

12 МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Определение 1 Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица, которая содержит m строк и n столбцов.

$$A = A_{m \times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

где a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – элементы матрицы, которые могут быть числами, функциями, векторами, матрицами и другими произвольными объектами. Первый индекс i указывает номер строки, а второй индекс j указывает номер столбца. Если $i = 1$, то матрица называется *матрицей-строкой*, если $j = 1$, то матрица называется *матрицей-столбцом*. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается O .

Матрица, в которой $i = j$, то есть число строк равно числу столбцов, называется квадратной матрицей. В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ образуют побочную диагональ. Матрица, в которой ниже и выше главной диагонали все элементы равны 0, называется *диагональной* матрицей. Диагональная матрица, все элементы которой равны 1, называется *единичной* и обозначается E .

На множестве матриц вводятся следующие операции: сложение матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц, транспонирование матрицы.

1. *Сложение матриц.* Данная операция вводится только для матриц одинаковой размерности. Суммой матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и матрицы $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij}) = A_{m \times n} + B_{m \times n}$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

2. *Умножение матрицы на число.* Данная операция вводится для матриц произвольной размерности. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число α называется матрица $C = \alpha \cdot A = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Пример 1 Найти линейную комбинацию $2A - 3B$, если матрицы A и B имеют вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $2A - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -8 & 14 \\ 6 & 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 15 & 18 \\ 6 & -9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -23 & -4 \\ 0 & 19 & -8 \end{pmatrix}.$$

3. Произведение матриц. Данная операция вводится только для согласованных матриц. Матрица A называется *согласованной* с матрицей B , если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ik})$, где $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, p}$). В общем случае операция произведения матриц не обладает свойством коммутативности, то есть $AB \neq BA$. Если выполняется равенство $AB = BA$, то матрицы называются перестановочными или коммутирующими. Для произведения матриц всегда справедливы равенства: $A(BC) = (AB)C$, $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$ и $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ раз}}$. Если матрицы A и E согласованы, то $AE = EA = A$.

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } A \cdot B = C_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 7 & 4 \cdot 6 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 26 \\ 46 & 38 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Транспонирование матриц. Данная операция вводится для матриц произвольной размерности. Матрица A^T к матрице A , если она получена из неё путём замены строк на столбцы, а столбцов на строки. Для транспонированных матриц справедливы равенства: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$ и $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Множество матриц одинаковой размерности, введенными операциями сложения и умножения на число, образуют векторное пространство.

13 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Перестановкой чисел $1, 2, 3, \dots, n$ называется любое расположение этих чисел в определенном порядке. Число всех перестановок, которые можно образовать из n чисел, равно $n!$. Рассмотрим перестановку из чисел $j_1, j_2, \dots, j_n$. Два числа в перестановке образуют инверсию, если большее число стоит левее меньшего. Число $t[j_1, j_2, \dots, j_n]$ указывает число инверсий в перестановке.

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Рассмотрим квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1 *Определителем* n -го порядка называется алгебраическая сумма произведений вида $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$, где элементы $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ матрицы A взяты по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Знак перед произведением ставится «+», если число инверсий в перестановке из чисел $j_1, j_2, \dots, j_n$ является чётным, а знак «-», если число инверсий в этой перестановке является нечётным.

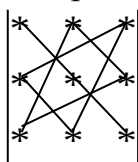
$$|A| = \det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\text{перестановки} \\ (j_1, j_2, \dots, j_n)}} (-1)^{t[j_1, j_2, \dots, j_n]} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}.$$

Определитель второго порядка равен числу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

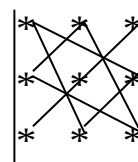
Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника или правилу Саррюса.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Схематическая запись правила треугольника имеет вид:



"+"



"-"

Со знаком «+» выбираем произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «-» выбираем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, и произведение элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями параллельными побочной диагонали.

Пример 1 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель по правилу треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 11 \cdot 1 - 1 \cdot 8 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 4 - 5 \cdot 11 \cdot 1 = 2.$$

Приведём основные свойства определителей:

1) $|A^T| = |A|$;

2) если определитель содержит нулевую строку, то его значение равно нулю;

3) если в определителе имеются две равные строки, то его значение равно нулю;

4) если строка (столбец) определителя представляет собой линейную комбинацию других строк (столбцов), то его значение равно нулю;

5) если в определителе поменять местами две строки (столбца), то значение определителя изменит знак на противоположный;

6) постоянный множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя;

7) если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующая строка (столбец) состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых слагаемых;

8) значение определителя не изменится, если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на одно и то же произвольное число, отличное от нуля;

$$9) |A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Определение 2 *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из определителя n -го порядка, путём вычёркивания i -ой строки и j -го столбца.

