

16 ЛИНЕЙНЫЕ (ВЕКТОРНЫЕ) ПРОСТРАНСТВА

Определение 1 *Линейным (или векторным) пространством L называется множество объектов или элементов произвольной математической природы, с введенными операциями сложения (если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$, то $\vec{x} \oplus \vec{y} \in L$) и умножения на действительное число (если $\forall \vec{x} \in L$ и $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha \cdot \vec{x} \in L$), которое удовлетворяет следующим аксиомам:*

- 1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L, \vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x}$ (условие коммутативности сложения);
- 2) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L, \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}) = (\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z}$ (условие ассоциативности сложения);
- 3) $\forall \vec{x} \in L, \exists \vec{0} \in L, \vec{x} \oplus \vec{0} = \vec{x}$ (условие существования нулевого элемента);
- 4) $\forall \vec{x} \in L, \exists (-\vec{x}) \in L, \vec{x} \oplus (-\vec{x}) = \vec{0}$ (условие существования противоположного элемента);
- 5) $\forall \vec{x} \in L, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;
- 6) $\forall \vec{x} \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x})$ (умножение на скаляр ассоциативно);
- 7) $\forall \vec{x} \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, (\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} \oplus \beta \cdot \vec{x}$ (умножение дистрибутивно относительно сложения скаляров);
- 8) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L, \forall \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \cdot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} \oplus \alpha \cdot \vec{y}$ (умножение на скаляр дистрибутивно относительно сложения).

Объекты линейного пространства называются *элементами* этого пространства или *векторами*.

Пример 1 Рассмотрим множество $\mathbf{R}^n$, элементы которого представляют упорядоченную совокупность n действительных чисел $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, то есть множество $\mathbf{R}^n$ имеет вид: $\{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid x_i \in \mathbf{R} \wedge i = \overline{1; n}\}$. Над элементами множества $\mathbf{R}^n$ определены операции сложения векторов $\vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n)$ и умножения на действительное число $\alpha \odot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} = (\alpha \cdot x_1; \alpha \cdot x_2; \dots; \alpha \cdot x_n)$. Доказать, что пространство $\mathbf{R}^n$ является линейным пространством.

Решение. Операции сложения и умножения вектора на действительное число определены, так как $\vec{x} \oplus \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ и $\alpha \odot \vec{x} = (\alpha x_1; \alpha x_2; \dots; \alpha x_n) \in \mathbf{R}^n$. Проверим выполнение аксиом векторного пространства.

- 1) $\vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n) = (y_1 + x_1; y_2 + x_2; \dots; y_n + x_n) = \vec{y} \oplus \vec{x}$.
- 2) $\vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}) = (x_1; x_2; \dots; x_n) \oplus (y_1 + z_1; y_2 + z_2; \dots; y_n + z_n) = (x_1 + (y_1 + z_1);$

$$x_2 + (y_2 + z_2); \dots; x_n + (y_n + z_n)) = ((x_1 + y_1) + z_1; \dots; (x_n + y_n) + z_n) = (\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z}.$$

3) В качестве нейтрального элемента выбираем нулевой вектор

$$\vec{0} = (0; 0; \dots; 0): \vec{x} \oplus \vec{0} = (x_1; \dots; x_n) + (0; \dots; 0) = (x_1 + 0; \dots; x_n + 0) = (x_1; \dots; x_n) = \vec{x}.$$

4) Противоположным элементом к $\vec{x}$ является вектор $-\vec{x} = (-x_1; \dots; -x_n)$,

$$\text{так как } \vec{x} \oplus (-\vec{x}) = (x_1; \dots; x_n) \oplus (-x_1; \dots; -x_n) = (x_1 - x_1; \dots; x_n - x_n) = (0; \dots; 0) = \vec{0}.$$

$$5) 1 \odot \vec{x} = (1 \cdot x_1; 1 \cdot x_2; \dots; 1 \cdot x_n) = (x_1; x_2; \dots; x_n) = \vec{x}.$$

$$6) (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{x} = (\alpha \cdot \beta) \odot (x_1; \dots; x_n) = ((\alpha \cdot \beta)x_1; \dots; (\alpha \cdot \beta)x_n) = \\ = (\alpha \cdot (\beta \cdot x_1); \dots; \alpha \cdot (\beta \cdot x_n)) = \alpha \cdot (\beta x_1; \dots; \beta x_n) = \alpha \cdot (\beta \odot (x_1; \dots; x_n)) = \alpha \cdot (\beta \odot \vec{x}).$$

