

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Найти, по определению, производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 4$.

Решение: находим приращение функции в заданной точке, а затем, воспользовавшись определением 8.1.1, вычисляем производную.

$$\Delta f(4) = f(4 + \Delta x) - f(4) = (4 + \Delta x)^2 - 4^2 = 16 + 8\Delta x + \Delta x^2 - 16 = 8\Delta x + \Delta x^2,$$

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8 + \Delta x) = 8.$$

8.2.2 Доказать, что $(\cos 2x)' = -2 \cdot \sin 2x$.

Решение. Для доказательства равенства воспользуемся определением 8.1.1.

$$\begin{aligned} (\cos 2x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x + 2\Delta x) - \cos 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x + 2x}{2} \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{2}}{\Delta x} = \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + \Delta x) \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(2x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -2 \sin 2x \cdot 1 = -2 \sin 2x. \end{aligned}$$

8.2.3 Найти производные указанных функций:

а) $y = 7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x$; б) $y = \operatorname{tg} x \cdot 5^x$; в) $y = \frac{\cos x}{e^x}$.

Решение.

а) $y' = \left(7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x \right)' = 35x^4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}} + 4\cos x$;

б) $y' = (\operatorname{tg} x \cdot 5^x)' = (\operatorname{tg} x)' \cdot 5^x + (5^x)' \cdot \operatorname{tg} x = \frac{5^x}{\cos^2 x} + 5^x \cdot \ln 5 \cdot \operatorname{tg} x$;

в) $y' = \left(\frac{\cos x}{e^x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot e^x - (e^x)' \cdot \cos x}{(e^x)^2} = \frac{-\sin x \cdot e^x - e^x \cdot \cos x}{e^{2x}} = -\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$.

8.2.4 Найти производные указанных функций:

а) $y = e^{\sin^5 7x}$; б) $y = \cos^4 9x \cdot 5^{x^2}$; в) $y = \frac{\sin^3 8x}{(x^2 + 4)^3}$.

Решение.

а) $y' = (e^{\sin^5 7x})' = e^{\sin^5 7x} \cdot (\sin^5 7x)' = e^{\sin^5 7x} \cdot 5 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot (7x)' =$
 $= e^{\sin^5 7x} \cdot 5 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot 7 = 35 \cdot e^{\sin^5 7x} \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x$;

б) $y' = (\cos^4 9x \cdot 5^{x^2})' = (\cos^4 9x)' \cdot 5^{x^2} + (5^{x^2})' \cdot \cos^4 9x =$

$$= 4\cos^3 9x (\cos 9x)' 5^{x^2} + 5^{x^2} \ln 5 (x^2)' \cos^4 9x = 5^{x^2} \cos^3 9x (-36\sin 9x + 2x \ln 5 \cos 9x);$$

$$\begin{aligned} \text{в) } y' &= \left(\frac{\sin^3 8x}{(x^2 + 4)^3} \right)' = \frac{(\sin^3 8x)' \cdot (x^2 + 4)^3 - ((x^2 + 4)^3)' \cdot \sin^3 8x}{((x^2 + 4)^3)^2} = \\ &= \frac{24\sin^2 8x \cos 8x (x^2 + 4)^3 - 6x(x^2 + 4)^2 \sin^3 8x}{((x^2 + 4)^3)^2} = \frac{6\sin^2 8x (4\cos 8x (x^2 + 4) - x \sin 8x)}{(x^2 + 4)^4}. \end{aligned}$$

8.2.5 Найти эластичность спроса s относительно цены p , если $s(p) = 4 + 8p - 2p^2$, при значении $p = 1$ и $p = 3$ у. е.

Решение. Находим производную $s'(p) = (4 + 8p - 2p^2)' = 8 - 4p$. Тогда эластичность спроса относительно цены равна $E_s(p) = \frac{p}{s} \cdot s' = \frac{8p - 4p^2}{4 + 8p - 2p^2}$.

При значении $p = 1$ получаем, что эластичность принимает значение, равное $E_s(p) = 0,4$. Это означает, что если цена товара возрастёт на 1 %, то есть с 1 у. е. до 1,01 у. е., то спрос увеличится на 0,4 %.

При значении $p = 3$ получаем, что эластичность принимает значение, равное $E_s(p) = -1,2$. Это означает, что если цена товара возрастёт на 1 %, то есть с 1 у. е. до 3,01 у. е., то спрос уменьшится на 1,2 %.

