

## 19 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Существуют задачи, для решения которых множества действительных чисел недостаточно. Например, квадратное уравнение  $x^2 + 1 = 0$  не имеет корней на множестве действительных чисел, так как не существует действительного числа, квадрат которого равнялся бы  $-1$ :  $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ . Поэтому возникла необходимость расширения множества действительных чисел.

*Комплексными числами* называются всевозможные упорядоченные пары  $z = (x; y)$  действительных чисел, для которых введены операции сложения и умножения по следующим правилам:

$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2), \quad (1)$$

$$(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (2)$$

Множество комплексных чисел обозначается символом  $\mathbf{C}$ .

Действительные числа  $x$  и  $y$  называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа  $z = (x; y)$  и обозначаются символами  $\operatorname{Re} z$  и  $\operatorname{Im} z$  соответственно.

Два комплексных числа  $z_1 = (x_1; y_1)$  и  $z_2 = (x_2; y_2)$  называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, то есть  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ . Отношение неравенства на множестве комплексных не определено.

Из определений (1) и (2) следует, что любое комплексное число  $z = (x; y)$  может быть записано в виде

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; 1) \cdot (y; 0). \quad (3)$$

Установим взаимно однозначное соответствие  $(x; 0) \leftrightarrow x$  между множеством  $\{(x; 0) | x \in \mathbf{R}\}$  и множеством действительных чисел  $\mathbf{R}$ . Из формул (1) и (2) следует, что это соответствие «сохраняет операции»:

$$(x_1; 0) + (x_2; 0) = (x_1 + x_2; 0) \leftrightarrow x_1 + x_2,$$

$$(x_1; 0) \cdot (x_2; 0) = (x_1 x_2; 0) \leftrightarrow x_1 x_2.$$

Комплексное число  $(0; 1)$  обозначается символом  $i$  и называется мнимой единицей (мнимая единица может обозначаться символом  $j$ ), причём  $i^2 = -1$ .

*Комплексным числом в алгебраической форме* называется число вида  $z = x + iy$ , где  $x, y \in \mathbf{R}$ , а  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица, причём  $i^2 = -1$ . Число  $x = \operatorname{Re} z$  называется *действительной частью* комплексного числа  $z = x + iy$ , а число  $y = \operatorname{Im} z$  – мнимой частью этого числа. Множество комплексных чисел

обозначается буквой  $C$ . На комплексной плоскости по оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа, а по оси ординат – мнимая часть этого числа. Так, например, на комплексной плоскости мнимой единице будет соответствовать точка с координатами  $(0,1)$ .

Два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части. Числа  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$  называются сопряжёнными. Если  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  – два комплексных числа, то арифметические операции над ними выполняются по следующим правилам:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

**Пример 1** Даны комплексные числа  $z_1 = 4 - 3i$  и  $z_2 = 2 + 5i$ . Найти  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_2^2$ ,  $z_1^3$ ,  $\bar{z}_1/z_2$ .

Решение. Последовательно вычисляем:

$$z_1 + z_2 = (4 - 3i) + (2 + 5i) = (4 + 2) + (-3 + 5)i = 6 + 2i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 3i) \cdot (2 + 5i) = 8 - 6i + 20i - 15i^2 = 8 + 14i + 15 = 23 + 14i,$$

$$z_2^2 = (2 + 5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i,$$

$$z_1^3 = (4 - 3i)^3 = 64 - 144i + 108i^2 - 27i^3 = 64 - 144i - 108 + 27i = -44 - 117i,$$

$$\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{2 + 5i} = \frac{(4 + 3i) \cdot (2 - 5i)}{(2 + 5i) \cdot (2 - 5i)} = \frac{8 + 6i - 20i - 15i^2}{4 - 25i^2} = \frac{23 - 14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i.$$

Пусть дано комплексное число  $z = x + iy$  в алгебраической форме. На комплексной плоскости ему будет соответствовать точка  $M(x, y)$  с радиус-вектором  $\overrightarrow{OM}$ , где точка  $O$  – начало координат.