$$7) (\alpha \oplus \beta) \odot \vec{x} = (\alpha + \beta) \odot (x_1; \dots; x_n) = ((\alpha + \beta) \cdot x_1; \dots; (\alpha + \beta) \cdot x_n) = \\ = (\alpha \cdot x_1; \dots; \alpha \cdot x_n) + (\beta \cdot x_1; \dots; \beta \cdot x_n) = \alpha \cdot (x_1; \dots; x_n) + \beta \cdot (x_1; \dots; x_n) = \alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{x}.$$

$$8) \alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \alpha \odot (x_1 + y_1; \dots; x_n + y_n) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha y_1; \dots; \alpha \cdot x_n + \alpha y_n) = \\ = \alpha \cdot (x_1; \dots; x_n) + \alpha \cdot (y_1; \dots; y_n) = \alpha \cdot \vec{x} \oplus \alpha \cdot \vec{y}.$$

Все аксиомы векторного пространства выполнены. Следовательно, заданное множество $\mathbf{R}^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid x_i \in R \wedge i = \overline{1; n}\}$ является векторным или линейным пространством.

Пример 2 На множестве положительных действительных чисел $R^+ = \{\vec{x} \mid \vec{x} = x \wedge x \in R \wedge x > 0\}$ определены операции сложения и умножения на действительное число: $\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y$, $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha$. Образуется ли векторное пространство заданное множество?

Решение. Операции сложения и умножения вектора на действительное число определены, так как $\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y > 0$ и $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha > 0$, то есть $\vec{x} \oplus \vec{y} \in R^+$, $\alpha \odot \vec{x} \in R^+$. Проверим выполнение аксиом векторного пространства.

$$1) \vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y = y \cdot x = \vec{y} \oplus \vec{x}.$$

$$2) \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}) = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = (\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z}.$$

3) В качестве нейтрального элемента выбираем нулевой вектор $\vec{0} = 1$:

$$\vec{x} \oplus \vec{0} = x \cdot 1 = x = \vec{x}.$$

4) Противоположным элементом к вектору $\vec{x}$ является вектор $-\vec{x} = x^{-1}$, так как $\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = x \cdot x^{-1} = 1 = \vec{0}$.

$$5) 1 \odot \vec{x} = x^1 = x = \vec{x}.$$

$$6) (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{x} = x^{\alpha \cdot \beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \cdot (\beta \odot \vec{x}).$$

$$7) (\alpha \oplus \beta) \odot \vec{x} = (\alpha + \beta) \odot \vec{x} = x^{\alpha + \beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = \alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{x}.$$

$$8) \alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = (x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha = \alpha \odot \vec{x} + \alpha \odot \vec{y}.$$

Все аксиомы векторного пространства выполнены. Следовательно, заданное множество $R^+ = \{\vec{x} \mid \vec{x} = x \wedge x \in R \wedge x > 0\}$ является векторным или линейным пространством.

Определение 2 Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ линейного пространства L называется *линейно-зависимой*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$), что линейная комбинация этих векторов равна нулю $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$. Если равенство нулю линейной комбинации выполняется только при нулевых коэффициентах ($\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$), то система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ называется *линейно-независимой*.

Вопрос о линейной независимости системы функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ решается с помощью *определителя Вронского (вронскиана)*:

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Теорема 1 Для того чтобы система функций была линейно независимой на интервале $(a; b)$, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля на этом интервале.

Определение 3 *Базисом* линейного пространства L , размерности n называется любая упорядоченная совокупность n линейно-независимых векторов этого пространства.

Определение 4. Число $n = \dim L$ называется *размерностью* линейного пространства L , если в этом пространстве существует система n линейно-независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ векторов линейно-зависимая.

Пример 3 Исследовать на линейную зависимость систему векторов $e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Решение. Воспользуемся формулой (1) нахождения вронскиана:

$$W(x) = W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ e^x & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ e^x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель равен нулю, так как первая и третья строки совпадают. По теореме 1, заданная система функций является линейно зависимой.

Линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем определена операция скалярного произведения.

Примером евклидова пространства является линейное пространство геометрических векторов V^3 . В этом линейном пространстве хорошо известно определение скалярного произведения двух векторов, как произведения длин векторов на косинус угла между ними. В произвольном линейном пространстве операция скалярного произведения определяется аксиоматически.

Евклидово пространство размерности n , обозначается E^n .