8.2.6 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - x$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. Так как $y' = 2x - 1$, то $y'(3) = 5$. Значение функции в заданной точке равно $y(3) = 6$. Для записи уравнения касательной воспользуемся уравнением (8.1.2): $y - 6 = 5 \cdot (x - 3)$ или $5x - y - 9 = 0$. Для записи уравнения нормали воспользуемся уравнением (8.1.3): $y - 6 = -\frac{1}{5}(x - 3)$ или $x + 5y - 33 = 0$.

8.2.7 Найти производную функции y , заданной неявно, следующим уравнением: $3x^2 - 4y^3 + 5x^3y^4 = 6$.

Решение. Дифференцируем обе части заданного выражения, считая y функцией от переменной x :

$$\begin{aligned} (3x^2 - 4y^3 + 5x^3y^4)'_x &= 6'_x \\ 6x - 12y^2y' + 15x^2y^4 + 20x^3y^3y' &= 0 \end{aligned}$$

Из этого равенства выражаем y' :

$$y' = \frac{6x + 15x^2y^4}{12y^2 - 20x^3y^3}.$$

8.2.8 Найти производную функции $y = x^{\sin 2x}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем $\ln y = \sin 2x \ln x$. Дифференцируем обе части последнего равенства по переменной x : $(\ln y)'_x = (\sin 2x)'_x \ln x + \sin 2x (\ln x)'_x$ или $\frac{y'}{y} = 2 \cdot \cos 2x \cdot \ln x + \sin 2x \cdot \frac{1}{x}$.

Окончательно имеем

$$y' = y \cdot \left(2 \cdot \cos 2x \cdot \ln x + \frac{\sin 2x}{x} \right) = x^{\sin 2x} \cdot \left(2 \cdot \cos 2x \cdot \ln x + \frac{\sin 2x}{x} \right).$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Воспользовавшись определением производной, найти производную функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

8.3.2 Доказать, используя определение производной функции в произвольной точке, что $(\sin 3x)' = 3 \cdot \cos 3x$, а $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$.

8.3.3 Найти производные указанных функций:

а) $y = 4x^3 + 5\sqrt{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^7}} + 4\ln x - 2^x$; б) $y = 2\cos x - 3\operatorname{ch} x + e$; в) $y = e^x \operatorname{sh} x$;

г) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{arctg} x$; д) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}$; е) $y = \frac{\sin x}{3^x}$; ж) $y = x^3 \cdot \sin x + \frac{\arccos x}{\sqrt{x}}$.

8.3.4 Найти эластичность спроса s относительно цены p , если $s(p) = 8 + 4p - 2p^2$, при значении $p = 1$ и $p = 12$ у. е. Дать экономическую интерпретацию полученных значений эластичности.

8.3.5 Найти производные указанных функций:

а) $y = \sin^3 5x$; б) $y = 4^{\cos^3 6x}$; в) $y = \ln^2(e^{-3x} + \sqrt{\sin 3x})$; г) $y = (5^{x^3} - \operatorname{ctg}^2 3x)^2$;

д) $y = \operatorname{tg}^2 9x \cdot e^{x^2 + 2x + 3}$; е) $y = \arcsin^3 5x \cdot \cos^2 x$; ж) $y = \frac{\operatorname{ch}^2 x^3}{\sin^4 x}$; з) $y = \frac{\operatorname{ctg}^5 3x}{\cos^2 \sqrt{x}}$.

8.3.6 Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt{x^3 + 1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

8.3.7 Найти все точки графика функции $y = (x + 2)/(x + 1)$, в каждой из которых касательная к этому графику образует угол 135° с положительным направлением оси абсцисс.

8.3.8 Найти угол между графиками функций $y = x^3 - x$ и $y = 12/x$ в точках их пересечения.

8.3.9 Найти производные функции y , заданных неявно следующими уравнениями

а) $\sin x^2 + \cos y^3 - e^{2x+3y} = 5$; б) $x^4 y^5 + \arcsin \frac{x^2}{y^3} = \pi$; $\frac{x^2}{y^3} - \cos(e^{4x-2y}) = \ln x^3$.

