок 4 – Парабола

Число p называется параметром параболы, начало координат – её вершиной, а ось абсцисс – осью параболы. Точка $F(p/2; 0)$ называется фокусом параболы, вектор $\overline{FM}$ – фокальным радиус-вектором, а число $r = |\overline{FM}|$ – фокальным радиусом точки M параболы. Прямая $D: x = -p/2$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $p/2$ от вершины параболы, называется её директрисой. Эксцентриситет параболы равен единице.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Ox и ветвями, направленными вправо, имеет вид: $y^2 = 2px$.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Oy и ветвями, направленными вверх, имеет вид: $x^2 = 2py$.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, с осью симметрии Oy и ветвями, направленными вниз, имеет вид: $x^2 = -2py$.

Пример 3 Написать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $M_0(-2; -4)$.

Решение. Так как парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $M_0(-2; -4)$, то каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = -2px$. Так как точка $M_0(-2; -4)$ принадлежит параболе, то справедливо равенство: $(-4)^2 = -2 \cdot p \cdot (-2)$. Следовательно, значение параметра $p = 4$. Тогда каноническое уравнение параболы имеет вид: $y^2 = -8x$.

Если общее уравнение линии второго порядка определяет окружность, эллипс, гиперболу или параболу, то поворотом базисных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вокруг начала координат на угол φ , который определяется из тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} 2\varphi = 2a_{12}/(a_{11} - a_{22})$, и параллельным переносом этих осей всегда можно добиться того, чтобы в новой системе координат уравнения заданных линий принимали канонический вид. Наиболее простым примером является приведение общего уравнения линий второго порядка к каноническому виду в случае $a_{12} = 0$. В данном случае применяют *метод выделения полных квадратов*.

Пример 4 Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $4x^2 - 25y^2 - 8x - 100y - 196 = 0$. Найти основные характеристики данной линии.

Решение. Для приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду воспользуемся методом выделения полного квадрата.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25y^2 - 8x - 100y - 196 &= 0, \\ 4(x^2 - 2x + 1) - 25(y^2 + 4y + 4) - 4 + 100 - 196 &= 0, \\ 4(x - 1)^2 - 25(y + 2)^2 &= 100, \\ \frac{(x - 1)^2}{25} - \frac{(y + 2)^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Выполним замену $x' = x - 1$, $y' = y + 2$. В результате получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{25} - \frac{y'^2}{4} = 1$$

в новой системе координат $O'x'y'$, где точка O' в системе координат Oxy имеет координаты $(1; -2)$. В новой системе координат действительная полуось равна $a = 5$, а мнимая полуось $b = 2$. Для гиперболы всегда выполняется равенство $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Следовательно, координаты фокусов равны:

$F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$. Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = c/a = \sqrt{5}/5$. Уравнения директрис: $x = \pm a/\varepsilon$ или $x = \pm 5\sqrt{5}$. Уравнения асимптот: $y = \pm bx/a$ или $y = \pm 2x/5$.

Пример 5 Составить канонические уравнения: а) эллипса, если сумма полуосей $a + b = 12$, а расстояние между фокусами $2c = 8\sqrt{3}$; б) гиперболы, с вершиной в точке $A(2;0)$ и проходящей через точку $B(4;3\sqrt{3})$; в) параболы, зная, что её вершина находится в начале координат, расстояние от фокуса до вершины равно 4, осью симметрии служит ось Ox и она проходит через точку $C(-1;4)$.

