

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = 2 + 5i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_2^2 , z_1^3 , $\bar{z}_1/z_2$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$$z_1 + z_2 = (4 - 3i) + (2 + 5i) = (4 + 2) + (-3 + 5)i = 6 + 2i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 3i) \cdot (2 + 5i) = 8 - 6i + 20i - 15i^2 = 8 + 14i + 15 = 23 + 14i,$$

$$z_2^2 = (2 + 5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i,$$

$$z_1^3 = (4 - 3i)^3 = 64 - 144i + 108i^2 - 27i^3 = 64 - 144i - 108 + 27i = -44 - 117i,$$

$$\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{2 + 5i} = \frac{(4 + 3i) \cdot (2 - 5i)}{(2 + 5i) \cdot (2 - 5i)} = \frac{8 + 6i - 20i - 15i^2}{4 - 25i^2} = \frac{23 - 14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i.$$

4.2.2 Данные числа $z_1 = \sqrt{3} - i$ и $z_2 = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ представить в тригонометрической и показательной форме записи комплексных чисел. Выполнить указанные действия над ними: $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , z_1^{10} , $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение. Представим указанные числа в тригонометрической и показательной форме записи. Для числа $z_1 = \sqrt{3} - i$, по формулам (4.1.4), находим модуль и аргумент комплексного числа. Модуль числа равен $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, а аргумент определяем из системы: $\cos \varphi_1 = \sqrt{3}/2$, $\sin \varphi_1 = -1/2$, то есть $\varphi_1 = 11\pi/6$. По формулам (4.1.5) и (4.1.6) получаем необходимые записи числа $z_1 = \sqrt{3} - i$: $z_1 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}$.

Аналогично, $z_2 = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 6e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Для нахождения $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , z_1^{10} , $\sqrt[3]{z_2}$ воспользуемся формулами (4.1.7) – (4.1.10):

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 6 \cdot \left(\cos \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) \right) = 12 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = 12e^{\frac{7\pi}{12}i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{6} \cdot \left(\cos \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right) = \frac{1}{3}e^{\frac{13\pi}{12}i},$$

$$z_1^{10} = 2^{10} \cdot \left(\cos \left(10 \cdot \frac{11\pi}{6} \right) + i \sin \left(10 \cdot \frac{11\pi}{6} \right) \right) = 1024 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1024e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

$$\omega_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}i}, k = 0, 1, 2.$$

В частном случае, если значение $k=0$, то $\omega_0 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{\pi}{4} i}$.

Если же значение $k=1$, то $\omega_1 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{11\pi}{12} i}$. Если $k=2$, то

$$\omega_2 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{19\pi}{12} i}.$$

4.2.3 Решить уравнение $z^2 + 6z + 13 = 0$.

Решение. $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 = 16i^2$, $z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$.

4.2.4 Найти корни многочлена $z^6 + 2z^3 + 1$ и разложить его на множители.

Решение. Так как $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$, то корнями этого многочлена являются корни третьей степени из числа $-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$: $\omega_1 = -1$, $\omega_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$. При этом каждый корень имеет кратность $k=2$. Разложение многочлена на линейные множители имеет вид: $z^6 + 2z^3 + 1 = (z + 1)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2$.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме: а) $(2 - 4i) \cdot (5 + 3i) + 7i$; б) $(6 + i) \cdot (3 - 7i) - 2i$; в) $(3 - 2i)^2 + (1 + i)^2$; г) $(3 - i)^3 + (3 + i)^3$; д) $(i - 3i^2)^2 + (4i^3 + i^2)^2$; е) $\frac{2 - i}{3 + i}$; ж) $\frac{1}{5 - i} + \frac{1}{1 + 5i}$; з) $\left(\frac{i^7 + 3}{i^{19} + 2} \right)^2$.

4.3.2 Найти действительные решения уравнения:

$$12((2x + 1) \cdot (1 + i) + (x + y) \cdot (3 - 2i)) = 17 + 6i.$$

4.3.3 Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} (3 - i)z_1 + (4 + 2i)z_2 = 1 + 3i, \\ (4 + 2i)z_1 - (2 + 3i)z_2 = 7. \end{cases}$$

4.3.4 Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной форме и изобразить точками на комплексной плоскости:

а) $-i$; б) $\sqrt{3} - i$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$; г) $2 - 2\sqrt{3}i$; д) $\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$; е) $-\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$.

4.3.5 Найти $z_1 \cdot z_2$, z_2/z_1 , z_1^8 , $\sqrt[4]{z_2}$, если $z_1 = 2(\cos \pi/12 + i \sin \pi/12)$, $z_2 = 16(\cos 23\pi/12 + i \sin 23\pi/12)$.

4.3.6 Найти $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , z_1^{12} , $\sqrt[5]{z_2}$, если $z_1 = 4e^{\frac{5\pi}{12}i}$, $z_2 = 32e^{\frac{\pi}{3}i}$.

4.3.7 Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 2-й, 3-й и 4-й степени из единицы.

