

ЛИНЕЙНЫЕ (ВЕКТОРНЫЕ) ПРОСТРАНСТВА

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Рассмотрим множество $\mathbf{R}^n$, элементы которого представляют упорядоченную совокупность n действительных чисел $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, то есть множество $\mathbf{R}^n$ имеет вид: $\{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid x_i \in R \wedge i = \overline{1; n}\}$. Над элементами множества $\mathbf{R}^n$ определены операции сложения векторов $\vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n)$ и умножения на действительное число $\alpha \odot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} = (\alpha \cdot x_1; \alpha \cdot x_2; \dots; \alpha \cdot x_n)$. Доказать, что пространство $\mathbf{R}^n$ является линейным пространством.

Решение. Операции сложения и умножения вектора на действительное число определены, так как $\vec{x} \oplus \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ и $\alpha \odot \vec{x} = (\alpha x_1; \alpha x_2; \dots; \alpha x_n) \in \mathbf{R}^n$. Проверим выполнение аксиом векторного пространства.

1) $\vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n) = (y_1 + x_1; y_2 + x_2; \dots; y_n + x_n) = \vec{y} \oplus \vec{x}$.

2) $\vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}) = (x_1; x_2; \dots; x_n) \oplus (y_1 + z_1; y_2 + z_2; \dots; y_n + z_n) = (x_1 + (y_1 + z_1); x_2 + (y_2 + z_2); \dots; x_n + (y_n + z_n)) = ((x_1 + y_1) + z_1; \dots; (x_n + y_n) + z_n) = (\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z}$.

3) в качестве нейтрального элемента выбираем нулевой вектор $\vec{o} = (0; 0; \dots; 0)$: $\vec{x} \oplus \vec{o} = (x_1; \dots; x_n) \oplus (0; \dots; 0) = (x_1 + 0; \dots; x_n + 0) = (x_1; \dots; x_n) = \vec{x}$.

4) противоположным элементом к $\vec{x}$ является вектор $-\vec{x} = (-x_1; \dots; -x_n)$, так как $\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = (x_1; \dots; x_n) \oplus (-x_1; \dots; -x_n) = (x_1 - x_1; \dots; x_n - x_n) = (0; \dots; 0) = \vec{o}$.

5) $1 \odot \vec{x} = (1 \cdot x_1; 1 \cdot x_2; \dots; 1 \cdot x_n) = (x_1; x_2; \dots; x_n) = \vec{x}$.

6) $(\alpha \cdot \beta) \odot \vec{x} = (\alpha \cdot \beta) \odot (x_1; \dots; x_n) = ((\alpha \cdot \beta) x_1; \dots; (\alpha \cdot \beta) x_n) = (\alpha \cdot (\beta \cdot x_1); \dots; \alpha \cdot (\beta \cdot x_n)) = \alpha \odot (\beta \odot (x_1; \dots; x_n)) = \alpha \odot (\beta \odot \vec{x})$

7) $(\alpha \oplus \beta) \odot \vec{x} = (\alpha + \beta) \odot (x_1; \dots; x_n) = ((\alpha + \beta) \cdot x_1; \dots; (\alpha + \beta) \cdot x_n) = (\alpha \cdot x_1; \dots; \alpha \cdot x_n) + (\beta \cdot x_1; \dots; \beta \cdot x_n) = \alpha \odot (x_1; \dots; x_n) + \beta \odot (x_1; \dots; x_n) = \alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{x}$

8) $\alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \alpha \odot (x_1 + y_1; \dots; x_n + y_n) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot y_1; \dots; \alpha \cdot x_n + \alpha \cdot y_n) = \alpha \odot (x_1; \dots; x_n) + \alpha \odot (y_1; \dots; y_n) = \alpha \odot \vec{x} \oplus \alpha \odot \vec{y}$.

Все аксиомы векторного пространства выполнены. Следовательно, заданное множество $\mathbf{R}^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid x_i \in R \wedge i = \overline{1; n}\}$ является векторным или линейным пространством.

1.2.2 На множестве положительных действительных чисел $R^+ = \{\vec{x} \mid \vec{x} = x \wedge x \in R \wedge x > 0\}$ определены операции сложения и умножения на действительное число: $\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y$, $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha$. Образует ли векторное пространство заданное множество?

Решение. Операции сложения и умножения вектора на действительное число определены, так как $\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y > 0$ и $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha > 0$, то есть $\vec{x} \oplus \vec{y} \in R^+$, $\alpha \odot \vec{x} \in R^+$. Проверим выполнение аксиом векторного пространства.

1) $\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y = y \cdot x = \vec{y} \oplus \vec{x}$;

$$2) \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}) = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = (\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z};$$

3) в качестве нейтрального элемента выбираем нулевой вектор $\vec{o} = 1$:

$$\vec{x} \oplus \vec{o} = x \cdot 1 = x = \vec{x};$$

4) противоположным элементом к вектору $\vec{x}$ является вектор $-\vec{x} = x^{-1}$, так как $\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = x \cdot x^{-1} = 1 = \vec{o}$;

$$5) 1 \odot \vec{x} = x^1 = x = \vec{x};$$

$$6) (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{x} = x^{\alpha \cdot \beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \cdot (\beta \odot \vec{x});$$

$$7) (\alpha \oplus \beta) \odot \vec{x} = (\alpha + \beta) \odot \vec{x} = x^{\alpha + \beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = \alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{x};$$

$$8) \alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = (x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha = \alpha \odot \vec{x} + \alpha \odot \vec{y}.$$

Все аксиомы векторного пространства выполнены. Следовательно, заданное множество $R^+ = \{\vec{x} \mid \vec{x} = x \wedge x \in R \wedge x > 0\}$ является векторным или линейным пространством.