Определение 5. В евклидовом пространстве E скалярным произведением двух векторов называется соответствие, по которому каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E$ сопоставляется действительное число $(\vec{x}, \vec{y})$ или $\vec{x} \cdot \vec{y}$ удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1⁰. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
- 2⁰. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall \alpha \in R, (\alpha \vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$;
- 3⁰. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E, (\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$;
- 4⁰. $\forall \vec{x} \in E, (\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^2 \geq 0; (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \leftrightarrow \vec{x} = 0$.

Рассмотрим $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ и $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ – два различных базиса L . Каждый из векторов базиса B' разложим по базису B : $\vec{e}'_k = t_{1k}\vec{e}_1 + \dots + t_{nk}\vec{e}_n$.

Определение 6 Матрицей перехода $T = T_{B \rightarrow B'}$ от базиса B к базису B' называется матрица, столбцы которой представляют координаты новых базисных векторов в старом базисе:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Основное свойство матрицы перехода является её не вырожденность.

Если $\vec{x}$ – любой вектор из линейного пространства L , а $X \ X'$ – столбцы его координат в базисах B и B' соответственно, то имеет место равенство

$$X' = T^{-1} \cdot X. \quad (2)$$

Пример 4 Доказать, что вектора $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{e}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = -2\vec{i} + \vec{k}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{x} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ в новом базисе.

Решение. Для доказательства того, что вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ образуют базис необходимо показать, что смешанное произведение этих векторов отлично от нуля.

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 10 + 18 = 5 \neq 0.$$

Смешанное произведение векторов отлично от нуля, то есть вектора линейно независимы, а, следовательно, образуют базис. Тогда вектор $\vec{x}$ выражается через новые базисные вектора. Для определения координат вектора воспользуемся формулой (2). Запишем матрицу перехода $T = T_{B \rightarrow B'}$ от базиса $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ к базису $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, столбцы которой представляют координаты новых базисных векторов в первоначальном базисе:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу для матрицы перехода. Так как определители транспонированной матрицы и самой матрицы равны, то $|T| = \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 5$. Находим алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned} T_{11} &= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & T_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, & T_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \\ T_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2, & T_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5, & T_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \\ T_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, & T_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, & T_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5. \end{aligned}$$

Обратная матрица T^{-1} к матрице перехода имеет вид:

$$T^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ -2 & -5 & -4 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения координат вектора воспользуемся формулой (2).

$$X' = T^{-1} \cdot X = T^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ -2 & -5 & -4 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\vec{x} = (-1; 0; 1) = -\vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Пример 5 Доказать, что система функций $y_1 = 1$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = \cos x$ образует базис линейного пространства L^3 . Найти координаты функции $y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ в этом базисе.

Решение. Воспользуемся формулой (1) нахождения вронскиана:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

По теореме 1 заданная система функций является линейно независимой, а, следовательно, образует базис линейного пространства. Найдём координаты функции $y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ в заданном базисе, для этого разложим заданную функцию по базисным векторам:

$$\begin{aligned} 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 &= 2 \cdot \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1\right) - 5 = 2 \cdot \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) - 3 = \\ &= -3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) = -3 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ в базисе $B = \{1; \sin x; \cos x\}$

имеет координаты $\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

17 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Определение 1 *Линейным оператором* $\hat{A}$ в линейном векторном пространстве L называется всякое отображение $\hat{A}: L \rightarrow L$ в себя, обладающее свойствами

$$\hat{A}(\alpha \vec{x}) = \alpha \cdot \hat{A}(\vec{x}) \text{ и } \hat{A}(\vec{x} + \vec{z}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{z},$$

для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{z}$ из линейного пространства L .

Образом или *областью значений* линейного оператора $\hat{A}$ называется множество $\text{Im } \hat{A}$ всех векторов $\vec{y} \in L$, для которых $\hat{A}\vec{x} = \vec{y}$:

$$\text{Im } \hat{A} = \{ \vec{y} | \vec{y} = \hat{A}\vec{x}, \forall \vec{x} \in L \}.$$

Ядром линейного оператора $\hat{A}$ называется множество $\text{Ker } \hat{A}$ всех векторов $\vec{x} \in L$, для которых $\hat{A}\vec{x} = \vec{0}$:

$$\text{Ker } \hat{A} = \{ \vec{x} | \hat{A}\vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{x} \in L \}.$$

Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор в конечномерном пространстве L и $B = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}$ – некоторый фиксированный базис. Разложим вектор $\hat{A}\vec{e}_k$ ($k = \overline{1; n}$) по базису B : $\hat{A}\vec{e}_k = a_{1k}\vec{e}_1 + \dots + a_{nk}\vec{e}_n$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$

в базисе B . Таким образом, чтобы найти матрицу линейного оператора в фиксированном базисе необходимо подействовать оператором на базисные вектора, и записать координаты полученных векторов в столбец матрицы.