4.3.8 Найти решения уравнений: а) $z^2 - 2z + 5 = 0$; б) $4z^2 + 2z + 1 = 0$; в) $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$; г) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$; д) $z^3 + 64 = 0$; е) $z^6 + 729 = 0$.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Заданы два комплексных числа $z_1 = \sin \alpha + i \cos \alpha$ и $z_2 = \sin \beta - i \cos \beta$, где $\alpha = n\pi/6$, $\beta = n\pi/4$, n – номер варианта, причём $\alpha, \beta \in (0; 2\pi]$. Если значения углов α , β превышают угол 2π , то из полученных значений α и β исключить угол, кратный 2π , и принять полученные значения за значения углов α и β . Представить полученные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. При записи комплексных чисел в алгебраической форме найти $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^3 , z_2^2 .

При записи комплексных чисел в тригонометрической форме найти $z_1 z_2^2$, $\frac{z_1^3}{z_2}$, z_1^{10} , z_2^8 .

При записи комплексных чисел в показательной форме найти $z_1^2 z_2$, $\frac{z_1}{z_2^2}$, z_1^7 , z_2^9 . Решить квадратное уравнение $z^2 - 2nz + (n^2 + 1) = 0$.

Решить кубическое уравнение $\omega^3 + (-1)^n z_1 = 0$.

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Написать первые четыре члена числовой последовательности, общий член которой задан формулой $x_n = (-1)^{n-1} \cdot n^2$.

Решение. Полагая в данной формуле $n=1, 2, 3, 4$, находим первые четыре члена числовой последовательности: $x_1 = (-1)^{1-1} \cdot 1^2 = 1$, $x_2 = (-1)^{2-1} \cdot 2^2 = -4$, $x_3 = (-1)^{3-1} \cdot 3^2 = 9$, $x_4 = (-1)^{4-1} \cdot 4^2 = -16$.

5.2.2 Написать формулу общего члена последовательности:
 $2, \frac{4}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{2}{81}, \frac{4}{243}, \dots$

Решение. Каждый член последовательности представляет собой дробь, числитель которой равен двойке для членов с нечётными номерами и четырём для членов с чётными номерами, а знаменатель – соответствующей степени числа три. Следовательно, числитель можно представить формулой $3 + (-1)^n$, а знаменатель – формулой 3^{n-1} , поэтому формула общего члена числовой последовательности имеет вид: $a_n = \frac{3 + (-1)^n}{3^{n-1}}$.

5.2.3 Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n-1}{n}$ является возрастающей.

Решение. Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Таким образом, при любом натуральном n справедливо неравенство $x_{n+1} > x_n$, и, следовательно, последовательность является возрастающей.

5.2.4 Доказать, что последовательность $x_n = -(n+1)$ является убывающей.

Решение. Рассмотрим частное x_{n+1}/x_n . Имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{-(1+(n+1))}{-(n+1)} = \frac{-n-2}{-n-1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1.$$

Так как все члены последовательности отрицательны, то при любом натуральном n из неравенства $x_{n+1}/x_n > 1$ получаем, что $x_{n+1} < x_n$.

Следовательно, заданная последовательность является убывающей.

5.2.5 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n-2}{n+1}$ является ограниченной.

Решение. Так как $x_n = \frac{n-2}{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1} < 1$, то есть при любом натуральном n последовательность ограничена сверху.

Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n-2}{n+1} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{-3}{(n+1) \cdot (n+2)} < 0,$$

то есть при любом натуральном n справедливо неравенство $x_n < x_{n+1}$. Поэтому $x_1 = -1/2$ — наименьший член этой последовательности. Таким образом, для любого натурального n справедливо неравенство $x_n \geq -1/2$, то есть последовательность (x_n) ограничена снизу. Итак, последовательность (x_n) ограничена сверху и ограничена снизу, поэтому она является ограниченной последовательностью.

5.2.6 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = n^2$ не является ограниченной.

Решение. Предположим, что данная последовательность является ограниченной сверху, то есть пусть существует такое число M , что для любого n справедливо неравенство $n^2 \leq M$. Из последнего неравенства следует, что $M > 0$. Рассмотрим целое число k , большее, чем число $\sqrt{M}$; положим, например, $k = [\sqrt{M}] + 1$. Тогда $k^2 = ([\sqrt{M}] + 1)^2 > (\sqrt{M})^2 = M$. Итак, получено противоречие: при предположении, что существует такое число M , что для любого натурального n справедливо неравенство $n^2 \leq M$, в то же время оказалось, что существует номер $k = [\sqrt{M}] + 1$ такой, что $a_k = k^2 = ([\sqrt{M}] + 1)^2 > M$. Следовательно, последовательность с общим членом $x_n = n^2$ не является ограниченной сверху, и тем самым доказано, что она не является ограниченной.

5.2.7 Доказать, что число 2 является пределом числовой последовательности с общим членом $x_n = \frac{2n-1}{n+3}$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2$.