1.2.3 Исследовать на линейную зависимость систему векторов e^x , $\text{sh } x$, $\text{ch } x$ на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.1.1) нахождения вронскиана:

$$W(x) = W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & \text{sh } x & \text{ch } x \\ e^x & \text{ch } x & \text{sh } x \\ e^x & \text{sh } x & \text{ch } x \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель равен нулю, так как первая и третья строки совпадают. По теореме 1.1.1 заданная система функций является линейно зависимой.

1.2.4 Доказать, что векторы $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{e}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = -2\vec{i} + \vec{k}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{x} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ в новом базисе.

Решение. Для доказательства того, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ образуют базис необходимо показать, что смешанное произведение этих векторов отлично от нуля.

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 10 + 18 = 5 \neq 0.$$

Смешанное произведение векторов отлично от нуля, то есть векторы линейно независимы, а, следовательно, образуют базис. Тогда вектор $\vec{x}$ выражается через новые базисные векторы. Для определения координат вектора воспользуемся формулой (1.1.2). Запишем матрицу перехода $T = T_{B \rightarrow B'}$ от базиса $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ к базису $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, столбцы которой представляют координаты новых базисных векторов в первоначальном базисе:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу для матрицы перехода. Так как определители транспонированной матрицы и самой матрицы равны, то $|T| = \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 5$. Находим алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned} T_{11} &= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & T_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, & T_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \\ T_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2, & T_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5, & T_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \\ T_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, & T_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, & T_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5. \end{aligned}$$

Обратная матрица T^{-1} к матрице перехода имеет вид

$$T^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ -2 & -5 & -4 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения координат вектора воспользуемся формулой (1.1.2).

$$X' = T^{-1} \cdot X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ -2 & -5 & -4 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\vec{x} = (-1; 0; 1) = -\vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

1.2.5 Доказать, что система функций $y_1 = 1, y_2 = \sin x, y_3 = \cos x$ образует базис линейного пространства L^3 . Найти координаты функции $y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ в этом базисе.

Решение. Воспользуемся формулой (1.1.1) нахождения вронскиана:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

По теореме 1.1.1 заданная система функций является линейно независимой, а, следовательно, образует базис линейного пространства. Найдём координаты функции $y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ в заданном базисе, для этого разложим заданную функцию по базисным векторам:

$$\begin{aligned} 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5 &= 2 \cdot \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \right) - 5 = 2 \cdot \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right) - 3 = \\ &= -3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = -3 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ в базисе $B = \{1; \sin x; \cos x\}$

имеет координаты $\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1. Из предположения, что на заданном множестве задана сумма $\vec{x} + \vec{y}$ двух элементов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а также произведение $\alpha \cdot \vec{x}$ произвольного элемента $\vec{x}$ этого множества на любое действительное число α , определить, образует ли данное пространство векторное (линейное) пространство.

1.3.1.1 Множество всех отрицательных действительных чисел: сумма равна $-|x| \cdot |y|$, произведение равно $-|x|^\alpha$.

1.3.1.2 Множество $Q_n(x)$ всех многочленов $q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ степени n с естественным образом введенными операциями сложения и умножения их на действительное число.

1.3.1.3 Множество $P_n(x)$ всех многочленов $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ степени $\leq n$ с естественным образом введенными операциями сложения и умножения их на действительное число.

1.3.2. Доказать, что три геометрических вектора $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ в этом базисе.

1.3.3. Доказать, что система многочленов $t^3 + t^2 + t + 1$, $t^2 + t + 1$, $t + 1$, 1 пространства P_4 линейно независима.

1.3.4. Доказать, что система многочленов $t^2 + 1$, $-t^2 + 2t$, $t^2 - t$ образует базис в пространстве P_3 . Найти координаты многочлена $-2t^2 + t - 1$ в этом базисе.

1.3.5. Найти координаты многочлена $t^2 - t + 2$ в базисе 1 , $t - 1$, $(t - 1)^2$.

1.3.6. Доказать, что система функций $\sin 2x$, $\cos 2x$, 1 образует базис трёхмерного пространства. Найти в этом базисе столбец координат функции $4\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Из предположения, что на заданном множестве задана сумма $\vec{x} + \vec{y}$ двух элементов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а также произведение $\alpha \cdot \vec{x}$ произвольного элемента $\vec{x}$ этого множества на любое действительное число α , определить, образует ли данное пространство векторное (линейное) пространство.

1.4.1.1 Множество целых чисел: сумма $x + y$, произведение $[\alpha \cdot x]$.

1.4.1.2 Множество геометрических векторов на плоскости, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.3 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной единице, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.4 Множество геометрических векторов на плоскости, являющихся линейной комбинацией двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.5 Множество симметрических матриц, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.6 Множество всех действительных чисел: сумма $x + y$, произведение $\alpha \cdot x$.

1.4.1.7 Множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.8 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной двум, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.9 Множество матриц размерности 2×2 , для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.10 Множество всех действительных чисел: сумма $x \cdot y$, произведение x^α .

1.4.1.11 Множество геометрических векторов на плоскости, лежащих на одной оси, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.12 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной трём, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.13 Множество всех непрерывных функций, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.14 Множество матриц размерности 3×3 , для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.15 Множество всех действительных отрицательных чисел: сумма $-|x \cdot y|$, произведение $-|x|^\alpha$.

1.4.1.16 Множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, лежащих на одной оси, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.17 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной четырём, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.18 Множество всех линейных функций, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.19 Множество невырожденных матриц, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.20 Множество всех действительных положительных чисел: сумма $x \cdot y$, произведение x^α .

1.4.1.21 Множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, лежащих в одной плоскости, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.22 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной натуральному числу $n-1$, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.23 Множество диагональных матриц, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.24 Множество всех чётных функций, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.25 Множество рациональных чисел: сумма $x + y$, произведение $[\alpha \cdot x]$.