Пример 1 Пусть задан вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$ в базисе $B = \{ \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \}$. Исследовать на линейность указанные преобразования:

$$\hat{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3).$$

В случае линейности найти матрицу линейного оператора.

Решение. Для доказательства линейности отображения воспользуемся определением 1.

$$\begin{aligned} \hat{A}(\alpha \vec{x}) &= (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - 3\alpha x_3; 2\alpha x_1 - 3\alpha x_2 + 4\alpha x_3; 3\alpha x_1 + 4\alpha x_2 - 5\alpha x_3) = \\ &= \alpha \cdot (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3) = \alpha \cdot \hat{A}\vec{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) &= ((x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3); 2(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) + 4(x_3 + y_3); \\ &3(x_1 + y_1) + 4(x_2 + y_2) - 5(x_3 + y_3)) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3) + \\ &+ (y_1 + 2y_2 - 3y_3; 2y_1 - 3y_2 + 4y_3; 3y_1 + 4y_2 - 5y_3) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}. \end{aligned}$$

Все условия линейности отображения выполнены, а, следовательно, данное преобразование является линейным оператором. Найдём матрицу линейного оператора, для чего подействуем оператором на базисные вектора $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$ и $\vec{k}(0; 0; 1)$. Координаты новых векторов, записанные в столбец, будут образовывать матрицу линейного оператора $\hat{A}$.

$$\begin{aligned}\hat{A}\vec{i} &= (1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0; 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0; 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0) = (1; 2; 3); \\ \hat{A}\vec{j} &= (0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0; 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0; 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = (2; -3; 4); \\ \hat{A}\vec{k} &= (0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1; 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1; 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1) = (-3; 4; -5).\end{aligned}$$

Матрица линейного оператора $\hat{A}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задание матрицы линейного оператора $\hat{A}$ определяется однозначно, а именно: если $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$, то $Y = AX$, где X, Y – столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и A – матрица оператора $\hat{A}$ в базисе B .

Пусть A и A' – матрицы линейного оператора $\hat{A}$ в базисах B и B' , $T = T_{B \rightarrow B'}$ – матрица перехода от базиса B к базису B' . Тогда формула преобразования матрицы линейного оператора $\hat{A}$ при переходе от одного базиса к другому имеет вид

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T. \quad (1)$$

Множество $\text{Im } \hat{A}$ всех векторов $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$, $\vec{x} \in L$, называется *образом* оператора $\hat{A}$, а множество $\text{Ker } \hat{A}$ всех векторов $\vec{x} \in L$, для которых $\hat{A}\vec{x} = \vec{0}$ называется *ядром* оператора $\hat{A}$. Матрица линейного оператора полностью определяет его образ $\text{Im } \hat{A} = \{\vec{z} | A\vec{x} = \vec{z}\}$. Решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $AX = 0$ определяет ядро линейного оператора $\hat{A}$.

Пример 2 Доказать, что в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ оператор ортогонального проектирования $\hat{P}_\pi$ на плоскость $\pi: x + y + z = 1$ является линейным. Найти матрицу, образ и ядро линейного оператора. Определить матрицу линейного

оператора проектирования $\hat{P}_\pi$ в базисе $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, если известно разложение новых базисных векторов базиса B' в базисе B : $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - 2\vec{k}$.

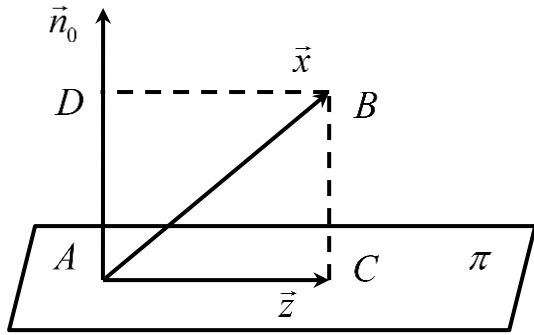


Рисунок 1 – Проекция вектор на плоскость

Решение. Оператор проектирования на плоскость π определяется равенством $\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{z}$, где вектор $\vec{z} = \overrightarrow{AC}$ – ортогональная проекция вектора $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ на заданную плоскость $\pi: x + y + z = 1$ (рисунок 1). Выразим вектор $\vec{z}$ через заданный вектор $\vec{x}$ и единичный нормаль-