Число  $r = |z| = |\overrightarrow{OM}|$  называется *модулем комплексного числа*  $z = x + iy$ .

Угол  $\varphi$ , образованный вектором  $\overrightarrow{OM}$  с положительным направлением оси абсцисс, называется *аргументом комплексного числа*  $z$  и обозначается  $\varphi = \text{Arg } z$ .

Для любого комплексного числа справедливы формулы:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = x/r, \quad \sin \varphi = y/r, \end{aligned} \quad (4)$$

где *главное значение аргумента*  $\varphi = \arg z$  удовлетворяет следующим условиям:  $0 \leq \arg z < 2\pi$  или  $-\pi < \arg z \leq \pi$ .

Любое комплексное число  $z = x + iy$  может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (5)$$

Используя формулу Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , комплексное число может быть представлено в показательной форме

$$z = re^{i\varphi}. \quad (6)$$

Если  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$ , то справедливы формулы

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (7)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = r_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (8)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (9)$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i}, \quad k = \overline{0; n-1}. \quad (10)$$

Формула (9) называется *формулой Муавра*. Для нахождения корня  $n$ -ой степени из комплексного числа используется формула (10), дающая  $n$  значений этого корня, при этом под корнем  $\sqrt[n]{r}$  понимается арифметический корень.

**Пример 2** Данные числа  $z_1 = \sqrt{3} - i$  и  $z_2 = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$  представить в тригонометрической и показательной форме записи комплексных чисел. Выполнить указанные действия над ними:  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_1/z_2$ ,  $z_1^{10}$ ,  $\sqrt[3]{z_2}$ .

Решение. Представим указанные числа в тригонометрической и показательной форме записи. Для числа  $z_1 = \sqrt{3} - i$ , по формулам (4), находим модуль и аргумент комплексного числа. Модуль числа равен  $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ , а аргумент определяем из системы:  $\cos \varphi_1 = \sqrt{3}/2$ ,  $\sin \varphi_1 = -1/2$ , то есть  $\varphi_1 = 11\pi/6$ . По формулам (5) и (6) получаем необходимые записи числа  $z_1 = \sqrt{3} - i$ :  $z_1 = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}$ . Аналогично,  $z_2 = 6 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 6e^{\frac{3\pi}{4}i}$ . Для нахождения  $z_1 \cdot z_2$ ,  $z_1/z_2$ ,  $z_1^{10}$ ,  $\sqrt[3]{z_2}$  воспользуемся формулами (7) – (10):

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 6 \cdot \left( \cos \left( \frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) \right) = 12 \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = 12e^{\frac{7\pi}{12}i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{6} \cdot \left( \cos \left( \frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{3} \left( \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right) = \frac{1}{3} e^{\frac{13\pi}{12}i},$$

$$z_1^{10} = 2^{10} \cdot \left( \cos \left( 10 \cdot \frac{11\pi}{6} \right) + i \sin \left( 10 \cdot \frac{11\pi}{6} \right) \right) = 1024 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1024 e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

$$\omega_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{6} \left( \cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}i}, k = 0, 1, 2.$$

$$\text{В частном случае, если значение } k = 0, \text{ то } \omega_0 = \sqrt[3]{6} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

$$\text{Если же значение } k = 1, \text{ то } \omega_1 = \sqrt[3]{6} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{11\pi}{12}i}. \text{ Если } k = 2, \text{ то}$$

$$\omega_2 = \sqrt[3]{6} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{6} e^{\frac{19\pi}{12}i}.$$

*Многочленом  $n$ -ой степени называется функция вида*

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (11)$$

где  $z \in \mathbb{C}$ ,  $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n$  – коэффициенты многочлена, вообще говоря, комплексные,  $n \in \mathbb{N}$ . Уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad (12)$$

называется алгебраическим уравнением  $n$ -ой степени. Число  $z_0$ , для которого  $P_n(z_0) = 0$ , называется *корнем* многочлена (11) или уравнения (12).