Решение. Надо доказать, что для любого положительного числа ε найдётся номер N такой, что для любого натурального $n > N$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Так как $\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| = \left| \frac{-4}{n+3} \right| = \frac{4}{n+3}$, то неравенство $\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\frac{4}{n+3} < \varepsilon$, то есть неравенству $n > \frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon}$. Если взять некоторое натуральное число N , больше числа $\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon}$, например число $\left[\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1$, то для каждого натурального числа n , большего этого числа N , выполнено неравенство

$$\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| = \frac{4}{n+3} < \frac{4}{N+3} = \frac{4}{\left[\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1} < \frac{4}{4/\varepsilon} = \varepsilon,$$

а это означает, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ нашёлся номер $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$. Следовательно, число 2 является пределом заданной последовательности, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2$.

5.2.8 Вычислить предел числовой последовательности $x_n = \frac{4n^3 + 5n + 1}{7n^3 + n^2 - 2}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 5n + 1}{7n^3 + n^2 - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{разделим числитель и} \\ \text{знаменатель на их старшую} \\ \text{степень переменной } n \end{array} \right] =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{7 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}} = \frac{4 + 0 + 0}{7 + 0 - 0} = \frac{4}{7}.$$

5.2.9 Вычислить предел числовой последовательности $y_n = \frac{5n^4 - 3n^2 + 3}{8n^7 + n^3 + 9}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 3n^2 + 3}{8n^7 + n^3 + 9} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n^3} - \frac{3}{n^5} + \frac{3}{n^7}}{8 + \frac{1}{n^4} + \frac{9}{n^7}} = \frac{0}{8} = 0.$

5.2.10 Вычислить предел числовой последовательности $z_n = \frac{2 - 3n^4 - 4n^3}{6n^2 + 5}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3n^4 - 4n^3}{6n^2 + 5} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^4} - 3 - \frac{4}{n}}{\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n^4}} = \left(\frac{-3}{0} \right) = -\infty.$

5.2.11 Вычислить предел числовой последовательности $a_n = \sqrt{n^2 + 9n} - n$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 9n} - n) = \left[\begin{array}{l} \text{домножаем и делим на выраже-} \\ \text{ние, сопряженное данному} \end{array} \right] =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 9n} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 9n} + n)}{\sqrt{n^2 + 9n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{\sqrt{n^2 + 9n} + n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{1 + \frac{9}{n}} + 1} = \frac{9}{2}.$$

5.2.12 Вычислить предел числовой последовательности $b_n = \left(\frac{3n-5}{3n-9} \right)^{6n+3}$.

Решение. Для нахождения предела числовой последовательности воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-5}{3n-9} \right)^{6n+3} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n-5}{3n-9} - 1 \right)^{6n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3n-9} \right)^{6n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{3n-9}{4}} \right)^{\frac{3n-9}{4}} \right)^{\frac{4(6n+3)}{3n-9}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n+12}{3n-9}} = e^{\frac{24}{3}} = e^8. \end{aligned}$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Написать первые шесть членов числовой последовательности:

5.3.1.1 $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6} \right)^n$. 5.3.1.2 $x_n = \frac{2^n}{n!}$. 5.3.1.3 $x_n = \sin \frac{\pi(n-1)}{4}$.

5.3.2 Найти формулу общего члена числовой последовательности:

5.3.2.1 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4 \cdot 5}, \frac{5}{6 \cdot 25}, \frac{7}{8 \cdot 125}, \frac{9}{10 \cdot 625}, \dots$

5.3.2.2 $\frac{3}{1 \cdot 4}, \frac{5}{4 \cdot 9}, \frac{7}{9 \cdot 16}, \frac{9}{16 \cdot 25}, \frac{11}{25 \cdot 36}, \dots$

5.3.2.3 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \frac{5}{24}, \frac{6}{120}, \frac{7}{720}, \frac{8}{5040}, \dots$

5.3.3 Доказать, что последовательность $x_n = 2^{n-1}$ является возрастающей.

5.3.4 Доказать, что последовательность $x_n = \frac{2n+3}{3n-2}$ является убывающей.

5.3.5 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n+4}{n+3}$ является

ограниченной.

5.3.6 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n n^3$ не является ограниченной.

5.3.7 Доказать, что число $3/2$ является пределом числовой последовательности с общим членом $x_n = \frac{3n^2-2}{2n^2-3}$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2}{2n^2-3} = \frac{3}{2}$.

5.3.8 Доказать, что число 1 не является пределом числовой последовательности с общим членом $x_n = \frac{3n-1}{n+5}$, $n \in \mathbb{N}$.

5.3.9 Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 2n + 3}{2n^3 + n^2 - 1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n - 3n^3}{6n^3 + 2n^2 - 4}$ в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{5n^4 - 3n^2}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 3n^3 + 1}{5n^3 - 3n - 8}$.

5.3.10 Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 8} - 2n)$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+9} - \sqrt{n-9})$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1})$.