ный вектор $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(1; 1; 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ плоскости π .

$$\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{z} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \vec{x} - \overrightarrow{CB} = \vec{x} - \text{пр}_{\vec{n}_0} \vec{x} = \vec{x} - np_{\vec{n}_0} \vec{x} \cdot \vec{n}_0 = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0.$$

Таким образом, формула нахождения оператора проектирования $\hat{P}_\pi$ вектора $\vec{x}$ на плоскость π имеет вид

$$\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0.$$

Докажем линейность преобразования проектирования на плоскость.

$$\hat{P}_\pi (\alpha \vec{x}) = \alpha \vec{x} - (\alpha \vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0 = \alpha \cdot (\vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0) = \alpha \cdot \hat{P}_\pi \vec{x}.$$

$$\hat{P}_\pi (\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{x} + \vec{y}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0 = (\vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0) + (\vec{y} - (\vec{y}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0) = \hat{P}_\pi \vec{x} + \hat{P}_\pi \vec{y}.$$

Все условия линейности отображения выполнены (определение 1), а, следовательно, данное преобразование проектирования на плоскость линейным оператором. Найдём матрицу линейного оператора, для чего подействуем оператором на базисные вектора $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$ и $\vec{k}(0; 0; 1)$. Координаты новых векторов, записанные в столбец, будут образовывать матрицу P_π линейного оператора проектирования $\hat{P}_\pi$ на плоскость π .

$$\begin{aligned} \hat{P}_\pi \vec{i} &= \vec{i} - (\vec{i}, \vec{n}_0) \vec{n}_0 = (1; 0; 0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (1; 0; 0) - \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right). \\ \hat{P}_\pi \vec{j} &= \vec{j} - (\vec{j}, \vec{n}_0) \vec{n}_0 = (0; 1; 0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (0; 1; 0) - \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right). \\ \hat{P}_\pi \vec{k} &= \vec{k} - (\vec{k}, \vec{n}_0) \vec{n}_0 = (0; 0; 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (0; 0; 1) - \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Матрица линейного оператора P_π имеет вид

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Найдём образ линейного оператора. Так как, матрица P_π линейного оператора $\hat{P}_\pi$ полностью определяет образ $\text{Im } \hat{P}_\pi$ оператора проектирования на плоскость $\pi: x + y + z = 1$, то вектор $\vec{z} \in \text{Im } \hat{P}_\pi$ будет иметь координаты

$$\vec{z} = P_\pi \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix}, \text{ где } x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}.$$

$$\text{Im } P_\pi = \left\{ \vec{z} \mid \vec{z} = \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3; -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3; -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \right), \vec{z} \in \pi \right\}.$$

Определим ядро линейного оператора $\text{Ker } \hat{P}_\pi$ из системы $P_\pi \cdot X = 0$.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, то система име-

ет бесконечное множество решений. В качестве базисного минора выбираем минор $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Переменные x_1, x_2 являются базисными переменными, а переменная $x_3 = c$ – свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = c, \\ -x_1 + 2x_2 = c, \end{cases} \Delta = 3, \Delta_1 = \begin{vmatrix} c & -1 \\ c & 2 \end{vmatrix} = 3c, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & c \\ -1 & c \end{vmatrix} = c,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = c, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = c, X = (c \ c \ c)^T, \text{ где } c \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, ядро линейного оператора $\hat{P}_\pi$ представляет собой множество векторов $\text{Ker} \hat{P}_\pi = \{ \vec{x} | \vec{x} = (c; c; c), c \in \mathbf{R} \}$.

Этот же результат можно получить из геометрических соображений. По определению ядра линейного оператора проектирования на плоскость, геометрический вектор отображается в нулевой вектор, а, следовательно, вектор перпендикулярен плоскости или коллинеарен нормальному вектору. Но коллинеарные вектора имеют пропорциональные координаты, то есть $\vec{x} = (c; c; c)$, где $c \in \mathbf{R}$.

Найдём матрицу P'_π линейного оператора $\hat{P}_\pi$ в базисе $B' = \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \}$, если матрица P_π в базисе $B = \{ \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \}$ найдена выше и известно разложение базисных векторов базиса B' по векторам базиса B : $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - 2\vec{k}$.

Используя формулу (2.1.1), получаем формулу нахождения матрицы линейного оператора проектирования на плоскость в новом базисе:

$$P'_\pi = T^{-1} \cdot P_\pi \cdot T,$$

где T – матрица перехода от базиса B к базису B' .