**Теорема Гаусса (основная теорема алгебры).** Всякий многочлен ненулевой степени имеет, по крайней мере, один корень (вообще говоря, комплексный).

Если учесть кратность корней, основная теорема алгебры может быть уточнена следующим образом: *многочлен  $n$ -ой степени имеет ровно  $n$  корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

**Пример 3** Решить уравнение  $z^2 + 6z + 13 = 0$ .

Решение.  $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 = 16i^2$ ,  $z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$ .

**Пример 4** Найти корни многочлена  $z^6 + 2z^3 + 1$  и разложить его на множители.

Решение. Так как  $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$ , то корнями этого многочлена являются корни третьей степени из числа  $-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$ :  $\omega_1 = -1$ ,  $\omega_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\omega_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ . При этом каждый корень имеет кратность  $k = 2$ .

Разложение многочлена на линейные множители имеет вид:

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z + 1)^2 \left( z - \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \left( z - \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2.$$

## 20 ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

**Определение 1** Числовой последовательностью называется функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , областью определения которой является множество натуральных чисел, множеством значений – некоторое подмножество действительных чисел.

Число  $f(n)$  называется  $n$ -м членом последовательности и обозначается символом  $x_n$ , а формула  $x_n = f(n)$  называется формулой общего члена последовательности  $(x_n)$ .

**Определение 2** Числовая последовательность  $(x_n)$  называется *возрастающей (убывающей)*, если для любого натурального  $n$  выполняется неравенство  $x_{n+1} > x_n$  ( $x_{n+1} < x_n$ ).

**Определение 3** Числовая последовательность  $(x_n)$  называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для любого натурального  $n$  выполняется неравенство  $x_{n+1} \geq x_n$  ( $x_{n+1} \leq x_n$ ).

**Определение 4** Числовая последовательность  $(x_n)$  называется *ограниченной сверху*, если существует число  $M$  такое, что для любого натурального  $n$  выполняется неравенство  $x_n \leq M$ .

**Определение 5** Числовая последовательность  $(x_n)$  называется *ограниченной снизу*, если существует число  $m$  такое, что для любого натурального  $n$  выполняется неравенство  $x_n \geq m$ .

**Определение 6** Числовая последовательность  $(x_n)$  называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, то есть если существуют числа  $M$  и  $m$  такие, что для любого натурального  $n$  выполняется неравенство  $m \leq x_n \leq M$ .

**Теорема 1** Числовая последовательность  $(x_n)$  является ограниченной тогда и только тогда, когда существует число  $L$  такое, что для любого натурального  $n$  выполняется неравенство  $|x_n| \leq L$ .

**Определение 7** Число  $a$  называется пределом числовой последовательности  $(x_n)$ , если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое натуральное число  $n_0$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех натуральных чисел  $n$  больших  $n_0$  все члены последовательности будут попадать в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ .

Используя символы математической логики, определение предела числовой последовательности записывается в виде:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}), (\forall n > n_0) \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

**Определение 8** Числовая последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Свойства сходящихся последовательностей:

- 1) сходящаяся последовательность имеет единственный предел;
- 2) если последовательность сходится, то она ограничена;
- 3) любая ограниченная монотонная последовательность сходится;
- 4) любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу;
- 5) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$ , то, начиная с некоторого номера  $N$ , все члены последовательности сохраняют знак числа  $a$ ;
- 6) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  и  $a < b$ , то, начиная с некоторого номера  $N$ , выполняется неравенство  $x_n < y_n$ ;
- 7) если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  и начиная с некоторого номера  $N$ ,  $x_n \leq y_n$ , то  $a \leq b$ ;
- 8) если для всех членов последовательностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  и  $(z_n)$  выполняется неравенство  $x_n \leq z_n \leq y_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

**Определение 9** Числовая последовательность  $(\alpha_n)$  называется *бесконечно малой числовой* последовательностью, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . Числовая последовательность  $(x_n)$  называется *бесконечно большой* числовой последовательностью, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

**Теорема 2** Если числовая последовательность  $(\alpha_n)$  является бесконечно малой числовой последовательностью, то последовательность  $(1/\alpha_n)$  является бесконечно большой числовой последовательностью.