1.4.1.26 Множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, являющихся линейной комбинацией трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.27 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной натуральному числу n , для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.28 Множество всех нечётных функций, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.29 Множество всех квадратичных функций, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.30 Множество прямоугольных матриц, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.2 Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

1.4.2.1 $\cos x, \sin x, \sin 2x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **1.4.2.2** e^x, e^{2x}, e^{3x} на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.3 $\cos x, \sin x, 1$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **1.4.2.4** $1, x, \sin x$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.5 $\cos 2x, 1, \sin 2x$ на $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. **1.4.2.6** $x, x^2, (1+x)^2$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.7 $1, \cos 3x, \sin 3x$ на $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$. **1.4.2.8** e^x, e^{-x}, e^{2x} на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.9 $\cos 4x, 1, \sin 4x$ на $\left(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right)$. **1.4.2.10** $1, e^x, \operatorname{sh} x$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.11 $\sin 2x, \cos x, \sin x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **1.4.2.12** $\frac{1}{x}, x, 1$ на $(0; 1)$.

1.4.2.13 $1, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ на $(-\infty; \infty)$. **1.4.2.14** $x, (1+x)^2, 1+x$ на $(-\infty; \infty)$.

- 1.4.2.15 $4, \operatorname{sh} 5x, \operatorname{ch} 4x$ на $(-\infty; \infty)$. 1.4.2.16 e^{4x}, e^{3x}, e^{2x} на $(-\infty; \infty)$.
- 1.4.2.17 $\cos x, \sin 2x, \sin x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. 1.4.2.18 $1, x, x^2$ на $(-\infty; \infty)$.
- 1.4.2.19 $\cos x, 2, \sin x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. 1.4.2.20 e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x} на $(-\infty; \infty)$.
- 1.4.2.21 $\sin 2x, \cos 2x, 4$ на $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. 1.4.2.22 $1, x^2, x^3$ на $(-\infty; \infty)$.
- 1.4.2.23 $\cos 3x, 4, \sin 3x$ на $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$. 1.4.2.24 e^{2x}, e^{4x}, e^{-x} на $(-\infty; \infty)$.
- 1.4.2.25 $2, \cos 4x, \sin 4x$ на $\left(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right)$. 1.4.2.26 x, x^2, x^3 на $(-\infty; \infty)$.
- 1.4.2.27 $1, \operatorname{sh} 2x, \operatorname{ch} 2x$ на $(-\infty; \infty)$. 1.4.2.28 $2e^x, 3e^{2x}, -e^{-x}$ на $(-\infty; \infty)$.
- 1.4.2.29 $1, \operatorname{ch} 3x, \operatorname{sh} 3x$ на $(-\infty; \infty)$. 1.4.2.30 $\cos x, \sin x, 5$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

2.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Пусть задан вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$ в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$. Исследовать на линейность указанные преобразования:

$$\hat{A}\vec{x} = (x_1^2 + 3x_2; x_2 + x_3; x_3 - x_1);$$

$$\hat{B}\vec{x} = (x_2 - x_3; x_3 - x_1; x_1 - 2);$$

$$\hat{C}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3).$$

В случае линейности найти матрицу линейного оператора.

Решение. Для доказательства линейности отображения воспользуемся определением 2.1.1.

$$\hat{A}(\alpha\vec{x}) = (\alpha^2 x_1^2 + 3\alpha x_2; \alpha x_2 + \alpha x_3; \alpha x_3 - \alpha x_1) = \alpha \cdot (\alpha x_1^2 + 3x_2; x_2 + x_3; x_3 - x_1) \neq \alpha \cdot \hat{A}\vec{x}.$$

Так как не выполняется условие определения линейного оператора, то преобразование не является линейным оператором.

$$\hat{B}(\alpha\vec{x}) = (\alpha x_2 - \alpha x_3; \alpha x_3 - \alpha x_1; \alpha x_1 - 2) = \alpha \cdot (x_2 - x_3; x_3 - x_1; x_1 - 2/\alpha) \neq \alpha \cdot \hat{B}\vec{x}.$$

Данное преобразование не является линейным оператором.

$$\begin{aligned}\hat{C}(\alpha\vec{x}) &= (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - 3\alpha x_3; 2\alpha x_1 - 3\alpha x_2 + 4\alpha x_3; 3\alpha x_1 + 4\alpha x_2 - 5\alpha x_3) = \\ &= \alpha \cdot (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3) = \alpha \cdot \hat{C}\vec{x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{C}(\vec{x} + \vec{y}) &= ((x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3); 2(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) + 4(x_3 + y_3); \\ &3(x_1 + y_1) + 4(x_2 + y_2) - 5(x_3 + y_3)) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3) + \\ &+ (y_1 + 2y_2 - 3y_3; 2y_1 - 3y_2 + 4y_3; 3y_1 + 4y_2 - 5y_3) = \hat{C}\vec{x} + \hat{C}\vec{y}.\end{aligned}$$

Все условия линейности отображения выполнены, а, следовательно, данное преобразование является линейным оператором. Найдём матрицу линейного оператора, для чего подействуем оператором на базисные векторы $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$ и $\vec{k}(0; 0; 1)$. Координаты новых векторов, записанные в столбец, будут образовывать матрицу линейного оператора $\hat{C}$.

$$\hat{C}\vec{i} = (1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0; 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0; 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0) = (1; 2; 3);$$

$$\hat{C}\vec{j} = (0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0; 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0; 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = (2; -3; 4);$$

$$\hat{C}\vec{k} = (0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1; 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1; 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1) = (-3; 4; -5).$$

Матрица линейного оператора $\hat{C}$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

3.2.1 Доказать, что в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ оператор ортогонального проектирования $\hat{P}_\pi$ на плоскость $\pi: x + y + z = 1$ является линейным. Найти матрицу, образ и ядро линейного оператора. Определить матрицу линейного

оператора проектирования $\hat{P}_\pi$ в базисе $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, если известно разложение новых базисных векторов базиса B' в базисе B : $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - 2\vec{k}$.