Решение: а) каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a – малая полуось; b – большая полуось. Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$. Для определения уравнения эллипса необходимо найти неизвестные параметры a и b . По свойствам уравнения эллипса формула, которая связывает его параметры, имеет вид $a^2 - b^2 = c^2$. По условию $c = 4\sqrt{3}$. В результате получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 48, \\ a - b = 4. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим, что $a = 8$, $b = 4$. Следовательно, каноническое уравнение искомого эллипса имеет вид $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$;

б) каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a – действительная полуось; b – мнимая полуось. Гипербола проходит через две известные точки A и B , а, следовательно, координаты этих точек удовлетворяют искомому уравнению гиперболы, то есть при подстановке координат точек получаем верные равенства. В результате имеем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{2^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1, \\ \frac{4^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{3})^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

решив которую, находим, что действительная полуось $a=2$, мнимая полуось $b=3$. Следовательно, каноническое уравнение искомой гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

в) так как осью симметрии параболы служит ось Ox , а вершиной – начало координат, то уравнение параболы может быть определено одним из канонических уравнений $y^2 = 2px$ или $y^2 = -2px$, где p – расстояние от директрисы $x = -\frac{p}{2}$ до начала координат. Расстояние от фокуса до вершины равно половине параметра p . Следовательно, $p/2 = 4$ и $p = 8$. Подставляя это значение p в каждое из приведённых выше уравнений, получаем уравнения парабол: $y^2 = 16x$ или $y^2 = -16x$. Учитывая, что искомая парабола проходит через точку $C(-1; 4)$, получаем, что уравнение искомой параболы $y^2 = -16x$.

Пример 6 Найти уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(3; -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = -13$.

Решение. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка искомой линии. По условию задачи $|\overline{AM}| = 3 \cdot |\overline{BM}|$, где $|\overline{BM}|$ – расстояние от точки M до прямой $x = -13$. Так как

$$|\overline{AM}| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}, \quad |\overline{BM}| = \sqrt{(x+13)^2 + (y-y)^2} = |x+13|,$$

то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 3 \cdot |x+13|.$$

Преобразуем уравнение, возведя обе части в квадрат. Имеем

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 9x^2 + 234x + 1521,$$

$$8x^2 - y^2 + 240x - 8y + 1496 = 0.$$

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, приходим к уравнению вида $\frac{(x+15)^2}{36} - \frac{(y+4)^2}{288} = 1$.

Выполним замену $x' = x + 15$, $y' = y + 4$. В результате получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{36} - \frac{y'^2}{288} = 1,$$

в новой системе координат $O'x'y'$, где точка O' в системе координат Oxy имеет координаты $(-15; -4)$. В новой системе координат действительная полуось равна $a = 6$, а мнимая полуось $-b = 12\sqrt{2}$. Для гиперболы всегда выполняется равенство $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + (12\sqrt{2})^2} = 18$. Следовательно, координаты фокусов равны: $F_1(-18; 0)$, $F_2(18; 0)$. Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = c/a = 3$. Уравнения директрис: $x = \pm a/\varepsilon$ или $x = \pm 2$. Уравнения асимптот: $y = \pm bx/a$ или $y = \pm 2\sqrt{2}x$.

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Положение произвольной точки $M(x; y)$ на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат OXY определяется числами x – абсцисса и y – ордината. Эту точку можно задать и другим способом: с помощью расстояния $r = |\overline{OM}|$ и угла φ , отсчитываемого против хода часовой стрелки от положительного направления оси абсцисс.

Полярными координатами точки $M(\varphi; r)$ называют два числа: *полярный радиус* $r = r(M) = |\overline{OM}| \geq 0$ и *полярный угол* $\varphi = \varphi(M)$ – угол, на который следует повернуть *полярную ось* OP , выходящую из *полюса* O для того, чтобы её направление совпало с направлением вектора $\overline{OM}$ (при этом, $\varphi > 0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае).

Полярный угол φ имеет бесконечное множество возможных значений, которые отличаются друг от друга на величину вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \leq \pi$), называют *главным*.

Связь между декартовыми и полярными координатами произвольной точки M (полюс совпадает с началом координат O , а полярная ось OP имеет одинаковое направление с осью Ox) задаётся формулами

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad (5)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (6)$$

Уравнение линии в полярной системе координат имеет вид $F(\varphi; r) = 0$ или $r = f(\varphi)$. Оно может быть получено непосредственно, исходя из геометрических свойств линии, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой линии, заданной в декартовой прямоугольной системе координат.

