

МАТРИЦЫ

13.2 Примеры решения типовых задач

13.2.1 Найти линейную комбинацию $2A - 3B$, если матрицы A и B имеют

вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $2A - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} 4 & -8 & 14 \\ 6 & 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 15 & 18 \\ 6 & -9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -23 & -4 \\ 0 & 19 & -8 \end{pmatrix}.$

13.2.2 Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $A \cdot B = C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 7 & 4 \cdot 6 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 26 \\ 46 & 38 \end{pmatrix}.$

13.3 Задания для решения на практическом занятии

13.3.1 Найти линейные комбинации $4A - 5B$ и $2A + 3C$, если матрицы A , B

и C имеют вид: $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

13.3.2 Найти произведение матриц $A \cdot B$ и $B^T \cdot A^T$, если матрицы A и B

имеют вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

13.3.3 Найти произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если матрицы A и B имеют

вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

13.3.4 Вычислить $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$

13.3.5 Найти: а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n$, где $n \in \mathbb{N}$.

13.3.6 Найти значение многочлена $f(B)$ от матрицы B , если матрица B задана в задаче 13.3.2 и $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$.

13.3.7 Найти все матрицы перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

13.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

13.4.1 Даны две матрицы A и B . Найти: а) $A \cdot B$; б) $B \cdot A$; в) $A^T \cdot B^T$; г) $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

13.4.1.1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

13.4.1.2 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$

13.4.1.3 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.4 $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$

13.4.1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

13.4.1.7 $A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

13.4.1.8 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

$$13.4.1.9 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & -5 \\ -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.10 \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 9 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.11 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.12 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.13 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.14 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.15 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 9 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.16 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.17 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.18 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.19 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.20 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 8 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.21 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.22 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.23 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.24 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.25 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.26 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.27 \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.28 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.29 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$13.4.1.30 \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

14.2 Примеры решения типовых задач

14.2.1 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель по правилу треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 11 \cdot 1 - 1 \cdot 8 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 11 \cdot 1 = 2.$$

14.2.2 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ путём

разложения по второй строке.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \\ &+ 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-29) + 2 \cdot (-54) - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 21 = 61. \end{aligned}$$

14.2.3 Найти обратную матрицу к матрице, заданной в примере 14.2.1.

Решение. Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$ найден в примере 14.2.1 и

равен $|A| = 2$. Найдём алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -23, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -9, & A_{31} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 17, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -5, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Находим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -23 & -9 & 17 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,5 & -4,5 & 8,5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2,5 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

14.3 Задания для решения на практическом занятии

14.3.1 Определить чётность подстановки $(4 \ 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 5)$.

14.3.2 Выяснить, какие из приведённых произведений входят в определители соответствующих порядков, и с какими знаками: а) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$;

б) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$; в) $a_{27}a_{35}a_{51}a_{74}a_{15}a_{43}a_{62}$; г) $a_{27}a_{35}a_{51}a_{74}a_{16}a_{43}a_{62}$.

14.3.3 Выбрать значения i и j так, чтобы произведение $a_{62}a_{5i}a_{33}a_{1j}a_{46}a_{21}$ входило в некоторый определитель со знаком: а) плюс; б) минус.

14.3.4 Решить уравнение: а) $\begin{vmatrix} x-1 & 7-x \\ 1 & x+3 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} \cos 9x & \sin 9x \\ \sin 3x & \cos 3x \end{vmatrix} = 0$.

14.3.5 С помощью правила треугольников вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 15 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

14.3.6 Решить неравенства:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 4-x & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9-x \end{vmatrix} \leq 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 7-x & 6 & -19 \\ 2 & 3-x & 4 \\ 3 & 2 & x-7 \end{vmatrix} > 0.$$

14.3.7 Задан определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Найти миноры элементов a_{21} и a_{44} ,

а также алгебраические дополнения элементов a_{32} и a_{12} . Вычислить определитель: а) разложив его по элементам второй строки; б) разложив его по элементам третьего столбца; в) получив предварительно нули во втором столбце; г) получив предварительно нули в третьей строке.