**Теорема 3** Если числовая последовательность  $(x_n)$  является бесконечно большой числовой последовательностью, то последовательность  $(1/x_n)$  является бесконечно малой числовой последовательностью.

**Теорема 4** Для того чтобы числовая последовательность  $(x_n)$  сходилась, необходимо и достаточно, чтобы её можно представить в виде некоторого числа и бесконечно малой числовой последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \leftrightarrow x_n = a + \alpha_n.$$

**Определение 10** Суммой, разностью, произведением и частным последовательностей  $(x_n)$  и  $(y_n)$  называются последовательности  $(x_n + y_n)$ ,  $(x_n - y_n)$ ,  $(x_n \cdot y_n)$ ,  $(x_n / y_n)$  соответственно (при частном предполагается, что все члены последовательности  $(y_n)$  отличны от нуля). Произведением последовательности  $(x_n)$  на число  $\alpha$  называется числовая последовательность  $(\alpha \cdot x_n)$ , полученная путём умножения на  $\alpha$  каждого члена последовательности  $(x_n)$ .

**Теорема 5** Если числовые последовательности  $(x_n)$  и  $(y_n)$  сходятся и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \cdot a;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right] = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}.$$

В теореме 5 пункты 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей. При вычислении пределов условия теоремы могут не выполняться, то есть возникают неопределённости вида  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ ,  $\left( \frac{0}{0} \right)$ ,  $(0 \cdot \infty)$ ,  $(\infty - \infty)$ ,  $(1^\infty)$ ,  $(0^0)$ ,  $(\infty^0)$ . Раскрыть неопределённость — означает найти предел.

Приведём признаки сходимости числовых последовательностей.

**Теорема 6** Если числовая последовательность не убывает и ограничена сверху, то она сходится.

**Теорема 7** Если числовая последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она сходится.

Данные признаки применяются для доказательства *второго замечательного предела*.

**Второй замечательный предел:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

где  $e = 2,71828182845\dots$

Второй замечательный предел используется при раскрытии неопределённости типа  $(1^\infty)$ .

**Пример 1** Вычислить предел числовой последовательности  $x_n = \frac{4n^3 + 5n + 1}{7n^3 + n^2 - 2}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 5n + 1}{7n^3 + n^2 - 2} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \left[ \begin{array}{l} \text{разделим числитель и} \\ \text{знаменатель на их старшую} \\ \text{степень переменной } n \end{array} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{7 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}} = \frac{4 + 0 + 0}{7 + 0 - 0} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

**Пример 2** Вычислить предел числовой последовательности  $y_n = \frac{5n^4 - 3n^2 + 3}{8n^7 + n^3 + 9}$ .

$$\text{Решение. } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 3n^2 + 3}{8n^7 + n^3 + 9} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n^3} - \frac{3}{n^5} + \frac{3}{n^7}}{8 + \frac{1}{n^4} + \frac{9}{n^7}} = \frac{0}{8} = 0.$$

**Пример 3** Вычислить предел числовой последовательности

$$z_n = \frac{2 - 3n^4 - 4n^3}{6n^2 + 5}.$$

Решение.  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3n^4 - 4n^3}{6n^2 + 5} = \left( \frac{-\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^4} - 3 - \frac{4}{n}}{\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n^4}} = \left( \frac{-3}{0} \right) = -\infty.$

**Пример 4** Вычислить предел числовой последовательности

$$a_n = \sqrt{n^2 + 9n} - n.$$

Решение.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 9n} - n) = \left[ \begin{array}{l} \text{домножаем и делим на выраже-} \\ \text{ние, сопряженное данному} \end{array} \right] =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 9n} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 9n} + n)}{\sqrt{n^2 + 9n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{\sqrt{n^2 + 9n} + n} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{1 + \frac{9}{n}} + 1} = \frac{9}{2}.$$