5.3.11 Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+4}{2n-3} \right)^{5n-2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2-1}{6n^2+5} \right)^{2n+3}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{3n-2} \right)^{4n}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+7}{4n-8} \right)^{n-1}$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Вычислить предел числовой последовательности.

- | | |
|---|---|
| 5.4.1.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{9n^2 + 1} - 3n)$. | 5.4.1.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + n} - 3n)$. |
| 5.4.1.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n(\sqrt{16n^2 + 5} - 4n)$. | 5.4.1.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{16n^2 + 2n} - 4n)$. |
| 5.4.1.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-2)(\sqrt{9n^2 + 8} - 3n)$. | 5.4.1.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{25n^2 + 3n} - 5n)$. |
| 5.4.1.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n(\sqrt{49n^2 + 2} - 7n)$. | 5.4.1.8 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{36n^2 + n} - 6n)$. |
| 5.4.1.9 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)(\sqrt{4n^2 - 9} - 2n)$. | 5.4.1.10 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3} - 2n)$. |
| 5.4.1.11 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-7)(\sqrt{9n^2 + 3} - 3n)$. | 5.4.1.12 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{81n^2 + n} - 9n)$. |
| 5.4.1.13 $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n-2)(\sqrt{n^2 - 4} - n)$. | 5.4.1.14 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{81n^2 - 5n} - 9n)$. |
| 5.4.1.15 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+4)(\sqrt{n^2 + 16} - n)$. | 5.4.1.16 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^2 - 2} - n)$. |
| 5.4.1.17 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-2)(\sqrt{9n^2 + 3} - 3n)$. | 5.4.1.18 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 - 7n} - 3n)$. |
| 5.4.1.19 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+9)(\sqrt{9n^2 - 1} - 3n)$. | 5.4.1.20 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt{2n^2 + 3n} - \sqrt{2n})$. |
| 5.4.1.21 $\lim_{n \rightarrow \infty} (9n-1)(\sqrt{n^2 + 25} - n)$. | 5.4.1.22 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{25n^2 + 3n} - 5n)$. |
| 5.4.1.23 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{9n^2 + 3} - 3n)$. | 5.4.1.24 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt{81n^3 + 3n} - 9\sqrt{n^3})$. |
| 5.4.1.25 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+12)(\sqrt{n^2 + 3} - n)$. | 5.4.1.26 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{15n^2 + 3n} - \sqrt{15} \cdot n)$. |
| 5.4.1.27 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-9)(\sqrt{4n^2 + 1} - 2n)$. | 5.4.1.28 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{32n^2 + 3n} - 4\sqrt{2} \cdot n)$. |
| 5.4.1.29 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2n}(\sqrt{81n^2 + 1} - 9n)$. | 5.4.1.30 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{51n^2 + 5n} - \sqrt{51} \cdot n)$. |

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Доказать, исходя из определения предела функции, что $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Областью определения функции является множество действительных чисел. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta$, будет выполняться неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Если $|x - 2| < \delta$, то $|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4 < \delta + 4$ и $|x^2 - 4| = |x - 2| \times |x + 2| < \delta \cdot (\delta + 4)$. Для выполнения неравенства $|x^2 - 4| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta \cdot (\delta + 4) = \varepsilon$, то есть $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$, откуда $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$ (второй корень $-2 - \sqrt{4 + \varepsilon}$ не подходит, так как δ должно быть положительным).

Таким образом, для любого ε найдено такое δ , что из неравенства $|x - 2| < \delta$ следует неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$, то есть $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

6.2.2 Доказать, исходя из определения предела, что $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{9x^2 - 1}{3x - 1}$. Областью определения функции является множество действительных чисел, за исключением точки $x = 1/3$, то есть функция определена в проколотой окрестности этой точки. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - \frac{1}{3}| < \delta$,

будет выполняться неравенство $\left| \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$.

Последнее неравенство равносильно неравенству $|3x + 1 - 2| < \varepsilon$ или $0 < |x - \frac{1}{3}| < \frac{\varepsilon}{3}$, так как $x \neq \frac{1}{3}$. Следовательно, в качестве δ можно выбрать число $\delta = \varepsilon/3$. Таким образом, для любого положительного ε найдено такое $\delta = \varepsilon/3$, что из неравенства $0 < |x - \frac{1}{3}| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$ будет выполняться неравенство

$\left| \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$, то есть $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2$.