14.3.8 Задан определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$. Найти миноры элементов a_{22} и a_{41} ,

а также алгебраические дополнения элементов a_{11} и a_{32} . Вычислить определитель: а) разложив его по элементам первой строки; б) разложив его по элементам четвёртого столбца; в) получив предварительно нули в удобной для преобразования строке или столбце.

14.3.9 Для матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и убедиться, что $AA^{-1} = E$ и $A^{-1}A = E$, если: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

14.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

14.4.1 В задаче 13.4.1 заданы матрицы A и B . Для матрицы B найти обратную матрицу B^{-1} и убедиться, что $B \cdot B^{-1} = E$ и $B^{-1} \cdot B = E$.

14.4.2 Для данного определителя найти миноры элементов a_{i1}, a_{4j} и алгебраические дополнения элементов a_{i3}, a_{2j} . Вычислить определитель $\det A$: а) разложив его по элементам i -ой строки; б) разложив его по элементам j -го столбца; в) получив предварительно нули в произвольной строке или столбце.

14.4.2.1	$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & -9 \\ 2 & 5 & -5 & 3 \end{vmatrix}$	$i = 4,$ $j = 2.$	14.4.2.2	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 & -7 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & -5 & 2 \end{vmatrix}$	$i = 1,$ $j = 3.$
14.4.2.3	$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -7 \end{vmatrix}$	$i = 2,$ $j = 1.$	14.4.2.4	$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 7 & 2 \\ 9 & 4 & 6 & -7 \\ -4 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$	$i = 3,$ $j = 4.$
14.4.2.5	$\begin{vmatrix} 1 & -7 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ -2 & 5 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & -6 & 3 \end{vmatrix}$	$i = 4,$ $j = 2.$	14.4.2.6	$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 9 & -8 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$	$i = 4,$ $j = 3.$

14.4.2.7	$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 7 \\ -5 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & -4 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & -9 \end{vmatrix}$	$i = 1,$ $j = 2.$	14.4.2.8	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 & 2 \\ -7 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -5 \end{vmatrix}$	$i = 3,$ $j = 2.$
14.4.2.9	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & -9 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \end{vmatrix}$	$i = 3,$ $j = 4.$	14.4.2.10	$\begin{vmatrix} -4 & 8 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -7 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$	$i = 3,$ $j = 1.$
14.4.2.11	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ -9 & 4 & 9 & 2 \end{vmatrix}$	$i = 2,$ $j = 1.$	14.4.2.12	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & -7 & 6 \\ -7 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	$i = 1,$ $j = 2.$
14.4.2.13	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 & 6 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$	$i = 3,$ $j = 4.$	14.4.2.14	$\begin{vmatrix} -6 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & -4 & 5 & 9 \\ 9 & 1 & 3 & -8 \\ 6 & 1 & -7 & 8 \end{vmatrix}$	$i = 1,$ $j = 1.$
14.4.2.15	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & -6 \\ 9 & -7 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -5 & 4 \\ -8 & 9 & 0 & 5 \end{vmatrix}$	$i = 4,$ $j = 1.$	14.4.2.16	$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & -6 & 7 & 2 \\ 5 & 9 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}$	$i = 1,$ $j = 4.$
14.4.2.17	$\begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & -9 \\ 6 & 2 & -5 & 8 \end{vmatrix}$	$i = 3,$ $j = 3.$	14.4.2.18	$\begin{vmatrix} -8 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -9 & 5 \\ -7 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}$	$i = 3,$ $j = 2.$
14.4.2.19	$\begin{vmatrix} -6 & 7 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$	$i = 2,$ $j = 4.$	14.4.2.20	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 & -9 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \\ -3 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	$i = 2,$ $j = 1.$
14.4.2.21	$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}$	$i = 4,$ $j = 3.$	14.4.2.22	$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 & -4 \\ -3 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & -9 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$	$i = 4,$ $j = 2.$