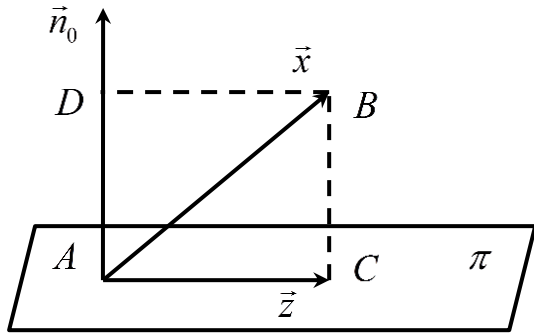


Рисунок 2.2.1 – Проекция вектор на плоскость

Решение. Оператор проектирования на плоскость π определяется равенством $\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{z}$, где вектор $\vec{z} = \overrightarrow{AC}$ – ортогональная проекция вектора $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ на заданную плоскость $\pi: x + y + z = 1$ (рисунок 2.2.1). Выразим вектор $\vec{z}$ через заданный вектор $\vec{x}$ и единичный

нормальный вектор $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(1; 1; 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ плоскости π .

$$\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{z} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \vec{x} - \overrightarrow{pr}_{\vec{n}_0} \vec{x} = \vec{x} - pr_{\vec{n}_0} \vec{x} \cdot \vec{n}_0 = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0.$$

Таким образом, формула нахождения оператора проектирования $\hat{P}_\pi$ вектора $\vec{x}$ на плоскость π имеет вид

$$\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0.$$

Докажем линейность преобразования проектирования на плоскость.

$$\hat{P}_\pi (\alpha \vec{x}) = \alpha \vec{x} - (\alpha \vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0 = \alpha \cdot (\vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0) = \alpha \cdot \hat{P}_\pi \vec{x}.$$

$$\hat{P}_\pi (\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{x} + \vec{y}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0 = (\vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0) + (\vec{y} - (\vec{y}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0) = \hat{P}_\pi \vec{x} + \hat{P}_\pi \vec{y}.$$

Все условия линейности отображения выполнены (определение 2.1.1), а, следовательно, данное преобразование проектирования на плоскость линейным оператором. Найдём матрицу линейного оператора, для чего подействуем оператором на базисные векторы $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$ и $\vec{k}(0; 0; 1)$. Координаты новых векторов, записанные в столбец, будут образовывать матрицу P_π линейного оператора проектирования $\hat{P}_\pi$ на плоскость π .

$$\hat{P}_\pi \vec{i} = \vec{i} - (\vec{i}, \vec{n}_0) \vec{n}_0 = (1; 0; 0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (1; 0; 0) - \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right).$$

$$\hat{P}_\pi \vec{j} = \vec{j} - (\vec{j}, \vec{n}_0) \vec{n}_0 = (0; 1; 0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (0; 1; 0) - \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right).$$

$$\hat{P}_\pi \vec{k} = \vec{k} - (\vec{k}, \vec{n}_0) \vec{n}_0 = (0; 0; 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (0; 0; 1) - \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Матрица линейного оператора P_π имеет вид

$$P_{\pi} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Найдём образ линейного оператора. Так как матрица P_{π} линейного оператора $\hat{P}_{\pi}$ полностью определяет образ $\text{Im } \hat{P}_{\pi}$ оператора проектирования на плоскость $\pi: x + y + z = 1$, то вектор $\vec{z} \in \text{Im } \hat{P}_{\pi}$ будет иметь координаты

$$\vec{z} = P_{\pi} \vec{x} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix}, \text{ где } x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}.$$

$$\text{Im } P_{\pi} = \left\{ \vec{z} \mid \vec{z} = \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3; -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3; -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \right), \vec{z} \in \pi \right\}$$

Определим ядро линейного оператора $\text{Ker } \hat{P}_{\pi}$ из системы $P_{\pi} \cdot X = 0$.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, то система имеет

бесконечное множество решений. В качестве базисного минора выбираем минор

$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Переменные x_1, x_2 являются базисными переменными, а

переменная $x_3 = c$ – свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = c, \\ -x_1 + 2x_2 = c, \end{cases} \quad \Delta = 3, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c & -1 \\ c & 2 \end{vmatrix} = 3c, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & c \\ -1 & c \end{vmatrix} = 3c,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = c, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = c, \quad X = (c \quad c \quad c)^T, \text{ где } c \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, ядро линейного оператора $\hat{P}_{\pi}$ представляет собой множество векторов $\text{Ker } \hat{P}_{\pi} = \{ \vec{x} \mid \vec{x} = (c; c; c), c \in \mathbf{R} \}$.

Этот же результат можно получить из геометрических соображений. По определению ядра линейного оператора проектирования на плоскость, геометрический вектор отображается в нулевой вектор, а, следовательно, вектор перпендикулярен плоскости или коллинеарен нормальному вектору. Но коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, то есть $\vec{x} = (c; c; c)$, где $c \in \mathbf{R}$.

Найдём матрицу P'_π линейного оператора $\hat{P}_\pi$ в базисе $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, если матрица P_π в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ найдена выше и известно разложение базисных векторов базиса B' по векторам базиса B : $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - 2\vec{k}$.

Используя формулу (2.1.1), получаем формулу нахождения матрицы линейного оператора проектирования на плоскость в новом базисе:

$$P'_\pi = T^{-1} \cdot P_\pi \cdot T,$$

где T – матрица перехода от базиса B к базису B' .