Запишем матрицу перехода $T = T_{B \rightarrow B'}$ от базиса $B = \{ \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \}$ к базису $B' = \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \}$, столбцы которой представляют координаты новых базисных векторов в первоначальном базисе:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу для матрицы перехода, для чего вычисляем её определитель $|T| = 2$ и алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned} T_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2, & T_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, & T_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \\ T_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, & T_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, & T_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \\ T_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & T_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, & T_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Обратная матрица T^{-1} к матрице перехода имеет вид:

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$P'_\pi = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 \\ -12 & -6 & 4 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/6 \\ -2 & -1 & 2/3 \\ -3/2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица линейного оператора в новом базисе имеет вид:

$$P'_\pi = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/6 \\ -2 & -1 & 2/3 \\ -3/2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Определение 2 Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* матрицы A , если выполняется равенство $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, при этом число λ называется *собственным значением* матрицы A .

Для определения собственных значений матрицы необходимо решить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$. Для каждого полученного собственного значения определяем собственные векторы из решения однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$.

Пример 3 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ линейного оператора $\hat{A}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $|A - \lambda \cdot E| = 0$, решения которого являются собственными значениями матрицы A линейного оператора $\hat{A}$.

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 3 & 1 \\ 3 & 0 - \lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В результате получаем уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0$, решая которое, находим собственные значения линейного оператора $\hat{A}$: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 1$.

Для каждого собственного значения λ находим собственные векторы из системы:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $\lambda_1 = 3$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = -3 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

Таким образом, $\text{rang} A = 2$. При этом переменные x_1 и x_3 — базисные, так как они входят в базисный минор M_{12}^{13} , а $x_2 = c$ — свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -3c, \\ 3x_1 + x_3 = c. \end{cases}$$

Пусть $c = 1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{13} = -6, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-6} = 0$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_1 = 3$, имеет координаты:

$$\text{ты: } E_1 = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } c \in R, \quad c \neq 0.$$

Пусть $\lambda_2 = -3$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = 3 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

Таким образом, $\text{rang} A = 2$. При этом переменные x_1 и x_2 — базисные, так как они входят в базисный минор M_{13}^{12} , а $x_3 = d$ — свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -d, \\ -2x_1 + 2x_2 = -4d. \end{cases}$$

Пусть $d = 1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{13}^{12} = -12, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -14.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{-12} = -\frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{-12} = \frac{7}{6}$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_2 = -3$, имеет координаты:

$$E_2 = d \cdot \begin{pmatrix} 5/6 \\ -7/6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5d/6 \\ -7d/6 \\ d \end{pmatrix}, \text{ где } d \in R, \quad d \neq 0.$$

Пусть $\lambda_3 = 1$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = -1 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Таким образом, $\text{rang} A = 2$. При этом переменные x_1 и x_2 – базисные, так как они входят в базисный минор M_{12}^{12} , а $x_3 = m$ – свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -m, \\ 3x_1 - x_2 = -m. \end{cases}$$

Пусть $m = 1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{12} = -8, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_3 = 1$ имеет координаты:

$$E_3 = m \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m/2 \\ m/2 \\ m \end{pmatrix}, \text{ где } m \in R, \quad m \neq 0.$$

18 КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Определение 1 Квадратичной формой от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется выражение вида

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (1)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – действительные числа, которые называются *коэффициентами квадратичной формы*.

Для записи квадратичной формы в матричном виде будем использовать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

которая называется *матрицей квадратичной части* и является в силу равенства $a_{ij} = a_{ji}, i = \overline{1;n}, j = \overline{1;n}$ симметрической матрицей.

Например, Для квадратичной формы матрица квадратичной формы $A(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 6 \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 В пространстве L^n существует ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, в котором для каждого вектора $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ значение квадратичной формы $A(x, x)$ может быть определена по формуле

$$A(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \lambda_1 \cdot x'^2_1 + \lambda_2 \cdot x'^2_2 + \dots + \lambda_n \cdot x'^2_n, \quad (3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы квадратичной части.

Выражение (3) называется *каноническим видом* квадратичной формы (1). Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются *каноническими коэффициентами* квадратичной формы (1). Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются *главными осями* квадратичной формы, а канонические коэффициенты совпадают с собственными значениями матрицы этой квадратичной формы. Главные оси квадратичной формы совпадают с собственными векторами этой матрицы.

Таким образом, квадратичная форма полностью определяется своей матрицей, и, наоборот, любая квадратичная форма определяет однозначно симметричную матрицу.