8.3.10 Найти производные указанных функций:

$$\text{a) } y = (\cos 2x)^{\sin 3x}; \text{ б) } y = (x^2 + 9)^{\operatorname{tg} 5x}; \text{ в) } y = (\sqrt{x})^{\operatorname{ctg} 2x}; \text{ г) } y = (2x + 1)^{(3x+2)(4x+3)}.$$

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Продифференцировать заданные функции.

$$8.4.1.1 \quad \text{a) } y = \sin 2x \cdot \ln 8x - \frac{5 \operatorname{tg} 7x}{\cos 4x}; \quad \text{б) } y = (\cos 5x)^{\arcsin 4x}.$$

$$8.4.1.2 \quad \text{a) } y = \sin^2 2x \cdot \cos 8x + \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 4x}}{\ln x^2}; \quad \text{б) } y = (\operatorname{cth} 2x)^{\arcsin 3x}.$$

$$8.4.1.3 \quad \text{a) } y = \sin 3x \cdot \cos^2 3x + \frac{4e^{\operatorname{sh} 5x}}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \text{б) } y = (\cos 2x)^{\ln 3x}.$$

$$8.4.1.4 \quad \text{a) } y = x^2 \cdot \cos^3 4x - \frac{\sin 2x}{\ln 8x}; \quad \text{б) } y = (\sin 9x)^{\arccos 2x}.$$

$$8.4.1.5 \quad \text{a) } y = 2^{\operatorname{sh} 5x} \cdot \arccos 7x + \frac{e^{3x}}{\sin 2x}; \quad \text{б) } y = (\operatorname{th} 3x)^{\arcsin 9x}.$$

$$8.4.1.6 \quad \text{a) } y = \ln^2 x \cdot \operatorname{arccotg}^4 5x + \frac{(2x+1)^3}{e^{3x}}; \quad \text{б) } y = (\operatorname{sh} 2x)^{\arcsin 7x}.$$

$$8.4.1.7 \quad \text{a) } y = \cos 2x \cdot \operatorname{tg}^2 x - \frac{\operatorname{ch} 8x}{(3x-1)^2}; \quad \text{б) } y = (\cos 2x)^{\operatorname{arccotg} \sqrt{x}}.$$

$$8.4.1.8 \quad \text{a) } y = \sin^2 2x \cdot (3x-1)^2 + \frac{\cos x^3}{\ln(2-x)}; \quad \text{б) } y = (\sqrt{x^3-1})^{\operatorname{arctg} 2x}.$$

$$8.4.1.9 \quad \text{a) } y = e^{3x} \cdot \cos 5x - \frac{(2x+4)^3}{\ln^2 x}; \quad \text{б) } y = (\ln 5x)^{\sin \sqrt{4x-1}}.$$

$$8.4.1.10 \quad \text{a) } y = \operatorname{sh} x^2 \cdot e^{4x^2-1} - \frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} 6x}; \quad \text{б) } y = (\log_2 4x)^{\operatorname{ctg} 6x}.$$

$$8.4.1.11 \quad \text{a) } y = \sin^2 3x \cdot \cos 8x - \frac{\operatorname{ch}^2 4x}{\cos^3 5x}; \quad \text{б) } y = (\operatorname{sh} 11x)^{\operatorname{arctg} 4x}.$$

$$8.4.1.12 \quad \text{a) } y = \operatorname{th}^2 5x \cdot e^{x^3} - \frac{\ln 8x}{\sin 2x}; \quad \text{б) } y = (\operatorname{sh} 9x)^{\operatorname{ctg} x^2}.$$

$$8.4.1.13 \quad \text{a) } y = (3x-1)^3 \cdot \sin 2x + \frac{\operatorname{cth}^2 3x}{\log_2 x^2}; \quad \text{б) } y = (\arcsin 8x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}.$$

$$8.4.1.14 \quad \text{a) } y = \ln \sin x \cdot \operatorname{tg}^2 4x - \frac{e^{3x}}{\cos^3 4x}; \quad \text{б) } y = (\arccos 3x)^{\ln(x^2+1)}.$$

$$8.4.1.15 \quad \text{a) } y = e^{4x} \cdot \operatorname{tg} 6x + \frac{\operatorname{ctg} x^3}{\ln(x^2-1)}; \quad \text{б) } y = (\operatorname{arctg} 3x)^{\sin 3x}.$$

$$8.4.1.16 \quad \text{a) } y = (e^{2x} - x) \sin 3x + \frac{\cos 5x}{\operatorname{arccotg} 4x}; \quad \text{б) } y = (\ln \sqrt{x})^{\operatorname{ctg} 4x}.$$