Запишем матрицу перехода $T = T_{B \rightarrow B'}$ от базиса $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ к базису $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, столбцы которой представляют координаты новых базисных векторов в первоначальном базисе:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу для матрицы перехода, для чего вычисляем её определитель $|T| = 2$ и алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned} T_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2, & T_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, & T_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \\ T_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, & T_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, & T_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \\ T_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & T_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, & T_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Обратная матрица T^{-1} к матрице перехода имеет вид

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$P'_\pi = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 \\ -12 & -6 & 4 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/6 \\ -2 & -1 & 2/3 \\ -3/2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного оператора в новом базисе имеет вид

$$P'_{\pi} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/6 \\ -2 & -1 & 2/3 \\ -3/2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

3.2.1 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ линейного оператора } \hat{A}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $|A - \lambda \cdot E| = 0$, решения которого являются собственными значениями матрицы A линейного оператора $\hat{A}$.

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 3 & 1 \\ 3 & 0 - \lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В результате получаем уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0$, решая которое, находим собственные значения линейного оператора $\hat{A}$: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 1$.

Для каждого собственного значения λ находим собственные векторы из системы:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $\lambda_1 = 3$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = -3 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

Таким образом, $\text{rang} A = 2$. При этом переменные x_1 и x_3 — базисные, так как они входят в базисный минор M_{12}^{13} , а $x_2 = c$ — свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -3c, \\ 3x_1 + x_3 = 3c. \end{cases}$$

Пусть $c=1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{13} = -6, \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-6} = 0$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_1 = 3$, имеет координаты:

$$E_1 = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } c \in R, c \neq 0.$$

Пусть $\lambda_2 = -3$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = 3 \neq 0, M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

Таким образом, $\text{rang} A = 2$. При этом переменные x_1 и x_2 — базисные, так как они входят в базисный минор M_{13}^{12} , а $x_3 = d$ — свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -d, \\ -2x_1 + 2x_2 = -4d. \end{cases}$$

Пусть $d=1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 = -4. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{13}^{12} = 12, \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 10, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -14.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{12} = -\frac{7}{6}$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_2 = -3$, имеет

координаты: $E_2 = d \cdot \begin{pmatrix} 5/6 \\ -7/6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5d/6 \\ -7d/6 \\ d \end{pmatrix}$, где $d \in R$, $d \neq 0$.

Пусть $\lambda_3 = 1$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = -1 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Таким образом, $\text{rang} A = 2$. При этом переменные x_1 и x_2 – базисные, так как они входят в базисный минор M_{12}^{12} , а $x_3 = m$ – свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -m, \\ 3x_1 - x_2 = -m. \end{cases}$$

Пусть $m = 1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -1, \\ 3x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{12} = -8, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_3 = 1$, имеет координаты:

$$E_3 = m \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m/2 \\ -m/2 \\ m \end{pmatrix}, \text{ где } m \in R, \quad m \neq 0.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

3.2.1 Доказать, что в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ зеркальное отображение $\hat{Z}_\pi$ относительно плоскости $\pi: 2x + 3y - 6z - 1 = 0$ является линейным оператором. Найти матрицу, образ и ядро линейного оператора $\hat{Z}_\pi$.

3.2.1 Доказать, что в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ ортогональное проектирование $\hat{P}_l$ на ось l с заданным единичным вектором $\vec{e}^0(3/13; -4/13; 12/13)$ является линейным оператором. Найти матрицу, образ и ядро линейного оператора $\hat{P}_l$.

3.2.1 Установить, какие из заданных отображений $\hat{A}$ пространства арифметических векторов $\mathbf{R}^3$ с базисом $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ являются линейными операторами. В случае линейности найти матрицу, область значений и ядро линейного оператора.

2.3..1 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 + x_2; 4x_2 + 5x_3)$.

2.3..2 $\hat{A}\vec{x} = (3x_1 - x_2 + x_3; 2x_1 + 3x_2 - 1; x_2^3 + 7x_3)$.

3.2.1 В базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ задан линейный оператор $\hat{A}$, матрица которого равна $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе

$B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, если $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

3.2.1 Написать матрицу линейного оператора проектирования $\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0$ на плоскость $\pi: 2x - 3z + 2 = 0$ в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$. Найти матрицу заданного оператора в базисе $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, если $\vec{e}_1 = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{k}$.

3.2.1 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы A линейного оператора $\hat{A}$.

2.3.6.1 $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

2.3.6.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.2.1 Проверить линейность, найти матрицу, образ и ядро отображения в пространства арифметических векторов $\mathbf{R}^3$ в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$.

2.4..1 Проектирования на плоскость $2x - 3y + 6z - 2 = 0$.

2.4..2 Проектирования на ось Oz .

2.4..3 Зеркального отображения относительно плоскости $3x + 4y = 1$.

- 2.4..4 Проектирования на плоскость $6x - 3y + 2z - 1 = 0$.
- 2.4..5 Проектирования на плоскость $3x + 4z - 5 = 0$.
- 2.4..6 Проектирования на ось Ox .
- 2.4..7 Зеркального отображения относительно плоскости $3x - 6y - 2z = 2$.
- 2.4..8 Проектирования на плоскость Oxz .
- 2.4..9 Проектирования на плоскость $2x + 6y + 3z - 5 = 0$.
- 2.4..10 Зеркального отображения относительно плоскости $3x + 6y - 2z = 2$.
- 2.4..11 Проектирования на ось Oy .
- 2.4..12 Проектирования на плоскость $12x - 4y + 3z - 9 = 0$.
- 2.4..13 Проектирования на плоскость $4x - 12y + 3z - 1 = 0$.
- 2.4..14 Зеркального отображения относительно плоскости $6x + 2y - 3z = 7$.
- 2.4..15 Проектирования на плоскость $4x + 12y + 3z - 6 = 0$.
- 2.4..16 Проектирования на плоскость Oyz .
- 2.4..17 Зеркального отображения относительно плоскости $2x + 6y - 3z = 8$.
- 2.4..18 Проектирования на ось l , с направляющим вектором $\vec{e}^0(0; 4; -3)$.
- 2.4..19 Проектирования на плоскость $3x + 4y + 12z - 1 = 0$.
- 2.4..20 Зеркального отображения относительно плоскости $3x + 4z = 2$.
- 2.4..21 Проектирования на плоскость $2x + 3y + 6z - 10 = 0$.
- 2.4..22 Проектирования на ось l , с направляющим вектором $\vec{e}^0(-3; 12; 4)$.
- 2.4..23 Зеркального отображения относительно плоскости $3y + 4z = 2$.
- 2.4..24 Проектирования на плоскость $4x + 3y + 12z - 11 = 0$.
- 2.4..25 Проектирования на ось l , с направляющим вектором $\vec{e}^0(3; 2; -6)$.
- 2.4..26 Зеркального отображения относительно плоскости $3y - 4z = 4$.
- 2.4..27 Проектирования на плоскость $-3x + 12y + 4z - 13 = 0$.
- 2.4..28 Проектирования на плоскость Oxy .
- 2.4..29 Зеркального отображения относительно плоскости $-3x + 4y = 7$.
- 2.4..30 Проектирования на ось l , с направляющим вектором $\vec{e}^0(8; 0; -6)$.