$$\mathbf{14.4.2.23} \quad \begin{vmatrix} 8 & -9 & 1 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & -5 \\ -4 & 5 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} i=3, \\ j=2. \end{matrix}$$

$$\mathbf{14.4.2.25} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & -6 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ -5 & 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} i=4, \\ j=3. \end{matrix}$$

$$\mathbf{14.4.2.27} \quad \begin{vmatrix} -9 & 7 & 3 & 9 \\ 8 & 8 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 9 & -6 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} i=4, \\ j=3. \end{matrix}$$

$$\mathbf{14.4.2.29} \quad \begin{vmatrix} -7 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & -9 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} i=1, \\ j=4. \end{matrix}$$

$$\mathbf{14.4.2.24} \quad \begin{vmatrix} -8 & 6 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & 6 & -5 & 2 \\ 9 & -7 & 8 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} i=1, \\ j=3. \end{matrix}$$

$$\mathbf{14.4.2.26} \quad \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -7 & 4 & 3 & 6 \\ 8 & -5 & 6 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} i=4, \\ j=1. \end{matrix}$$

$$\mathbf{14.4.2.28} \quad \begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 & -7 \\ 5 & -8 & 2 & 5 \\ -6 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} i=1, \\ j=2. \end{matrix}$$

$$\mathbf{14.4.2.30} \quad \begin{vmatrix} -6 & 1 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 8 & 2 \\ 9 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} i=4, \\ j=2. \end{matrix}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ

15.2 Примеры решения типовых задач

15.2.1 Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Определим ранг матрицы методом окаймляющих миноров. Находим окаймляющие миноры:

$$M_1^1 = 3 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = 0, M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 6 = 9 \neq 0,$$

$$M_{123}^{134} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 - 4 \cdot 7 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 5 \cdot 3 = 0,$$

$$M_{123}^{135} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 7 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 = 0.$$

Ранг матрицы равен $\text{rang} A = 2$, а базисным минором является минор $M_{12}^{13} = 9$.

15.2.2 Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить её по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & -2 & 3 & 12 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right). \text{ Найдём ранг основной и расширенной матрицы системы.}$$

$$M_1^1 = 2 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Ранг основной матрицы A равен $\text{rang} A = 3$. Так как для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, а более высокого порядка минор не существует, то ранг расширенной матрицы равен $\text{rang} A|B = 3$. Следовательно, $\text{rang} A|B = \text{rang} A = 3 = n$, то есть система совместна и имеет единственное решение. Решим систему по формулам Крамера: $\Delta = M_{123}^{123} = 4$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ 12 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 4 \\ 3 & 12 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 3 & -2 & 12 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 20.$$

Решение системы уравнений: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{20}{4} = 5$.

15.2.3 Исследовать на совместность систему линейных алгебраических уравнений и в случае совместности решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 7x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -5 & 6 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{array} \right). \text{ Найдём ранг основной и расширенной матрицы системы.}$$

$$M_1^1 = 3 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг основной матрицы A равен $\text{rang} A = 2$. Так как для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, но при этом существует минор

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -9 \neq 0, \text{ то ранг расширенной матрицы равен } \text{rang} A|B = 3. \text{ Так}$$

как $\text{rang} A|B \neq \text{rang} A$, то система несовместна, то есть не имеет решения.

15.2.4 Исследовать на совместность систему линейных алгебраических уравнений и в случае совместности решить систему матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 25, \\ 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 27. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим основную матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$. В задаче

14.2.1 вычислен определитель этой матрицы. Так как $|A| = 2 \neq 0$, то, согласно теореме 15.1.1, система совместна и имеет единственное решение. Решим систему

средствами матричного исчисления по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Обратная матрица

найдена в задаче 14.2.3: $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -23 & -9 & 17 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -23 & -9 & 17 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 27 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -23 \cdot 10 - 9 \cdot 25 + 17 \cdot 27 \\ 6 \cdot 10 + 2 \cdot 25 - 4 \cdot 27 \\ -5 \cdot 10 - 1 \cdot 25 + 3 \cdot 27 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение системы имеет вид: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