**Пример 5** Вычислить предел числовой последовательности

$$b_n = \left( \frac{3n - 5}{3n - 9} \right)^{6n+3}.$$

Решение. Для нахождения предела числовой последовательности воспользуемся вторым замечательным пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n - 5}{3n - 9} \right)^{6n+3} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3n - 5}{3n - 9} - 1 \right)^{6n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{3n - 9} \right)^{6n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\frac{3n - 9}{4}} \right)^{\frac{3n - 9}{4}} \right)^{\frac{4(6n+3)}{3n - 9}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n + 12}{3n - 9}} = e^{\frac{24}{3}} = e^8. \end{aligned}$$

## 21 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , то есть на множестве  $\overset{o}{U}_\delta(x_0) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ . В точке  $x_0$  значение функции  $y = f(x)$  может быть не определено. Дадим определения Коши и Гейне предела функции в точке.

**Определение 1** Число  $a$  называется *пределом функции*  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое положительное число  $\delta$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех чисел  $x$  из проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , все значения функции будут попадать в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ .

Используя символы математической логики, определение предела функции в точке по Коши записывается в виде:

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{def}{\leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta(\varepsilon) > 0), (\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

**Определение 2** Число  $a$  называется *пределом функции*  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любой последовательности точек  $x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ , сходящейся к точке  $x_0$ , последовательность соответствующих значений функций  $f(x_n)$  сходится к точке  $a$ .

Используя символы математической логики, определение предела функции в точке по Гейне записывается в виде:

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{def}{\leftrightarrow} \forall x_n : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a. \quad (2)$$

**Определение 3** Предел функции  $y = f(x)$  при значении  $x \rightarrow x_0$  называется бесконечным, если для любого положительного числа  $M$  существует положительное число  $\delta$ , такое, что для всех значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - x_0| < \delta$ , будет выполняться неравенство  $|f(x)| > M$ .

Если функция  $y = f(x)$  стремится к бесконечности при значении  $x \rightarrow x_0$ , то её называют *бесконечно большой функцией* и пишут  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \leftrightarrow (\forall M > 0), (\exists \delta > 0), (\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \rightarrow |f(x)| > M. \quad (6.1.3)$$

Если функция  $y = f(x)$  стремится к бесконечности при значении  $x \rightarrow x_0$  и при это принимает только положительные или только отрицательные значения, то записывают соответственно:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

**Определение 6.1.4** Число  $a$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если для любого положительного  $\varepsilon$  существует положительное число  $M$ , такое, что неравенство  $|f(x) - a| < \varepsilon$  выполняется для всех значений переменной  $x$ , при которых  $x > M$ :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0), (\exists M > 0), (\forall x > M) \rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \quad (4)$$

Геометрически это означает, что график функции  $y = f(x)$  будет находится в полосе, ограниченной прямыми  $y = a - \varepsilon$  и  $y = a + \varepsilon$ , при любом  $x > M$ . Аналогично определяется предел функции при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow \infty$ .

Существуют функции, которые при неограниченном увеличении аргумента также неограниченно возрастают. В этом случае пишут  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Свойства предела функции:

- 1) если функция имеет предел в точке, то он единственен;
- 2) функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки;
- 3) если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0 (< 0)$ , то существует такая проколота окрестность точки  $x_0$ , в которой  $f(x) > 0 (f(x) < 0)$ ;
- 4) если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = a$  и в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  имеет место неравенство  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ .

Если в бесконечно малой окрестности точки  $x_0$  выполняется неравенство  $x < x_0$ , то предел функции называется левосторонним пределом  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ , если же выполняется неравенство  $x > x_0$ , то правосторонним пределом  $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ .

**Теорема 1** Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  имеют конечные пределы в точке  $x_0$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = b$ , то:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a \pm b$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a \cdot b$ ;

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \cdot a;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right) = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0 \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{a}{b}.$$

В теореме 1 пункты 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей. При вычислении пределов условия теоремы могут не выполняться, то есть возникают неопределённости вида  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ ,  $\left( \frac{0}{0} \right)$ ,  $(0 \cdot \infty)$ ,  $(\infty - \infty)$ ,  $(1^\infty)$ ,  $(0^0)$ ,  $(\infty^0)$ . Раскрыть неопределённость – означает найти предел.