Определение 3 *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема о разложении определителя по строке (столбцу). Значение определителя равно алгебраической сумме произведений элементов строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Вычисление значения определителя путём разложения по i -ой строке:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}.$$

Вычисление значения определителя путём разложения по j -у столбцу:

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Пример 2 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ путём

разложения по второй строке.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \\ &+ 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-29) + 2 \cdot (-54) - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 21 = 61. \end{aligned}$$

Определение 4 Матрица называется *невыврожденной*, если её определитель отличен от нуля.

Определение 5 Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A , если существуют произведения матриц $A^{-1} \cdot A$ и $A \cdot A^{-1}$, которые равны между собой и равны единичной матрице, то есть $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Обратная матрица существует только у невырожденных квадратных матриц и имеет ту же размерность, что и сама матрица.

Для матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1} , которую

находим по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$

Матрица C называется союзной или присоединённой, её элементами являются алгебраические дополнения транспонированной матрицы A^T .

Пример 3 Найти обратную матрицу к матрице, заданной в примере 1.

Решение. Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$ найден в примере 1, и

равен $|A| = 2$. Найдём алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -23, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -9, & A_{31} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 17, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -5, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -23 & -9 & 17 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,5 & -4,5 & 8,5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2,5 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

14 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ

Определение 1 Рангом матрицы A называется число $r = \text{rang}A$, которое равно наивысшему порядку минора, отличному от нуля.

Свойства ранга матрицы:

- 1) $0 \leq \text{rang}A \leq \min(m; n)$ где m, n – число строк и столбцов матрицы;
- 2) $\text{rang}A^T = \text{rang}A$;
- 3) элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы;
- 4) если все возможные миноры k -го порядка равны нулю, то все миноры более высокого порядка также равны нулю.

К элементарным преобразованиям относятся:

- а) перестановка строк (столбцов) матрицы;
- б) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
- с) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к ней соответствующих элементов другой строки (столбца).

Строка (столбец) матрицы назовём линейно-независимой, если её (его) нельзя представить в виде линейной комбинации остальных строк (столбцов).

Определение 2 Минор называется базисным, если он отличен от нуля и его порядок совпадает с рангом матрицы.

Теорема о базисном миноре. Базисные строки (столбцы) матрицы, которые соответствуют её базисному минору, являются линейно-независимыми, а любые строки (столбцы) матрицы, которые не входят в базисный минор, являются линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Ранг матрицы находится либо *методом окаймляющих миноров*, либо *методом элементарных преобразований*, которые не изменяют ранга матрицы.

При вычислении ранга матрицы методом окаймляющих миноров переходим последовательно от миноров низшего порядка к минорам более высокого порядка. Если найден минор M , который имеет порядок k и при этом отличен от нуля, то необходимо вычислить миноры $k+1$ порядка, окаймляющие минор M , то есть содержащие его в качестве минора. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен числу k . При вычислении ранга матрицы методом элементарных преобразований приводим матрицу к трапецеидальному виду, вычёркивая нулевые строки (столбцы). Преобразования проводим либо только над строками, либо только над столбцами. Ранг матрицы равен числу линейно-независимых строк (столбцов).

Пример 1 Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$M_1^1 = 3 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = 0, M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 6 = 9 \neq 0,$$

$$M_{123}^{134} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 - 4 \cdot 7 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 5 \cdot 3 = 0,$$

$$M_{123}^{135} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 7 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 = 0.$$

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений.

[illegible]

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – основная матрица системы; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-

столбец свободных членов; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных;

$$A^* = A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) - \text{расширенная матрица системы.}$$

Если столбец свободных членов ненулевой, то система называется неоднородной. Если столбец свободных членов нулевой, то система называется *однородной* и в матричной форме записи имеет вид: $AX = O$.

Матрица $X^0 = (x_1^0 \ x_2^0 \ \dots \ x_n^0)^T$ называется решением системы линейных алгебраических уравнений, если при подстановке значений $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ все уравнения системы обращаются в тождества. Решить систему означает найти все её решения.

Определение 3 Система линейных алгебраических уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Теорема Кронекера – Капелли. Для того чтобы система линейных алгебраических уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы и ранг расширенной матрицы этой системы были равны, то есть $\text{rang} A = \text{rang } A|B$.

Рассмотрим решение систем с невырожденной основной матрицей системы.

Теорема 1 Если определитель основной матрицы системы отличен от нуля ($\det A \neq 0$), то система совместна и имеет единственное решение.