15.2.5 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 5, \\ 6x_1 + 5x_2 = 12. \end{cases}$$

Решение. Приведём расширенную матрицу системы к трапецеидальному виду путём элементарных преобразований.

$$\begin{aligned} A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 & 12 \end{array} \right) &\xrightarrow{\frac{1}{2}(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-4(I)+(II) \\ -6(I)+(III)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & -4 & -15 & 15 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{4(II)+(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -43 & 43 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{43}(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\substack{7(III)+(II) \\ -\frac{5}{2}(III)+(I)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{3}{2}(II)+(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

На основании метода элементарных преобразований получаем равенство рангов основной и расширенной матрицы системы: $\text{rang} A = \text{rang} A|B = 3 = n$, следовательно, система совместна и имеет единственное решение. От преобразованной расширенной матрицы системы переходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем решение системы $X = (2 \ 0 \ -1)^T$.

15.3 Задания для решения на практическом занятии

15.3.1 Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & 10 & 2 & 9 & 1 \\ 24 & 2 & 3 & 25 & 13 \end{pmatrix}$.

15.3.2 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить их по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 21, \\ 5x_1 + 22x_2 + 9x_3 = 17. \end{cases}$

15.3.3 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить их матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20, \\ 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 8, \\ -14x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 - 11x_2 - 9x_3 = -6, \\ 3x_1 + 22x_2 + 7x_3 = 9. \end{cases}$

15.3.4 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить их методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 10x_2 - 13x_3 + 8x_4 = 1, \\ 2x_1 + 9x_2 - 10x_3 + 6x_4 = 2, \\ 4x_1 + 14x_2 - 11x_3 - 8x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

15.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

15.4.1 Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность. В случае совместности решить её: а) матричным методом; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса.

15.4.1.1 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$

15.4.1.2 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

15.4.1.3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

15.4.1.4 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 5x_2 + 4x_3 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$

$$15.4.1.5 \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

$$15.4.1.7 \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$15.4.1.9 \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

$$15.4.1.11 \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

$$15.4.1.13 \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$15.4.1.15 \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_2 - 7x_3 = -10, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

$$15.4.1.17 \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$15.4.1.19 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 24, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$15.4.1.21 \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -3. \end{cases}$$

$$15.4.1.23 \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = -6. \end{cases}$$

$$15.4.1.25 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 8. \end{cases}$$

$$15.4.1.6 \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

$$15.4.1.8 \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$15.4.1.10 \quad \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$15.4.1.12 \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 4x_1 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$15.4.1.14 \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$15.4.1.16 \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$15.4.1.18 \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -11, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

$$15.4.1.20 \quad \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 11x_3 = 16. \end{cases}$$

$$15.4.1.22 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$15.4.1.24 \quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$15.4.1.26 \quad \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$15.4.1.27. \quad \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

$$15.4.1.29 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = -5. \end{cases}$$

$$15.4.1.28 \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

$$15.4.1.30 \quad \begin{cases} 8x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

16.2 Примеры решения типовых задач

16.2.1 Исследовать систему на совместность и в случае совместности найти общее решение.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 - 8x_2 + 15x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 4 & -8 & 15 & 2 \\ 3 & -6 & 12 & -1 \end{array} \right). \text{ Найдём ранг основной и расширенной матриц системы.}$$

$$M_1^1 = 1 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0, M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 3.$$

Ранг основной матрицы A равен $\text{rang} A = 2$. Для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, но существует ещё один минор

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 15 & 2 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ следовательно, ранг расширенной матрицы равен}$$