**Первый замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Второй замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \text{ или } \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

**Третий замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e.$$

**Четвёртый замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

**Пятый замечательный предел:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a.$$

При вычислении пределов вида  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ , используется второй замечательный предел.

**Определение 5** Функция  $y = f(x)$  называется *бесконечно большой функцией* в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

**Определение 6** Функция  $y = \alpha(x)$  называется *бесконечно малой функцией* в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

**Теорема 2** Если  $\alpha(x)$  бесконечно малая функция, то  $1/\alpha(x)$  является бесконечно большой функцией.

**Теорема 3** Если  $f(x)$  бесконечно большая функция, то  $1/f(x)$  является бесконечно малой функцией.

**Теорема 4** Для того чтобы число  $a$  было пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство  $f(x) = a + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  – бесконечно малая функция в точке  $x_0$ .

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leftrightarrow \left( f(x) = a + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \right).$$

Бесконечно малые функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C_1$ . Если  $C = 0$ , то  $\alpha(x)$  называют *бесконечно малой более высокого порядка малости* чем  $\beta(x)$ . При значении  $C \neq 0$ , то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то бесконечно малые функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  в точке  $x_0$

называются *эквивалентными бесконечно малыми функциями*:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ . Например, в точке  $x = 0$  эквивалентными будут функции:  $\sin cx \sim cx$ ,  $\operatorname{tg} cx \sim cx$ ,  $\arcsin cx \sim cx$ ,  $\operatorname{arctg} cx \sim cx$ ,  $1 - \cos x \sim x^2/2$ ,  $e^x - 1 \sim x$ ,  $a^x - 1 \sim x \ln a$ ,  $\ln(1+x) \sim x$ ,  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \sim x$ ,  $(1+x)^{ax} \sim ax + 1$ ,  $\operatorname{sh} x \sim x$ ,  $\operatorname{ch} x - 1 \sim x^2/2$ .

**Теорема 5** Предел отношения бесконечно малых функций  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  в точке равен пределу отношения им бесконечно малых функций  $\alpha^*(x)$  и  $\beta^*(x)$ , то есть справедливы предельные равенства:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^*(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}. \quad (5)$$

**Пример 1** Доказать, исходя из определения предела функции, что  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

Решение. Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2$ . Область определения функции является множество действительных чисел. Пусть  $\varepsilon$  – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - 2| < \delta$ , будет выполняться неравенство  $|x^2 - 4| < \varepsilon$ .

Если  $|x - 2| < \delta$ , то  $|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4 < \delta + 4$  и  $|x^2 - 4| = |x - 2| \times |x + 2| < \delta \cdot (\delta + 4)$ . Для выполнения неравенства  $|x^2 - 4| < \varepsilon$  достаточно потребовать, чтобы  $\delta \cdot (\delta + 4) = \varepsilon$ , то есть  $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$ , откуда  $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$  (второй корень  $-2 - \sqrt{4 + \varepsilon}$  не подходит, так как  $\delta$  должно быть положительным).

Таким образом, для любого  $\varepsilon$  найдено такое  $\delta$ , что из неравенства  $|x - 2| < \delta$  следует неравенство  $|x^2 - 4| < \varepsilon$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

**Пример 2** Вычислить предел функции  $f(x) = \frac{2x - 5}{7x + 1}$  в точке  $x_0 = 3$ .

Решение.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 5}{7x + 1} = \frac{2 \cdot 3 - 5}{7 \cdot 3 + 1} = \frac{1}{22}$ .