6.2.3 Доказать, исходя из определения предела функции, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Областью определения функции является множество действительных чисел. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $M > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, будет выполняться неравенство $\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Если $|x| > M$, то $x^2 > M^2$ и

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{M^2 + 1} < \frac{1}{M^2}.$$

Следовательно, для выполнения неравенства $\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$ достаточно найти число M из условия $1/M^2 = \varepsilon$, то есть $M = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Итак, для любого положительного числа ε найдено такое число $M = 1/\sqrt{\varepsilon}$, что из выполнения неравенства $|x| > M$ следует неравенство $\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$, то есть доказано, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1.$$

6.2.4 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{2x - 5}{7x + 1}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 5}{7x + 1} = \frac{2 \cdot 3 - 5}{7 \cdot 3 + 1} = \frac{1}{22}.$

6.2.5 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{раскладываем} \\ \text{числитель и знаменатель} \\ \text{на множители} \end{array} \right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 1) \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

6.2.6 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{\sqrt{5x + 1} - 4}{3x^2 - 10x + 3}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x + 1} - 4}{3x^2 - 10x + 3} = \left(\frac{0}{0} \right) =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{5x+1}-4) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x+1-16}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 \cdot (x-3)}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{(3x-1) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \frac{5}{8 \cdot 8} = \frac{5}{64}.
\end{aligned}$$

6.2.7 Вычислить предел функции $f(x) = x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4})$ при значении $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4}) \right) = (\infty - \infty) = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4}) \cdot (\sqrt{x^5+4} + \sqrt{x^5-4})}{(\sqrt{x^5+4} + \sqrt{x^5-4})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5+4} + \sqrt{x^5-4}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{4}{x^5}} + \sqrt{1-\frac{4}{x^5}}} = \frac{8}{1+1} = 4.
\end{aligned}$$

6.2.8 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{\cos 14x - \cos 8x}{x^2}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. При нахождении предела функции воспользуемся первым замечательным пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 14x - \cos 8x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin 11x}{x^2} = \\
&= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \frac{\sin 11x}{11x} \cdot 11 \right) = -2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 11 = -66.
\end{aligned}$$

6.2.9 Вычислить предел функции $f(x) = (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Для определения предела функции воспользуемся первым и вторым замечательными пределами.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos 4x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + \cos 4x - 1)^{\frac{1}{\cos 4x - 1}} \right)^{\frac{\cos 4x - 1}{x^2}} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{x^2}} = e^{-2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4} = e^{-2 \cdot 1^2 \cdot 4} = e^{-8} = \frac{1}{e^8}.
\end{aligned}$$

6.2.10 Доказать, что функции $\frac{3x^2}{2x+5}$ и x^2 , бесконечно малые при $x \rightarrow 0$,

являются бесконечно малыми функциями одного порядка.

Решение. Найдём предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2}{2x+5} : x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2x+5} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Данные бесконечно малые функции есть бесконечно малые одного порядка.

6.2.11 Доказать, что порядок функции $\frac{5x^6}{2x^2-7}$ выше, чем порядок функции x^4 при $x \rightarrow 0$.

Решение. Находим предел отношения заданных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x^6}{2x^2-7} : x^4 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{2x^2-7} = \frac{0}{-7} = 0,$$

то есть функция $\frac{5x^6}{2x^2-7}$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем функция x^4 .

6.2.12 Доказать, что функция $1 - \cos x$ будет бесконечно малой второго порядка относительно функции x при $x \rightarrow 0$.

Решение. Найдём предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x/2) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Найдём теперь $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, функция $1 - \cos x$ есть бесконечно малая второго порядка относительно x при $x \rightarrow 0$.

6.2.13 Доказать, что бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции $\frac{3x}{3+x^2}$ и $\frac{3x}{3+x}$ эквивалентны.

Решение. Найдём предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{3+x^2} : \frac{3x}{3+x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+x}{3+x^2} = 1.$$

Следовательно, $\frac{3x}{3+x^2} \sim \frac{3x}{3+x}$ при $x \rightarrow 0$.

6.2.14 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{-5x} - 1}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

Решение. Поскольку $\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$ при $x \rightarrow 0$, а $e^{-5x} - 1 \sim (-5x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{-5x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-5x} = -\frac{2}{5}.$$

6.3 Задания для решения на практических занятиях

6.3.1 Пользуясь определением предела функции, доказать, что:

6.3.1.1 $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5$. 6.3.1.2 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 - 36}{x + 3} = -24$. 6.3.1.3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2$.

6.3.2 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^3 + x + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 5x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 7x^2 + 2}{2x^3 - x - 12}$.

6.3.3 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3x^2 - 4}{8 - x^3}$.

6.3.4 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{12}{1-x^2} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

6.3.5 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x^2 - 100}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+22} - 5}{x^2 + 3x - 18}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{64+x} - \sqrt{64-x}}{\sqrt[3]{64+x} - \sqrt[3]{64-x}}$.

6.3.6 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{4x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 2x}{3x^2}$;
д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(7x-14)}{2x^2 - 5x + 2}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$.

6.3.7 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2x-1) - \ln(2x-5))$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{2}{x}}$.

6.3.8 Доказать, что функции $\frac{x-1}{x+1}$ и $\sqrt{x}-1$, бесконечно малые при $x \rightarrow 1$,

являются бесконечно малыми функциями одного порядка.

6.3.9 Доказать, что порядок функции $\frac{2x^3}{x-9}$ выше, чем порядок функции x^2 при $x \rightarrow 0$.