Это решение можно найти различными методами.

1. Матричный метод. Пусть система линейных алгебраических уравнений записана в матричном виде $AX = B$. Из данного матричного уравнения получаем решение системы в виде: $X = A^{-1}B$.

Пример 1 Исследовать на совместность систему линейных алгебраических уравнений и в случае совместности решить систему матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 25, \\ 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 27. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим основную матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$. Так

как определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 50 + 11 - 16 - 20 - 55 = 2 \neq 0$, то, согласно

теореме 1, система совместна и имеет единственное решение. Решим систему средствами матричного исчисления по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Найдём обратную матрицу A^{-1} для матрицы A , для чего вычислим алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -23, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -9, & A_{31} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 17, \\
A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4, \\
A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -5, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3.
\end{aligned}$$

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -23 & -9 & 17 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определим решение системы алгебраических уравнений.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -23 & -9 & 17 \\ 6 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 27 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -23 \cdot 10 - 9 \cdot 25 + 17 \cdot 27 \\ 6 \cdot 10 + 2 \cdot 25 - 4 \cdot 27 \\ -5 \cdot 10 - 1 \cdot 25 + 3 \cdot 27 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение системы имеет вид: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

2. Метод Крамера: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$,

где Δ – определитель основной матрицы системы, Δ_j – определитель, полученный путём замены j -го столбца столбцом свободных членов.

Пример 2 Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность и в случае совместности решить её по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & -2 & 3 & 12 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right). \text{ Найдём ранг основной и расширенной матрицы системы.}$$

$$M_1^1 = 2 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Ранг основной матрицы A равен $\text{rang} A = 3$. Так как для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, а более высокого порядка минор не существует, то ранг расширенной матрицы равен $\text{rang} A|B = 3$. Следовательно, $\text{rang} A|B = \text{rang} A = 3 = n$, то есть система совместна и имеет единственное решение. Решим систему по формулам Крамера: $\Delta = M_{123}^{123} = 4$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -3 & 4 \\ 12 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 4 \\ 3 & 12 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 3 & -2 & 12 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 20.$$

Решение системы уравнений: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{20}{4} = 5$.

Пример 3 Исследовать на совместность систему линейных алгебраических уравнений и в случае совместности решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 7x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -5 & 6 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{array} \right). \text{ Найдём ранг основной и расширенной матрицы системы.}$$

$$M_1^1 = 3 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг основной матрицы A равен $\text{rang} A = 2$. Так как для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, но при этом существует минор

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -9 \neq 0, \text{ то ранг расширенной матрицы равен } rangA|B = 3.$$

Так как $rangA|B \neq rangA$, то система несовместна, то есть не имеет решения.

3. Метод Гаусса. Суть данного метода состоит в приведении расширенной матрицы системы к трапецеидальному виду путём элементарных преобразований над строками (столбцами) матрицы. После этой операции от полученной новой расширенной матрицы переходим к системе уравнений. Из последнего n -го уравнения находим значение переменной x_n и подставляем его в $(n-1)$ -е уравнение, из которого определяем x_{n-1} . Продолжая аналогичный процесс из первого уравнения, находим x_1 .

Пример 4 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 5, \\ 6x_1 + 5x_2 = 12. \end{cases}$$

Решение. Приведём расширенную матрицу системы к трапецеидальному виду путём элементарных преобразований.

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 0 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -4(I)+(II) \\ -6(I)+(III) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} -4(I)+(II) \\ -6(I)+(III) \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & -4 & -15 & 15 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{4(II)+(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -43 & 43 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{43}(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} 7(III)+(II) \\ -\frac{5}{2}(III)+(I) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 7(III)+(II) \\ -\frac{5}{2}(III)+(I) \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{3}{2}(II)+(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

На основании метода элементарных преобразований получаем равенство рангов основной и расширенной матрицы системы: $\text{rang}A = \text{rang}A|B = 3 = n$, следовательно, система совместна и имеет единственное решение. От преобразованной расширенной матрицы системы переходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 &= 2, \\ x_2 &= 0, \\ x_3 &= -1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем решение системы $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

15 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений.

1. $\text{rang} A \neq \text{rang} A|B$, система несовместна, то есть не имеет решения.

2. $\text{rang} A = \text{rang} A|B = n \leq m$, где n – число неизвестных, а m – число уравнений в системе. Система совместна и имеет единственное решение. Для её решения определяем базисный минор. На основании теоремы о базисном миноре, строки не входящие в базисный минор, можно вычеркнуть. В результате приходим к равносильной системе, которая содержит n неизвестных и n уравнений, причём определитель основной матрицы этой системы отличен от нуля, как базисный минор, а такая система имеет единственное решение. Полученную систему можно решить любым из вышерассмотренных методов.