Пример 1 Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму $A(x_1; x_2; x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ к каноническому виду.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы квадратичной части, решая характеристическое уравнение $|A - \lambda \cdot E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0,$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

Тогда квадратичная форма $A(x_1; x_2; x_3)$ в канонической форме имеет вид:

$$A(x'_1; x'_2; x'_3) = 4x'^2_1 + x'^2_2 - 2x'^2_3$$

Для определения формул перехода от переменных x_1, x_2, x_3 к переменным x'_1, x'_2, x'_3 находим собственные векторы для каждого собственного значения из системы линейных однородных алгебраических уравнений $(A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$.

Единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 4$, имеет координаты $\vec{e}_1 = (2/3; -2/3; 1/3)$.

Единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 1$, имеет координаты $\vec{e}_2 = (2/3; 1/3; -2/3)$.

Единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -2$, имеет координаты $\vec{e}_3 = (1/3; 2/3; 2/3)$.

Тогда матрица перехода к новому базису $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Записываем преобразования, дающие выражения новых координат через старые координаты.

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \\ x'_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, \\ x'_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Пусть на плоскости в декартовой системе координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ задана линия второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим алгоритм приведения линии, заданной уравнением (4) к каноническому виду.

1. Рассматриваем квадратичную форму $A(x; y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ и её матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, причём $a_{12} = a_{21}$.

2. Находим собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A , решая характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ или $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$, при этом, если:

- а) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то получим кривую эллиптического типа;
- б) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то получим кривую гиперболического типа;
- в) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, то получим кривую параболического типа.

3. Для каждого собственного значения λ_1 и λ_2 определяем собственные векторы $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, и нормируем их: $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 / |\vec{u}_1| = (\alpha_1 \ \beta_1)^T$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 / |\vec{u}_2| = (\alpha_2 \ \beta_2)^T$.

4. Составляем матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ от базиса $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ к базису $\{O; \vec{v}_1; \vec{v}_2\}$ и переходим от системы координат Oxy к новой системе координат $Ox'y'$ с новыми базисными векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y'; \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y'. \end{cases} \quad (5)$$

Преобразование системы (5) осуществляет поворот осей координат.

5. Переменные x и y из системы (5) подставляем в уравнение (4), при этом в нём исчезает член с произведением xy , а квадратичная часть имеет вид: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

6. В полученном новом уравнении $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2ax' + 2by' + c = 0$ выделяем полные квадраты и вводим новые переменные $x'' = x' - A$, $y'' = y' - B$, что фактически осуществляет параллельный перенос системы координат $Ox'y'$ в новое начало координат $O_1(-A \cdot \alpha_1 - B \cdot \alpha_2; -A \cdot \beta_1 - B \cdot \beta_2)$ системы координат $O_1x''y''$. При этом уравнение (3.1.4) в системе координат $O_1x''y''$ принимает канонический вид.

Строим все системы координат Oxy , $Ox'y'$, $O_1x''y''$ и в последней системе координат – искомую кривую.

Пример 2 Написать каноническое уравнение линии второго порядка

$$108x^2 - 312xy + 17y^2 - 840x + 380y - 100 = 0.$$

Определить тип кривой и найти каноническую систему координат, в которой линия имеет канонический вид. Записать результирующее преобразование. Построить линию второго порядка.

Решение. Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна $\begin{pmatrix} 108 & -156 \\ -156 & 17 \end{pmatrix}$. Её собственные числа: $\lambda_1 = 225$ и $\lambda_2 = -100$; соответствующие нормированные векторы: $\vec{e}_1 = (4/5; -3/5)$ и $\vec{e}_2 = (3/5; 4/5)$. Записываем преобразования, дающие выражения координат $(x; y)$ через новые координаты $(x'; y')$.

$$x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y', \quad y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'.$$

Данные преобразования соответствуют повороту системы координат Oxy с базисом $B = \{\vec{i}; \vec{j}\}$, и переходу к системе координат $Ox'y'$ с базисом $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$. Выполняя указанные преобразования, получаем уравнение линии второго порядка в новой системе координат:

$$9x'^2 - 4y'^2 - 36x' - 8y' - 4 = 0.$$

Группируя слагаемые с одинаковыми переменными, и выделяя полные квадраты, приходим к уравнению

$$9 \cdot (x' - 2)^2 - 4 \cdot (y' + 1)^2 = 36.$$

Заменой переменных

$$x'' = x' - 2, \quad y'' = y' + 1,$$

которая соответствует сдвигу по каждой из координатных осей, получим

$$9x''^2 - 4y''^2 = 36, \text{ или } \frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Последнее уравнение есть каноническое уравнение гиперболы. Результирующее преобразование координат имеет вид

$$x = \frac{4}{5}x'' + \frac{3}{5}y'' + 1,$$

$$y = -\frac{3}{5}x'' + \frac{4}{5}y'' - 2,$$

а каноническая система координат $O_1x''y''$ имеет базис $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$, где $O_1(1; -2)$,

$$\vec{e}_1 = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}, \quad \vec{e}_2 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}.$$

Построим гиперболу (рисунок 1) .