6.3.10 Доказать, что функция $\operatorname{tg} x - \sin x$ будет бесконечно малой третьего порядка относительно функции x при $x \rightarrow 0$.

6.3.11 Доказать, что бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции x и $\ln(1 + \sqrt{x \cdot \sin x})$ эквивалентны.

6.3.12 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - \cos 3x}{\arcsin^2 5x}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

6.3.13 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - e^{2x}}{\sin 6x - \sin 2x}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

6.3.14 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

6.3.15 Найти предел $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Найти указанные пределы (при нахождении последнего предела своего варианта необходимо использовать бесконечно малые функции).

6.4.1.1 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 12}{5x^2 + 6x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x - 12}{3x^2 - 3x - 18}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+6} - 1}{x^2 - 4x - 45}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+5} \right)^{4x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 4x}$.

6.4.1.2 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 13}{5x^3 + 3x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^2 + 2x - 20}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x^2 + 2x - 35}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(x-5)}{x^3 - 125}$.

6.4.1.3 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x + 9}{3x^3 - 7x^2 + 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 + 2x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 + 2x - 3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{6x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{8x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{x^3 + 7x^2}$.

6.4.1.4 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 10}{2x^2 - 2x - 25}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{2x^2 - 3x - 35}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{2x^2 - 7x - 4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x+2} \right)^{x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\operatorname{tg} 9x}$.

6.4.1.5 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 3}{4x^2 - 3x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 7x - 30}{x^2 + x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x^2 + 2x - 48}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x+7}{10x-22} \right)^{3x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\ln(1+4x)}$.

6.4.1.6 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 1}{5x^2 + 2x^2 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2x^2 - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - 2x - 15}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x - \sin x}{5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+8x)}{\sin 4x}$.

- 6.4.1.7** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x^2 - x}{-5x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{2x^2 + 3x + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{8 \cdot x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 5x}$.
- 6.4.1.8** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 1}{3x^3 - 5x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 2x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 20} - 6}{2x^2 + 2x - 24}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 6x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x + 1} \right)^{2x-1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$.
- 6.4.1.9** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{3x^3 - 3x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - x - 14}{x^2 + 2x - 8}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x^2 - 3x - 40}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x + 1} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 12x}{3x^2}$.
- 6.4.1.10** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 + 9}{2x^2 - 4x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 27}{-x^2 - x + 12}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 24} - 7}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\operatorname{tg} 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 4}{x + 1} \right)^{x-1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{x^2 + x - 6}$.
- 6.4.1.11** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 10}{2x^2 - 2x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 - 2x + 35}{2x^2 + 3x - 65}$; в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{-x^2 + 3x + 28}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{3x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 8}{x + 2} \right)^{x+6}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{1 - e^{6x}}$.
- 6.4.1.12** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 13}{3x^3 + 3x - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4x + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{4x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 4}{x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 7x}$.
- 6.4.1.13** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 6x + 1}{4x^2 - 2x^2 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 3x^2 - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 + 11} - 6}{x^2 - 2x - 15}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x + 3} \right)^{7x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 2x}$.
- 6.4.1.14** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 5x^3 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - 2x + 8}{2x^2 - 5x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 24} - 5}{3x^2 - 2x - 1}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\sin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 4} \right)^{x-4}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(2x + 1)}$.
- 6.4.1.15** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 - 9}{-x^2 + 4x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x^2 + 27}{x^2 + x - 12}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 - 7} - 3}$;

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{x+1}; \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sin 4x}.$$

$$\mathbf{6.4.1.16} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{6x^2 + 2x^2 - 5}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + x^2 - 3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - 2x - 3};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^x; \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8}{\operatorname{tg}(2-x)}.$$

$$\mathbf{6.4.1.17} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^3 + 2x^2 + 3}{x^3 - 3x + 9}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x^2 + x + 3}{4x^2 + x - 3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x+12}}{-x^2 + x + 12};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+3} \right)^{5x+1}; \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\ln(1+3x)}.$$

$$\mathbf{6.4.1.18} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{6x^3 + 5x^3 + 1}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 - 3x - 6}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 20} - 6}{x^2 - 2x - 8};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-4} \right)^{3x-4}; \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(5x-5)}{2 \operatorname{tg}(4x-4)}.$$

$$\mathbf{6.4.1.19} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 3x^2 - 1}{3x^2 - 6x - 9}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 - 4x - 4}{2x^2 + 3x - 2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{-x^2 + 4x - 4};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x+5} \right)^{x-7}; \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\ln(1+6x)}.$$

$$\mathbf{6.4.1.20} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 9}{3x^2 - 4x + 1}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{-x^2 + x + 6}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 24} - 7};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{4x+1}; \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 3x)}{\ln(1 + \sin 4x)}.$$

$$\mathbf{6.4.1.21} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x + 9}{-5x^3 + 7x^2 + 2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^2 + 3x + 2}{-x^2 + 3x - 2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{-2x^2 + 3x + 9};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-2}{2x+5} \right)^{3x+1}; \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 - 4x}.$$

$$\mathbf{6.4.1.22} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 2x^2 + 13}{2x^3 - 3x - 9}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + x - 2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+9}{4x+3} \right)^{6x-1}; \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 5x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$\mathbf{6.4.1.23} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x - 4}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2 + 7x + 30}{2x^2 + x - 15}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+9} - 2}{x^2 - x - 30};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 2x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+3} \right)^{3x}; \text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^4 - x^2}.$$