$\text{rang} A|B = 3$. Таким образом, $\text{rang} A|B = \text{rang} A = 2 < n = 3$, то есть система совместна и имеет бесконечное множество решений. Переменные x_1, x_3 являются базисными переменными, а переменная $x_2 = c$ — свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3 + 2c, \\ 4x_1 + 15x_3 = 2 + 8c, \end{cases} \Delta = 3, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 + 2c & 3 \\ 2 + 8c & 15 \end{vmatrix} = 39 + 24c, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 + 2c \\ 4 & 2 + 8c \end{vmatrix} = -10,$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 13 + 8c, x_3 = \Delta_2 / \Delta = -10/3, X_{o.n} = (13 + 8c \quad c \quad -10/3)^T, \text{ где } c \in \mathbf{R}.$$

16.2.2 Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель матрицы системы

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -273 \neq 0, \text{ то система имеет единственное нулевое решение.}$$

16.2.3 Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель матрицы системы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$, то

система имеет бесконечное множество решений. В качестве базисного минора выбираем минор $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Переменные x_1, x_2 являются базисными переменными, а переменная $x_3 = c$ – свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 5c, \\ 2x_1 + 9x_3 = -5c, \end{cases} \Delta = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5c & 4 \\ -5c & 9 \end{vmatrix} = 65c, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5c \\ 2 & -5c \end{vmatrix} = -15c,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 65c, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -15c, X_{o.n} = (65c \quad -15c \quad c)^T, \text{ где } c \in \mathbf{R}.$$

16.3 Задания для решения на практическом занятии

16.3.1 Исследовать системы линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности найти решение систем:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -5, \\ 6x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 6, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 12; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 8. \end{cases}$$

16.3.2 Решить однородные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 13x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

16.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

16.4.1 Исследовать на совместность и найти общее решение системы линейных неоднородных алгебраических уравнений.

$$\mathbf{16.4.1.1} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.2} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.3} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 2, \\ 8x_1 + 4x_2 + 22x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.4} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 14, \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 21. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.5} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 10. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.6} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 9x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9, \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.7} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 24. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.8} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.9} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.10} \quad \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 12x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.11} \quad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.12} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 10, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.13} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.14} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.15} \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.16} \quad \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + 15x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.17} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.18} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.19} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9, \\ x_1 - 12x_2 + 13x_3 = 14, \\ 4x_1 - 14x_2 + 18x_3 = 23. \end{cases}$$

$$\mathbf{16.4.1.20} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 12, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$16.4.1.21 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 12. \end{cases}$$

$$16.4.1.23 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 4. \end{cases}$$

$$16.4.1.25 \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4, \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 9. \end{cases}$$

$$16.4.1.27 \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 14, \\ 16x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 28. \end{cases}$$

$$16.4.1.29 \quad \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 12x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 23x_3 = -7. \end{cases}$$

$$16.4.1.22 \quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12, \\ 10x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 24, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

$$16.4.1.24 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$16.4.1.26 \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 10. \end{cases}$$

$$16.4.1.28 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$16.4.1.30 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 = -8. \end{cases}$$

16.4.2 Записать однородную систему линейных алгебраических уравнений $AX=0$, для которой задана матрица A . Найти фундаментальную систему решений полученной однородной системы линейных уравнений и определить размерность линейного пространства решений данной системы. Определить общее решение заданной однородной системы линейных уравнений.

$$16.4.2.1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$16.4.2.2 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 5 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$16.4.2.3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$16.4.2.4 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 5 & 13 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$16.4.2.5 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & 12 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$16.4.2.6 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & -2 \\ 8 & 12 & 16 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$16.4.2.7 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 & -2 \\ 8 & -4 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$16.4.2.8 \quad A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 28 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$16.4.2.9 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$16.4.2.10 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.11} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 11 & 6 & 11 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.13} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 9 & 6 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.15} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 9 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.17} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.19} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.21} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.23} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.25} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.27} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.29} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.12} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & -10 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.14} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 7 & 7 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & 9 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.16} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.18} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.20} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 7 \\ 7 & -7 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.22} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.24} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.26} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 15 & 5 & 10 & 15 & 30 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.28} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 12 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16.4.2.30} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 4 & 8 & 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$