3.2.1 В базисе $B = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ задано отображение $\hat{A}$. Доказать, что отображение является линейным оператором и записать его матрицу в заданном базисе. Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $B' = \{\vec{e}'_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3\}$, если известны координаты базисных векторов базиса B' в базисе B . Определить координаты вектора $\vec{x}$ в базисе B' , если известны его координаты в базисе B .

- 2.4..1 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 6x_3; x_1 - 7x_2 + 6x_3; x_1 + 5x_2 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3; \vec{x} = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$
- 2.4..2 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 + 4x_2 - 3x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; 7x_1 + 8x_2 + 5x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$
- 2.4..3 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 + x_2 - x_3; x_1 + 3x_2 - x_3; 4x_1 + x_2 - x_3);$

$$\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 8\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

$$2.4..4 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; x_1 - x_2 + 4x_3; x_1 - x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3.$$

$$2.4..5 \quad \hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 5x_2 - 4x_3; x_1 - x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 3x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

$$2.4..6 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3; x_1 + x_2 - 2x_3; x_1 + x_2 - x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = 11\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3.$$

$$2.4..7 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3; 3x_1 + x_2 - 3x_3; 2x_1 + 7x_2 - 9x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = \vec{e}_1 + 16\vec{e}_2.$$

$$2.4..8 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 6x_3; x_1 - 7x_2 + 6x_3; x_1 + 5x_2 - x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3; \vec{x} = 4\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

$$2.4..9 \quad \hat{A}\vec{x} = (2x_3 - x_2 - 4x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + 7x_2 - 3x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

$$2.4..10 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - x_2 - 2x_3; 3x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3; \vec{x} = 13\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

$$2.4..11 \quad \hat{A}\vec{x} = (9x_1 - 7x_2 - 8x_3; x_1 + 9x_2 + 3x_3; x_1 + x_2 - 5x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3; \vec{x} = 7\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

$$2.4..12 \quad \hat{A}\vec{x} = (3x_1 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + x_3; x_1 + 5x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3; \vec{x} = 4\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3.$$

$$2.4..13 \quad \hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 3x_2; x_1 + 5x_2; 6x_1 - 7x_2 + 2x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 4\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

$$2.4..14 \quad \hat{A}\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - 3x_3; x_1 - 5x_2 + 4x_3; x_1 - 7x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2.$$

$$2.4..15 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 12x_2 - 5x_3; x_1 - 3x_2 + 3x_3; x_1 + 4x_2 - 3x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 7\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

$$2.4..16 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 - x_3; x_1 + 5x_2 - 2x_3; x_1 + 4x_2 - x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = 10\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3.$$

$$2.4..17 \quad \hat{A}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 - 4x_3; 4x_1 - 5x_2 + x_3; x_1 - x_2 + x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 6\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2.$$

$$2.4..18 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 13x_2 - 16x_3; x_1 - 17x_2 + 16x_3; x_1 + 15x_2 - x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = 11\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

$$2.4..19 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 + 4x_2 - 3x_3; x_1 - 3x_2 + 2x_3; x_1 - 5x_2 + 6x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3; \vec{x} = 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3.$$

$$2.4..20 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - 2x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3; \vec{x} = 6\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

$$2.4..21 \quad \hat{A}\vec{x} = (2x_1 + 5x_2 - 3x_3; 2x_1 - 2x_2 + 9x_3; x_1 - 2x_2 + 5x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3; \vec{x} = 7\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

$$2.4..22 \quad \hat{A}\vec{x} = (3x_1 + x_2 - 2x_3; x_1 + 3x_2 - 2x_3; 4x_1 + 2x_2 - x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 8\vec{e}_3.$$

$$2.4..23 \quad \hat{A}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 - 3x_3; 4x_1 - 3x_2 + x_3; 2x_1 - x_2);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 9\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3.$$

$$2.4..24 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - x_2 - 3x_3; x_1 - 2x_2 + 6x_3; x_1 + 7x_2 - 3x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \vec{x} = 3\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 + 13\vec{e}_3.$$

$$2.4..25 \quad \hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 - 4x_3; 5x_1 + x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3; \vec{x} = 21\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 15\vec{e}_3.$$

$$2.4..26 \quad \hat{A}\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - 3x_3; 4x_1 - 3x_2 + 6x_3; x_1 - 2x_2 + 5x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3; \vec{x} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

$$2.4..27 \quad \hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 2x_2 - 4x_3; 2x_1 - 2x_2; x_1 - x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \vec{x} = 11\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

$$2.4..28 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2; 4x_1 + x_2; 2x_1 + x_2 - 9x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2; \vec{x} = 13\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 16\vec{e}_3.$$

$$2.4..29 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - 2x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2; \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3.$$

$$2.4..30 \quad \hat{A}\vec{x} = ((x_1 - 5x_2 + 2x_3; x_1 + 3x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 4x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 8\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3.$$