**Пример 3** Вычислить предел функции  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8}$  в точке  $x_0 = 2$ .

Решение.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8} = \left( \frac{0}{0} \right) = \left[ \begin{array}{l} \text{раскладываем} \\ \text{числитель и знаменатель} \\ \text{на множители} \end{array} \right] =$   

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 1) \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

**Пример 4** Вычислить предел функции  $f(x) = \frac{\sqrt{5x + 1} - 4}{3x^2 - 10x + 3}$  в точке  $x_0 = 3$ .

Решение.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{3x^2-10x+3} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{5x+1}-4) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x+1-16}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 \cdot (x-3)}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{(3x-1) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \frac{5}{8 \cdot 8} = \frac{5}{64}.$$

**Пример 5** Вычислить предел функции  $f(x) = x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4})$  при значении  $x \rightarrow \infty$ .

Решение.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4}) \right) = (\infty - \infty) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4}) \cdot (\sqrt{x^5+4} + \sqrt{x^5-4})}{(\sqrt{x^5+4} + \sqrt{x^5-4})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5+4} + \sqrt{x^5-4}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{4}{x^5}} + \sqrt{1-\frac{4}{x^5}}} = \frac{8}{1+1} = 4.$$

**Пример 6** Вычислить предел функции  $f(x) = \frac{\cos 14x - \cos 8x}{x^2}$  в точке  $x_0 = 0$ .

Решение. При нахождении предела функции воспользуемся первым замечательным пределом  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 14x - \cos 8x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin 11x}{x^2} =$$

$$= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \frac{\sin 11x}{11x} \cdot 11 \right) = -2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 11 = -66.$$

**Пример 7** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{-5x} - 1}$ , используя эквивалентные бесконечно малые функции.

Решение. Поскольку  $\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$  при  $x \rightarrow 0$ , а  $e^{-5x} - 1 \sim (-5x)$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{-5x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-5x} = -\frac{2}{5}.$$

## 22 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

**Определение 1** Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0$ , если выполняется три условия:

- 1) существует значение функции в этой точке  $f(x_0)$ ;
- 2) существует предел функции в этой точке  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Определение 2** Точка  $x_0$  называется *точкой разрыва* для функции  $y = f(x)$ , если хотя бы одно из условий непрерывности функции в этой точке нарушается.

**Определение 3** Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0$ , если малые приращения функции вызывают малые приращения аргумента, то есть  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$ .

**Определение 4** Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Приведём теоремы о непрерывности функций, которые характеризуют функции, полученные в результате арифметических операций над непрерывными функциями.

**Теорема 1** Функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

**Теорема 2** Если функция непрерывна в точке, то существует окрестность точки в которой функция сохраняет знак значения функции в точке.

**Теорема 3** Многочлен  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  является непрерывной функцией на множестве действительных чисел.

**Теорема 4** Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ , то в этой точке будут непрерывны функции  $f_1(x) \pm f_2(x)$  и  $f_1(x) \cdot f_2(x)$ . Если, при этом  $f_2(x_0) \neq 0$ , то в точке  $x_0$  будет непрерывна функция  $f_1(x)/f_2(x)$ .

**Теорема 5** Если функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна на некотором множестве  $D$ , а  $E$  – множество её значений, то на множестве  $E$  будет монотонна и непрерывна обратная к ней функция  $x = f^{-1}(x)$ .

**Теорема 6** Элементарные функции непрерывны в своей области определения.

**Теорема 7 (Вейерштрасса).** Непрерывная на отрезке функция достигает на нём точной верхней и точной нижней граней.

**Теорема 8 (Больцано–Коши о промежуточном значении).** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ ,  $A < B$ , то для любого значения  $C$ , такого, что  $A \leq C \leq B$ , существует точка  $c \in [a; b]$ , для которой  $f(c) = C$ .

**Определение 5** Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ .

Проведём классификацию точек разрыва:

- 1) если  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ , то  $x_0$  – *точка разрыва первого рода*;
- 2) если хотя бы один из пределов левосторонний или правосторонний в точке  $x_0$  не существует, то  $x_0$  – *точка разрыва второго рода*;
- 3) если  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ , а значение функции в этой точке не существует, то точка  $x_0$  – *точка устранимого разрыва*.