- 6.4.1.24** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 + 11}{2x^2 - 6x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 4x - 16}{x^2 + 3x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{x^2 + 4x + 3}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-3}{6x+9} \right)^{5x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 1}{x^2 - x}$.
- 6.4.1.25** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 8x^2 - x}{-2x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 4x + 5}{4x^2 - 3x - 7}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin 3x}{5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-4}{5x+3} \right)^{x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$.
- 6.4.1.26** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 9}{5x^3 + 7x^2 + 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{3x^2 + x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{2x^2 - 3x - 9}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+4} \right)^{4x+1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x \cdot \operatorname{sh} 4x}$.
- 6.4.1.27** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3}{2x^3 - 3x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 2x - 16}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - \sqrt{x^2 - 9}}{-x^2 - 3x + 40}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \cdot \operatorname{tg} 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x} \right)^{2x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 10x}{\operatorname{tg} 2x}$.
- 6.4.1.28** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 3x - 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 + x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4x - 5}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+3} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{sh} 4x}$.
- 6.4.1.29** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{x^2 - 8x - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 3x + 10}{x^2 - x - 20}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{-x^2 + 2x + 8}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{7x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^{x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{ch} 2x - 3}{\operatorname{tg} 6x}$.
- 6.4.1.30** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 8x^2 + x}{-2x + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 + 3x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{4 \cdot x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+3} \right)^{3x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(5x-5)}{\operatorname{tg}(7x-7)}$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 7.1.3), доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ непрерывна в произвольной точке x .

Решение. По определению $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Находим приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 3 \cdot (x + \Delta x)^2 - 4 \cdot (x + \Delta x) + 2 - 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 2 = 3 \cdot \Delta x^2 + (6x - 4) \cdot \Delta x$.

Найдём теперь предел $\Delta f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 \cdot \Delta x^2 + (6x - 4) \cdot \Delta x) = 0,$$

что и доказывает непрерывность заданной функции $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ при любом значении x .

7.2.2 Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 7.1.3), доказать, что функция $f(x) = \sin 2x$ непрерывна в произвольной точке x .

Решение. По определению $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Находим приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin 2(x + \Delta x) - \sin 2x = 2 \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{2} \cdot \cos \frac{2x + 2\Delta x + 2x}{2} = 2 \cdot \sin \Delta x \cdot \cos(2x + \Delta x)$.

Найдём теперь предел $\Delta f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 \cdot \sin \Delta x \cdot \cos(2x + \Delta x)) = 2 \cdot 0 \cdot \cos 2x = 0,$$

что и доказывает непрерывность заданной функции $f(x) = \sin 2x$ при любом значении x .

7.2.3 Выяснить, является ли непрерывной в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}$ функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть x_0 – любое действительное число, отличное от нуля. Тогда, так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2 \neq 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 - \cos 2x) = 1 - \cos 2x_0$, то по утверждению о пределе частного имеем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{1 - \cos 2x_0}{x_0^2} = f(x_0).$$

Следовательно, данная функция непрерывна в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, если $x_0 \neq 0$.

Пусть $x_0 = 0$. Найдём предел функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 x}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2.$$

Поэтому, если $f(0) = A = 2$, данная функция непрерывна в точке $x = 0$, а если $f(0) = A \neq 2$, функция не является непрерывной в точке $x = 0$.

Итак, при $A = 2$ данная функция непрерывна в каждой точке $x \in \mathbf{R}$, а при $A \neq 2$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = 0$.

7.2.4 Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 4, \\ x + 3, & \text{если } x > 4, \end{cases}$ на непрерывность.

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 4)$ и $(4; +\infty)$, так как на этих интервалах она задана элементарными непрерывными функциями. Следовательно, если и существуют точки разрыва, то они могут быть лишь в точках перехода от одной элементарной функции к другой, то есть в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

В точке $x = 1$ значение функции равно $f(1) = x^2|_{x=1} = 1$. Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} x^2 = 1^2 = 1.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) = 1$, то функция $f(x)$ в точке $x = 1$ является непрерывной.

В точке $x = 4$ значение функции равно $f(4) = x^2|_{x=4} = 16$. Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-0} x^2 = 16, \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+0} (x + 3) = 4 + 3 = 7.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x)$, то функция $f(x)$ в точке $x = 4$ имеет разрыв первого рода.

7.2.5 Исследовать функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$ в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Решение. В точке $x = 0$ значение функции равно $f(0) = 2^{\frac{1}{1-0}} = 2$. Предел функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{1-x}} = 2$. Следовательно, справедливо равенство $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$. По определению непрерывности функции в точке, в точке $x = 0$ функция является непрерывной.