3.2.1 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы A линейного оператора $\hat{A}$.

$$2.4.3.1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.2 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.3 \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.4 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.5 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.6 \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.7 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.8 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 11 \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.9} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.11} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.13} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.15} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.17} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.19} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.21} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.23} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.25} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.27} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.29} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.10} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.12} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.14} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.16} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.18} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.20} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.22} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.24} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.26} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.28} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.4.3.30} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму $A(x_1; x_2; x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ к каноническому виду.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы квадратичной части, решая характеристическое уравнение $|A - \lambda \cdot E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$
$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0,$$
$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

Тогда квадратичная форма $A(x_1; x_2; x_3)$ в канонической форме имеет вид

$$A(x'_1; x'_2; x'_3) = 4x_1'^2 + x_2'^2 - 2x_3'^2.$$

Для определения формул перехода от переменных x_1, x_2, x_3 к переменным x'_1, x'_2, x'_3 находим собственные векторы для каждого собственного значения из системы линейных однородных алгебраических уравнений $(A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$.

Единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 4$, имеет координаты $\vec{e}_1 = (2/3; -2/3; 1/3)$.

Единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 1$, имеет координаты $\vec{e}_2 = (2/3; 1/3; -2/3)$.

Единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -2$, имеет координаты $\vec{e}_3 = (1/3; 2/3; 2/3)$.

Тогда матрица перехода к новому базису $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (1.1.2), записываем преобразования, дающие выражения новых координат через старые координаты.

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \\ x'_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, \\ x'_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

3.2.2 Написать каноническое уравнение линии второго порядка

$$108x^2 - 312xy + 17y^2 - 840x + 380y - 100 = 0.$$

Определить тип кривой и найти каноническую систему координат, в которой линия имеет канонический вид. Записать результирующее преобразование. Построить линию второго порядка.

Решение. Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна $\begin{pmatrix} 108 & -156 \\ -156 & 17 \end{pmatrix}$. Её собственные числа: $\lambda_1 = 225$ и $\lambda_2 = -100$; соответствующие нормированные векторы: $\vec{e}_1 = (4/5; -3/5)$ и $\vec{e}_2 = (3/5; 4/5)$. Используя формулу (1.1.2), записываем преобразования, дающие выражения координат $(x; y)$ через новые координаты $(x'; y')$.

$$x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y', \quad y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'.$$

Данные преобразования соответствуют повороту системы координат Oxy с базисом $B = \{\vec{i}; \vec{j}\}$ и переходу к системе координат $Ox'y'$ с базисом $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$. Выполняя указанные преобразования, получаем уравнение линии второго порядка в новой системе координат:

$$9x'^2 - 4y'^2 - 36x' - 8y' - 4 = 0.$$

Группируя слагаемые с одинаковыми переменными и выделяя полные квадраты, приходим к уравнению

$$9 \cdot (x' - 2)^2 - 4 \cdot (y' + 1)^2 = 36.$$

Заменой переменных

$$x'' = x' - 2, \quad y'' = y' + 1,$$

которая соответствует сдвигу по каждой из координатных осей, получим

$$9x''^2 - 4y''^2 = 36, \text{ или } \frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Последнее уравнение есть каноническое уравнение гиперболы. Результирующее преобразование координат имеет вид

$$x = \frac{4}{5}x'' + \frac{3}{5}y'' + 1,$$

$$y = -\frac{3}{5}x'' + \frac{4}{5}y'' - 2,$$

а каноническая система координат $O_1x''y''$ имеет базис $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$, где $O_1(1; -2)$,
 $\vec{e}_1 = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$.

Построим гиперболу (рисунок 3.2.1).