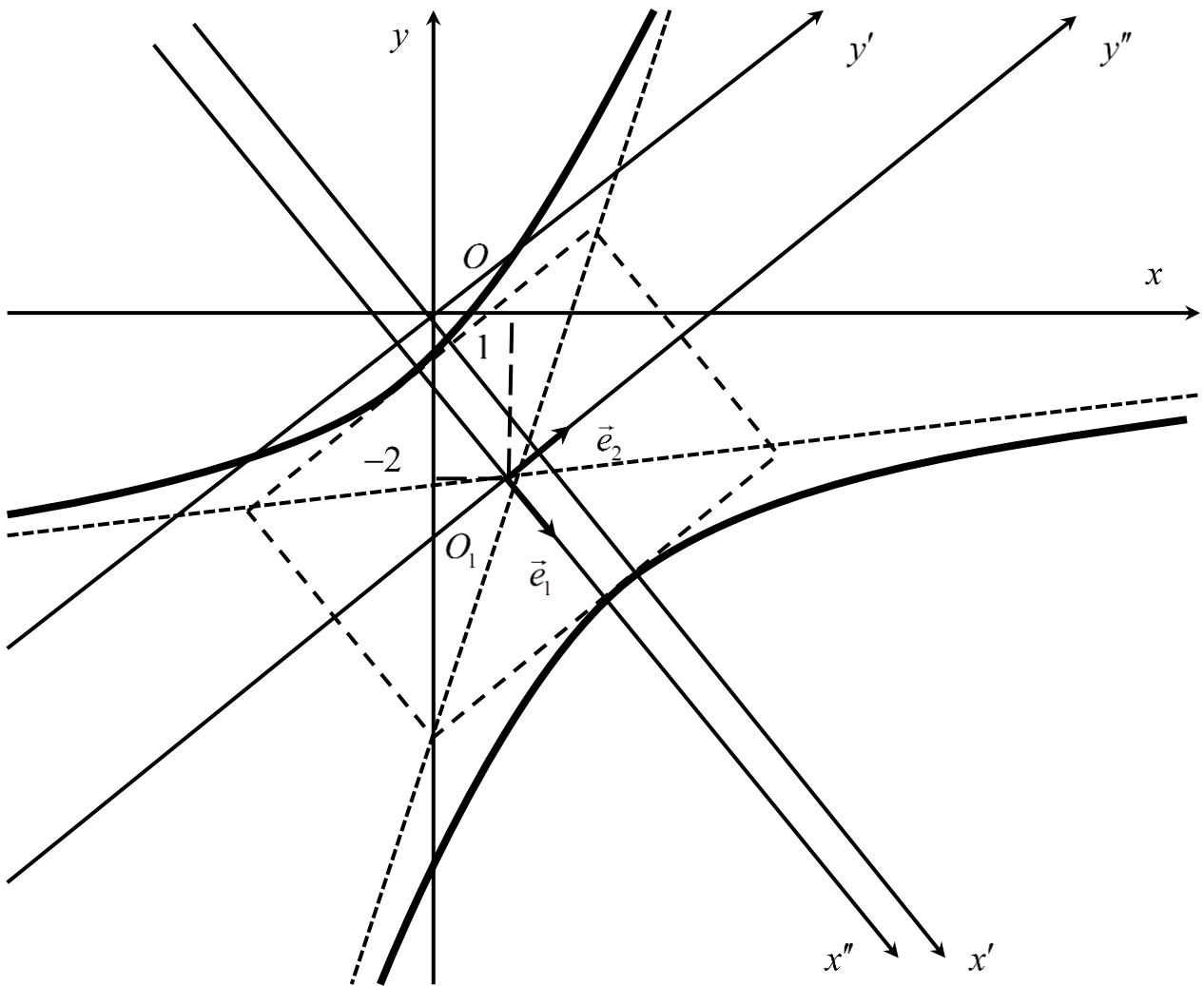


Рисунок 1 – Гипербола