8.4.1.17	a)	$y = \operatorname{th} 3x \cdot \sin 7x - \frac{\operatorname{ctg} 3x}{(4-2x)^2};$	б)	$y = (\operatorname{ctg} 4x)^{\sqrt[3]{4x-1}}.$
8.4.1.18	a)	$y = \operatorname{ctg} x^2 \cdot \operatorname{arctg} 2x + \frac{\sin 5x}{\cos(2-x^2)};$	б)	$y = (\operatorname{th} \sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 4x}.$
8.4.1.19	a)	$y = \sin 2x \cdot e^{5x} - \frac{\cos 3x}{\arcsin 4x};$	б)	$y = (\operatorname{cth} 5x)^{\arcsin 10x}.$
8.4.1.20	a)	$y = \frac{1}{2} \cos 5x \cdot e^{4x-1} - \frac{(2x-1)^3}{5 \operatorname{tg} 2x};$	б)	$y = (\operatorname{sh} 2x)^{\operatorname{arctg} 4x}.$
8.4.1.21	a)	$y = \cos 2x \cdot \operatorname{tg}^3 x + \frac{2e^{4x}}{\sin 4x};$	б)	$y = (\operatorname{cth} \sqrt{x})^{\sin 2x}.$
8.4.1.22	a)	$y = \operatorname{ctg}^3 x \cdot e^{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{ch} 2x};$	б)	$y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\operatorname{th} 3x}.$
8.4.1.23	a)	$y = \sin^2 5x \cdot \ln 3x + \frac{(2x-3)^4}{\operatorname{ctg} 6x};$	б)	$y = (\operatorname{sh} \sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 2x}.$
8.4.1.24	a)	$y = \cos 4x \cdot \ln^2 \sqrt{x} - \frac{\operatorname{ch} x^2}{\sqrt{6-x}};$	б)	$y = (\operatorname{ctg} 9x)^{\operatorname{th} 7x}.$
8.4.1.25	a)	$y = \operatorname{tg}^2 2x \cdot \ln 3x + \frac{\sin 4x}{\operatorname{ch}(x^2-1)};$	б)	$y = (\arccos 6x)^{\sqrt{2x-3}}.$
8.4.1.26	a)	$y = e^{3x} \cdot \operatorname{arctg} 2x + \frac{e^{4x}}{(2x-4)^2};$	б)	$y = (\operatorname{th} x^2)^{\sqrt[3]{x^2}}.$
8.4.1.27	a)	$y = e^{3x} \cdot \cos 4x - \frac{\sin 6x}{\operatorname{th}(2x-4)};$	б)	$y = (\operatorname{ctg} 5x^2)^{\sin \sqrt{x}}.$
8.4.1.28	a)	$y = e^{2x} \cdot \sin 2x + \frac{\operatorname{tg}(x^2-4)}{\operatorname{ch}(2-x)};$	б)	$y = (\operatorname{tg} 2x^3)^{\ln 4x^2}.$
8.4.1.29	a)	$y = e^{5x} \cdot \cos 4x + \frac{(3x-1)^2}{\sin 3x};$	б)	$y = (\operatorname{ctg} 12x)^{\sin 4x}.$
8.4.1.30	a)	$y = \frac{1}{6} x^3 \cdot e^{\sin 3x} - \frac{e^{5x^2}}{\cos(3x+5x^2)};$	б)	$y = (\sin \sqrt[4]{x^3})^{\cos \sqrt{x}}.$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Найти производные и дифференциалы первого и второго порядка для функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Находим первую производную $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$. Тогда дифференциал первого порядка равен $dy = y'dx = \sin 2x dx$. Находим производную второго порядка $y'' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$. Тогда дифференциал второго порядка равен $d^2y = y''dx^2 = 2\cos 2x dx^2$.

9.2.2 Найти скорость и ускорение точки, совершающей простые гармонические колебания по закону $s = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Решение: Воспользуемся формулами (9.1.3) и (9.1.4).

$$v = \frac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s.$$

9.2.3 Найти производные y'_x и y''_{xx} для функции, заданной уравнениями: $y = e^{10t}$, $x = e^{2t}$.

Решение. Используя формулы (9.1.2) нахождения производных функций, заданных параметрическим образом, имеем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(e^{10t})'_t}{(e^{2t})'_t} = \frac{10e^{10t}}{2e^{2t}} = 5e^{8t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{(x'_t)'_t} = \frac{(5e^{8t})'_t}{(e^{2t})'_t} = \frac{40e^{8t}}{2e^{2t}} = 20e^{6t}.$$

9.2.4 Найти $y^{(5)}$, если $y = e^{4x} \sin 3x$.