В случае устранимого разрыва можно доопределить функцию «по непрерывности», положив значение функции в ней равным пределу функции в точке разрыва.

**Определение 6** Функция  $y = f(x)$  называется *кусочно-непрерывной* на отрезке  $[a; b]$ , если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых эта функция имеет разрыв первого рода или устранимый разрыв, и, кроме того, она имеет односторонние пределы на концах отрезка.

Функция называется *кусочно-непрерывной на числовой прямой*, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке прямой.

Среди множества непрерывных функций выделяются равномерно непрерывные функции.

**Определение 7** Функция  $y = f(x)$  называется *равномерно-непрерывной* на множестве  $D \subset \mathbf{R}$ , если для любого положительного  $\varepsilon$  найдётся положительное число  $\delta$ , такое, что для любых  $x_1, x_2 \in D$ , удовлетворяющих условию  $|x_1 - x_2| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

**Теорема 9 (Кантора).** Функция, непрерывная на отрезке, равномерно-непрерывна на этом отрезке.

**Пример 1** Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 3), доказать, что функция  $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$  непрерывна в произвольной точке  $x$ .

Решение. По определению  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$ .

Находим приращение функции  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 3 \cdot (x + \Delta x)^2 - 4 \cdot (x + \Delta x) + 2 - 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 2 = 3 \cdot \Delta x^2 + (6x - 4) \cdot \Delta x$ .

Найдём теперь предел  $\Delta f(x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 \cdot \Delta x^2 + (6x - 4) \cdot \Delta x) = 0,$$

при любом значении  $x$ , что и доказывает непрерывность заданной функции при любом значении  $x$ .

**Пример 2** Исследовать функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 4, \\ x + 3, & \text{если } x > 4, \end{cases}$$

на непрерывность.

Решение. Функция  $f(x)$  определена и непрерывна на интервалах  $(-\infty; 1)$ ,  $(1; 4)$  и  $(4; +\infty)$ , так как на этих интервалах она задана элементарными непрерывными функциями. Следовательно, если и существуют точки разрыва, то они могут быть лишь в точках перехода от одной элементарной функции к другой, то есть в точках  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 4$ .

В точке  $x = 1$  значение функции равно  $f(1) = x|_{x=1} = 1$ . Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1^2 = 1.$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) = 1$ , то функция  $f(x)$  в точке  $x = 1$  является непрерывной.

В точке  $x = 4$  значение функции равно  $f(4) = x^2|_{x=4} = 16$ . Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16, \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x+3) = 4+3 = 7.$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x)$ , то функция  $f(x)$  в точке  $x=4$  имеет разрыв первого рода.

**Пример 3** Исследовать функцию  $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$  в точках  $x=0$  и  $x=1$ .

Решение. В точке  $x=0$  значение функции равно  $f(0) = 2^{\frac{1}{1-0}} = 2$ . Предел функции в этой точке  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{1-x}} = 2$ . Следовательно, справедливо равенство  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$ . По определению непрерывности функции в точке, в точке  $x=0$  функция является непрерывной.

Исследуем функцию на непрерывность в точке  $x=1$ . В этой точке значение функции не определено. Следовательно, данная точка является точкой разрыва. Найдём односторонние пределы функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left( 2^{\frac{1}{+0}} \right) = \left( 2^{+\infty} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left( 2^{\frac{1}{-0}} \right) = \left( 2^{-\infty} \right) = 0.$$

Так как левосторонний предел функции в точке  $x=1$  равен бесконечности, то в данной точке функция  $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$  терпит разрыв второго рода.

**Пример 4** Исследовать функцию  $f(x) = \frac{\cos 4x - 1}{x^2}$ .

Решение. Область определения функции:  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ . В точке  $x=0$  значение функции не определено. Найдём предел функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{x^2} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4 = -2 \cdot 1^2 \cdot 4 = -8.$$

Так как предел функции в точке  $x=0$  существует, а значение функции в этой точке не существует, то точка  $x=0$  является точкой устранимого разрыва. Доопределим функцию «по непрерывности».

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 4x - 1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ -8, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$