Пример 7 Построить кривую, заданную в полярной системе координат.

Записать уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат.

Решение. Полярному углу φ будем придавать значения от угла $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через промежуток $\varphi = \frac{\pi}{8}$ и вычисляем соответствующие значения полярного радиуса r . Полярный радиус $r \geq 0$, тогда $\cos 2\varphi \geq 0$ и угол φ : $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Найденные значения запишем в виде таблицы:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$r = a \cos 2\varphi$	a	$a \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$a \frac{\sqrt{2}}{2}$	a	$a \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$a \frac{\sqrt{2}}{2}$	a

Построим заданную кривую. При построении кривой линии принимаем произвольный отрезок за единицу масштаба. Полюс полярной системы координат помещаем в центр декартовой прямоугольной системы, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс. Полученная кривая называется двулепестковой розой (рисунок 5).

Найдем уравнение двулепестковой розы в декартовой системе координат, используя формулы перехода от полярных координат $(\varphi; r)$ к декартовым координатам $(x; y)$:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

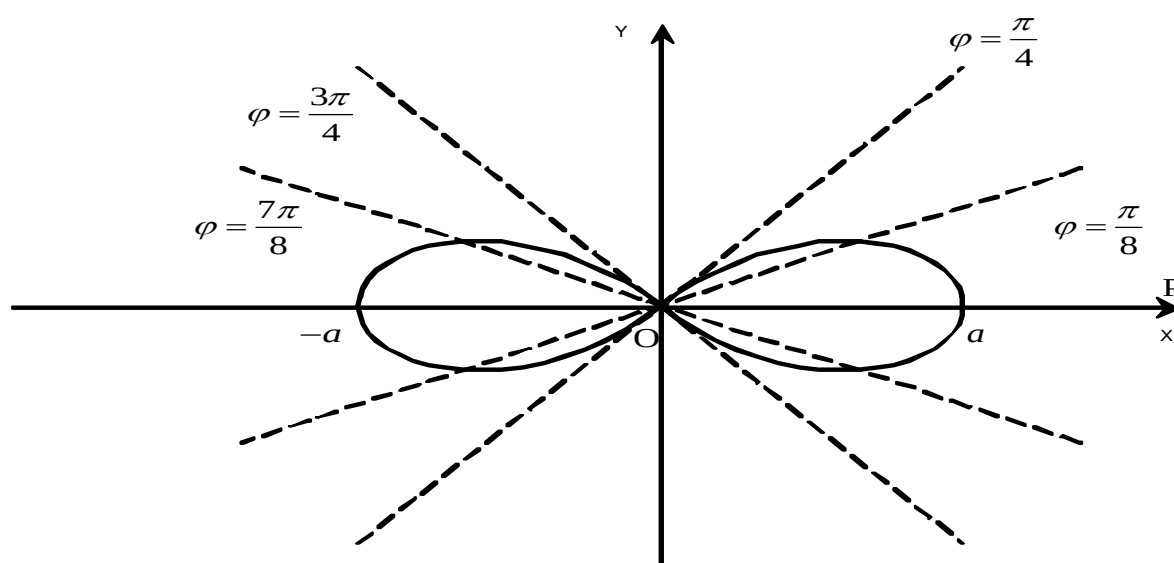


Рисунок 5 – Двулепестковая роза

Следовательно, уравнение двулепестковой розы в декартовой системе координат имеет вид $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)$ или $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Умножая обе части уравнения на множитель $x^2 + y^2$ получаем уравнение вида:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) = a \cdot (x^2 - y^2).$$

Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получаем окончательно уравнение двулепестковой розы: $(x^2 + y^2)^3 = a^2 \cdot (x^2 - y^2)^2$.