Решение. Если $y = uv$, то на основании формулы Лейбница (9.1.1), имеем

$$y^{(5)} = u^{(5)}v + C_5^1 u^{(4)}v' + C_5^2 u'''v'' + C_5^3 u''v''' + C_5^4 u'v^{(4)} + uv^{(5)}. \quad (9.2.1)$$

Полагая в заданной функции $u = e^{4x}$, $v = \sin 3x$, для применения последней формулы нам следует найти первые пять последовательных производных функций u и v :

$$u' = 4e^{4x}; \quad u'' = 16e^{4x}; \quad u''' = 64e^{4x}; \quad u^{(4)} = 256e^{4x}; \quad u^{(5)} = 1024e^{4x};$$

$$v' = 3\cos 3x; \quad v'' = -9\sin 3x; \quad v''' = -27\cos 3x; \quad v^{(4)} = 81\sin 3x; \quad v^{(5)} = 243\cos 3x.$$

Подставляя эти производные в формулу (9.2.1), получим

$$y^{(5)} = 1024e^{4x} \sin 3x + 5 \cdot 256e^{4x} \cdot 3\cos 3x + 10 \cdot 64e^{4x} \cdot (-9\sin 3x) + 10 \cdot 16e^{4x} \times \\ \times (-27\cos 3x) + 5 \cdot 4e^{4x} \cdot 81\sin 3x + e^{4x} \cdot 243\cos 3x = -e^{4x} (3116\sin 3x + 237\cos 3x).$$

9.2.5 Получить формулу для производной n -го порядка функции $y = \ln x$. Доказать методом математической индукции справедливость формулы для любого натурального числа.

Решение. Найдём производные первых порядков и по их виду предположим формулу нахождения производной функции любого порядка.

$$y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}, y''' = \frac{1 \cdot 2}{x^3}, y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, \dots, y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Методом математической индукции докажем, что формула нахождения производной функции $y = \ln x$ имеет вид: $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

1. Проверим справедливость формулы при $n=1$: $y' = (-1)^0 \frac{0!}{x^1} = \frac{1}{x}$ – верно.

2. Предположим, что утверждение справедливо для любого натурального числа k , то есть $y^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$ – истина.

3. Исходя из предположения, что формула справедлива для $n=k$, докажем истинность утверждения для $n=k+1$, то есть $y^{(k+1)} = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$ – истина:

$$y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = \left((-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k} \right)' = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)! \cdot (-k)}{x^{k+1}} = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

По методу математической индукции утверждение справедливо для любого натурального числа

9.2.6 С помощью дифференциала приближённо вычислить значение квадратного корня из 8,88 с точностью до двух знаков после запятой.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и вычислим её значение в точке $x=8,88$, то есть найдём значение функции $f(8,88) = \sqrt{8,88}$. Воспользуемся формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, где $x_0 + \Delta x = x$. Положим, что $x_0 = 9$, тогда $\Delta x = x - x_0 = 8,88 - 9 = -0,12$. Значение функции в точке $x_0 = 9$ равно $f(9) = \sqrt{9} = 3$. Значение производной $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 9$ равно

$$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}. \text{ Следовательно, } \sqrt{8,88} \approx 3 + \frac{1}{6} \cdot (-0,12) = 2,98.$$

9.2.7 Функция общих затрат предприятия определяется эмпирической функцией $C(v) = 1,77v^2 - 0,59v + 6$, которая зависит от объёма продаж v . Определить приближённое значение изменения затрат предприятия при изменении объёмов продаж от 500 условных единиц товара до 525.

Решение. При достаточно малых изменениях объёмов продаж товара изменение затрат предприятия равно $\Delta C(v_0) \approx dC(v_0) = C'(v_0)dv = C'(v_0)\Delta v$. Изменение объёмов продаж составляет $\Delta v = 525 - 500 = 25$ условных единиц товара. Так как $C'(v) = 3,54v - 0,59$, то $C'(500) = 1769,41$. Тогда изменение затрат предприятия, при увеличении объёма продаж на 25 единиц, равно $\Delta C \approx 1769,41 \cdot 25 = 44235,25$.