3. $\text{rang} A = \text{rang} A|B = r < n$, система совместна и имеет бесконечное множество решений. Для решения системы определяем базисный минор. В системе оставляем только те уравнения, коэффициенты при неизвестных в которых входят в базисный минор. Слагаемые с переменными в полученной системе, коэффициенты при неизвестных, при которых не входят в базисный минор, в каждом из уравнений переносим в правую часть. В результате приходим к системе с определителем основной матрицы, отличным от нуля. Полученную систему можно решить матричным методом, по формулам Крамера или методом Гаусса. Решение системы будет зависеть от переменных, коэффициенты при которых не входили в базисный минор, а они могут принимать произвольные значения. Поэтому система будет иметь бесконечное множество решений.

Пример 1 Исследовать систему на совместность и в случае совместности найти общее решение.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 - 8x_2 + 15x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 4 & -8 & 15 & 2 \\ 3 & -6 & 12 & -1 \end{array} \right). \text{ Найдём ранг основной и расширенной матриц системы}$$

линейных алгебраических уравнений методом окаймляющих миноров.

$$M_1^1 = 1 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0, M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 3.$$

Ранг основной матрицы A равен $\text{rang} A = 2$. Для расширенной матрицы системы миноры остаются те же, но существует ещё один минор

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 15 & 2 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ следовательно, ранг расширенной матрицы равен}$$

$\text{rang} A|B = 3$. Таким образом, $\text{rang} A|B = \text{rang} A = 2 < n = 3$, то есть система совместна и имеет бесконечное множество решений. Переменные x_1, x_3 являются базисными переменными, а переменная $x_2 = c$ – свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3 + 2c, \\ 4x_1 + 15x_3 = 2 + 8c, \end{cases} \Delta = 3, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 + 2c & 3 \\ 2 + 8c & 15 \end{vmatrix} = 39 + 24c, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 + 2c \\ 4 & 2 + 8c \end{vmatrix} = -10,$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 13 + 8c, x_3 = \Delta_2 / \Delta = -10/3, X_{o.n} = (13 + 8c \quad c \quad -10/3)^T, \text{ где } c \in \mathbf{R}.$$

Рассмотрим решение однородных систем линейных алгебраических уравнений $AX = O$. Однородная система всегда совместна, так как она имеет, по крайней мере, нулевое решение.

Теорема 1 Если определитель матрицы однородной системы отличен от нуля, то система имеет единственное нулевое решение.

Пример 2 Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель матрицы системы $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -273 \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение.

Теорема 2 Если определитель матрицы однородной системы равен нулю, то система имеет бесконечное множество решений.

Если определитель матрицы однородной системы равен нулю, то ранг матрицы r будет меньше числа неизвестных n . Решение проводим аналогично третьему случаю решения произвольных систем. Переменные, коэффициенты перед которыми входят в базисный минор, называются базисными переменными, а остальные $(n-r)$ переменные называются свободными. Придав свободным переменным $(n-r)$ раз произвольные значения, будем получать различные системы, решения которых линейно независимы. Наиболее часто одной свободной переменной поочерёдно придают значение, равное 1, а все остальные приравнивают к 0. В результате получим $(n-r)$ линейно независимые решения $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$.

Определение 1 Любая совокупность линейно независимых решений однородной системы линейных алгебраических уравнений называется фундаментальной системой решений.

Теорема 3 Общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений представляет собой линейную комбинацию фундаментальной системы решений, то есть $X_{o.o} = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \dots + c_{n-r} E_{n-r}$, где $c_1, \dots, c_{n-r} \in R$.

Теорема 4 Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и произвольного частного решения неоднородной системы: $X_{o.n} = X_{o.o} + X_{ч.n}$.

Пример 4 Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель матрицы системы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$, то

система имеет бесконечное множество решений. В качестве базисного минора выбираем минор $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Переменные x_1, x_2 являются базисными переменными, а переменная $x_3 = c$ — свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_3 = 5c, \\ 2x_1 + 9x_3 = -5c, \end{array} \right. \Delta = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5c & 4 \\ -5c & 9 \end{vmatrix} = 65c, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5c \\ 2 & -5c \end{vmatrix} = -15c,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 65c, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -15c, X_{o,H} = \begin{pmatrix} 65c \\ -15c \\ c \end{pmatrix}, \text{ где } c \in \mathbf{R}.$$