Исследуем функцию на непрерывность в точке $x = 1$. В этой точке значение функции не определено. Следовательно, данная точка является точкой разрыва. Найдём односторонние пределы функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left(2^{\frac{1}{+0}} \right) = \left(2^{+\infty} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left(2^{\frac{1}{-0}} \right) = \left(2^{-\infty} \right) = 0.$$

Так как левосторонний предел функции в точке $x = 1$ равен бесконечности, то в данной точке функция $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$ терпит разрыв второго рода.

7.2.6 Исследовать функцию $f(x) = \frac{\cos 4x - 1}{x^2}$.

Решение. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В точке $x = 0$ значение функции не определено. Найдём предел функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{x^2} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4 = -2 \cdot 1^2 \cdot 4 = -8.$$

Так как предел функции в точке $x = 0$ существует, а значение функции в этой точке не существует, то точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва. Доопределим функцию «по непрерывности»

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 4x - 1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ -8, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 7.1.3), доказать, что функции $f(x) = 5^x$ и $\varphi(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ непрерывны в произвольной точке x .

7.3.2 Доказать, что при $x = 3$ функция $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ непрерывна.

7.3.3 Выяснить, является ли непрерывной в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}$ функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x + \sin 2x}{5x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

7.3.4 Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность (в случае наличия точек устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»). Сделать схематический чертёж графика функции, по крайней мере, в окрестности точек разрыва.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ x+4, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq -2, \\ 1+x, & \text{если } -2 < x < 4, \\ 2x-3, & \text{если } x \geq 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = 5^{\frac{7}{3-4x+x^2}} + 2;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{2+3x}{x^2-4};$$

$$\text{д) } f(x) = \frac{\operatorname{tg}(5x-5)}{x^2-1};$$

$$\text{е) } f(x) = \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность (в случае наличия точек устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»). Сделать схематический чертёж графика функции, по крайней мере, в окрестности точек разрыва.

$$7.4.1.1 \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если } x < -1, \\ x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ -x+5, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 7.4.1.2 \quad f(x) = \begin{cases} -2x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 2x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$7.4.1.3 \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x^2-9}} - 4. \quad 7.4.1.4 \quad f(x) = \frac{5x}{x^2-9}.$$

$$7.4.1.5 \quad f(x) = \frac{\sin 3x - \sin 4x}{5x}. \quad 7.4.1.6 \quad f(x) = \frac{1/x}{1/(x-1)}.$$

$$7.4.1.7 \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x < 1, \\ 2x, & \text{если } 1 \leq x < 3, \\ -x+5, & \text{если } x \geq 3. \end{cases} \quad 7.4.1.8 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$7.4.1.9 \quad f(x) = \frac{1-x}{x^2+2x}. \quad 7.4.1.10 \quad f(x) = 3^{\frac{1}{x^2-x}} + 2.$$

$$7.4.1.11 \quad f(x) = \frac{2/x}{1/(x+1)}. \quad 7.4.1.12 \quad f(x) = \frac{\sin 2x + \sin 3x}{4x}.$$

$$7.4.1.13 \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 2, \\ 5-x, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ x^2+2, & \text{если } x > 3. \end{cases} \quad 7.4.1.14 \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$7.4.1.15 \quad f(x) = 5 - 3^{\frac{2}{x^2-16}}. \quad 7.4.1.16 \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2-16}.$$

$$7.4.1.17 \quad f(x) = \frac{\cos 5x - \cos x}{2x^2}. \quad 7.4.1.18 \quad f(x) = \frac{3/(x+1)}{4/(x-3)}.$$

$$7.4.1.19 \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x \leq 1, \\ x, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ x^2, & \text{если } x > 3. \end{cases} \quad 7.4.1.20 \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x < 1, \\ x^4, & \text{если } 1 \leq x \leq 2, \\ 7x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$7.4.1.21 \quad f(x) = 1 + \frac{3+2x}{x^2-3x}. \quad 7.4.1.22 \quad f(x) = 9^{\frac{3}{x^2-1}} + 2.$$

$$7.4.1.23 \quad f(x) = \frac{4/x}{7/(x+5)}. \quad 7.4.1.24 \quad f(x) = \frac{\cos 6x - 1}{3x^2}.$$

$$7.4.1.25 \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq -2, \\ -x^2, & \text{если } -2 < x < 2, \\ -x+5, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 7.4.1.26 \quad f(x) = \begin{cases} 3+2x, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 2x, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

$$7.4.1.27 \quad f(x) = 6 - 2^{\frac{3}{25-x^2}}.$$

$$7.4.1.29 \quad f(x) = \frac{\cos x - 1}{4x^2}.$$

$$7.4.1.28 \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 36} + 5.$$

$$7.4.1.30 \quad f(x) = \frac{9/(x-3)}{2/(x+2)}.$$