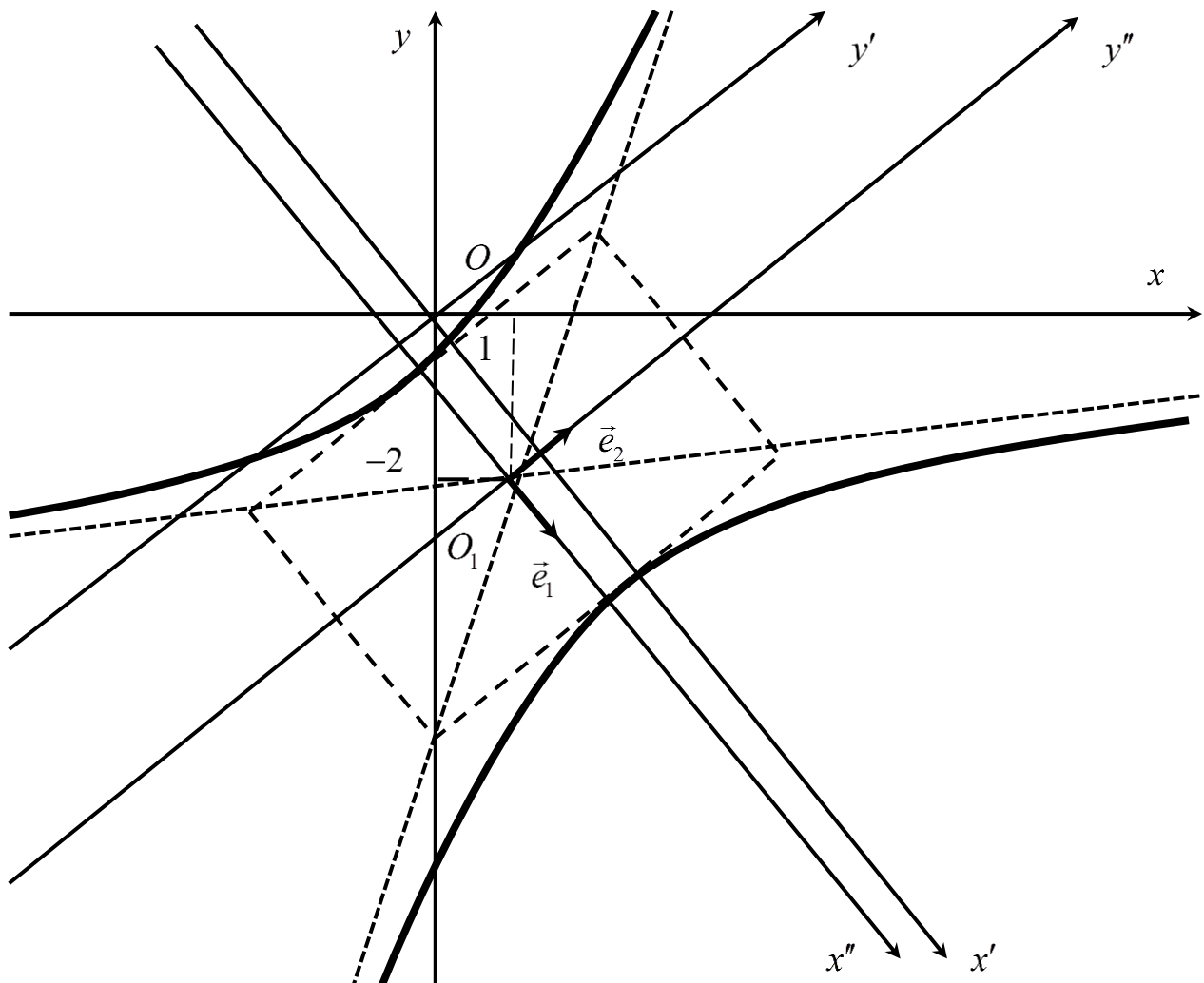


Рисунок 3.2.1 – Гипербола

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Составить матрицу квадратичной формы $A(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 6 \cdot x_1 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2 \cdot x_3$. Найти канонический вид квадратичной формы.

3.3.2 Найти квадратичную форму, которая соответствует матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму $A(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$ к каноническому виду.

3.3.4 Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму $A(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2$ к каноническому виду.

3.3.5 Написать канонические уравнения линий второго порядка, определить их тип и найти каноническую систему координат. Записать результирующее преобразование. Построить линии второго порядка.

3.3.5.1 $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 58x + 22y + 37 = 0.$

3.3.5.2 $-3x^2 - 8xy + 3y^2 - 28x - 4y - 57 = 0.$

3.3.5.3 $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6\sqrt{13}x + 30\sqrt{13}y - 39 = 0.$

3.3.5.4 $x^2 + 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y - 10 = 0.$

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму F к каноническому виду.

3.4.1.1 $F = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3.$

3.4.1.2 $F = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

3.4.1.3 $F = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

3.4.1.4 $F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$

3.4.1.5 $F = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

3.4.1.6 $F = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

3.4.1.7 $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

3.4.1.8 $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$

3.4.1.9 $F = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

3.4.1.10 $F = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2.$

3.4.1.11 $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3.$

3.4.1.12 $F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$

3.4.1.13 $F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

3.4.1.14 $F = -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$

3.4.1.15 $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3.$

3.4.1.16 $F = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3.$

3.4.1.17 $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

3.4.1.18 $F = 3x_1^2 - 9x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$

3.4.1.19 $F = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3.$

3.4.1.20 $F = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$

3.4.1.21 $F = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_2x_3.$

- 3.4.1.22 $F = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$
- 3.4.1.23 $F = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3.$
- 3.4.1.24 $F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 10x_1x_2.$
- 3.4.1.25 $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3.$
- 3.4.1.26 $F = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3.$
- 3.4.1.27 $F = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2.$
- 3.4.1.28 $F = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2.$
- 3.4.1.29 $F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 18x_1x_2.$
- 3.4.1.30 $F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_3^2 + 36x_1x_2.$

3.4.2 Написать каноническое уравнение линий второго порядка, определить их тип и найти каноническую систему координат. Записать результирующее преобразование. Построить линии второго порядка.

- 3.4.2.1 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 5 = 0.$
- 3.4.2.2 $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x + 16y + 3 = 0.$
- 3.4.2.3 $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 6y - 3 = 0.$
- 3.4.2.4 $4x^2 - 2xy + 4y^2 - 10x + 10y - 1 = 0.$
- 3.4.2.5 $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$
- 3.4.2.6 $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$
- 3.4.2.7 $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0.$
- 3.4.2.8 $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0.$
- 3.4.2.9 $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$
- 3.4.2.10 $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 9 = 0.$
- 3.4.2.11 $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0.$
- 3.4.2.12 $4xy - 8x - 8y - 1 = 0.$
- 3.4.2.13 $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0.$
- 3.4.2.14 $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$
- 3.4.2.15 $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$
- 3.4.2.16 $2xy + 2x + 2y - 3 = 0.$
- 3.4.2.17 $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0.$
- 3.4.2.18 $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0.$
- 3.4.2.19 $7x^2 - 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$
- 3.4.2.20 $4xy + 4x - 4y - 6 = 0.$
- 3.4.2.21 $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$
- 3.4.2.22 $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 2x - y + 1 = 0.$

- 3.4.2.23** $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$
- 3.4.2.24** $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$
- 3.4.2.25** $4x^2 + 17xy + 4y^2 - x - 4y - 3 = 0.$
- 3.4.2.26** $7x^2 - 50xy + 7y^2 + x - 2y + 7 = 0.$
- 3.4.2.27** $x^2 + 6xy + 9y^2 - 3x + 2y - 1 = 0.$
- 3.4.2.28** $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 6y + 2 = 0.$
- 3.4.2.29** $9x^2 + 6xy + y^2 - x + 2y - 4 = 0.$
- 3.4.2.30** $x^2 - 5xy + 6y^2 - x + y + 1 = 0$