Вывод: при увеличении объёма продукции на 25 условных единиц товара затраты предприятия увеличатся на 44235,25 условные денежные единицы.

9.3 Задания для решения на практическом занятии

- 9.3.1** Найти производные и дифференциалы первого и второго порядков для указанных функций: а) $y = \operatorname{arctg} 2x$; б) $y = e^{x^2}$; в) $y = \cos^2 5x$.
- 9.3.2** Найти скорость и ускорение материальной точки, совершающей затухающие колебания по закону $x = Ae^{-\lambda t} \sin \omega t$.
- 9.3.3** Найти производные первого и второго порядка для указанных функций: а)
$$\begin{cases} y = \sin^3 2t, \\ x = \cos^3 2t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = \operatorname{arctg} t, \\ x = \ln(1+t^2). \end{cases}$$
- 9.3.4** Найти $y^{(4)}$, если $y = x^4 e^{2x}$.
- 9.3.5** Получить формулу для производной n -го порядка указанных функций. Доказать методом математической индукции справедливость формулы для любого натурального числа.
а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sin x$; в) $y = xe^x$.
- 9.3.6** Используя понятие дифференциала функции, вычислить приближённо указанные значения, с точностью до трёх знаков после запятой:
а) $\cos 62^\circ$; б) $\sqrt{\frac{(2,05)^2 + 5}{(2,05)^2 - 3}}$; в) $\arcsin 0,4991$.
- 9.3.7** Функция общих затрат предприятия определяется эмпирической функцией $C(v) = 3v^2 + v - 15$, которая зависит от объёма продаж v . Определить приближённое значение изменения затрат предприятия при изменении объёмов продаж от 100 условных единиц товара до 105.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

- 9.4.1** Найти производные первого и второго порядка указанных функций.

- | | | | | | |
|-----------------|---|-----------------|--|-----------------|--|
| 9.4.1.1 | $\begin{cases} y = \sqrt{t-5}, \\ x = \ln(t-5). \end{cases}$ | 9.4.1.2 | $\begin{cases} y = \sqrt{2t-7}, \\ x = \sqrt[3]{2t-7}. \end{cases}$ | 9.4.1.3 | $\begin{cases} y = 3e^{4t+3}, \\ x = 4e^{3t+4}. \end{cases}$ |
| 9.4.1.4 | $\begin{cases} y = 10 \sin 2t, \\ x = 5 \cos 2t. \end{cases}$ | 9.4.1.5 | $\begin{cases} y = e^{2t} \sin 2t, \\ x = e^{2t} \cos 2t. \end{cases}$ | 9.4.1.6 | $\begin{cases} y = \operatorname{sh} 3t, \\ x = \operatorname{ch} 3t. \end{cases}$ |
| 9.4.1.7 | $\begin{cases} y = \ln \sin 3t, \\ x = \sin 3t. \end{cases}$ | 9.4.1.8 | $\begin{cases} y = \arcsin t, \\ x = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$ | 9.4.1.9 | $\begin{cases} y = \operatorname{arctg} t, \\ x = \ln(1+t^2). \end{cases}$ |
| 9.4.1.10 | $\begin{cases} y = 5 \cos^2 3t, \\ x = 2 \cos 3t. \end{cases}$ | 9.4.1.11 | $\begin{cases} y = t^3 + 2t^2 - 3, \\ x = \ln t. \end{cases}$ | 9.4.1.12 | $\begin{cases} y = \operatorname{th} t, \\ x = \operatorname{cth} t. \end{cases}$ |
| 9.4.1.13 | $\begin{cases} y = 3 \operatorname{tg} 4t, \\ x = 5 \operatorname{ctg} 4t. \end{cases}$ | 9.4.1.14 | $\begin{cases} y = \sqrt{1-t}, \\ x = 2 \operatorname{tg} \sqrt{1-t}. \end{cases}$ | 9.4.1.15 | $\begin{cases} y = e^{4t^2+2t}, \\ x = 2t^2 + t. \end{cases}$ |
| 9.4.1.16 | $\begin{cases} y = \sqrt[4]{3t-1}, \\ x = \sqrt[5]{3t-1}. \end{cases}$ | 9.4.1.17 | $\begin{cases} y = 9e^{4t-1}, \\ x = 3e^{5t+2}. \end{cases}$ | 9.4.1.18 | $\begin{cases} y = \sqrt[3]{2t-3}, \\ x = \ln(2t-3). \end{cases}$ |

9.4.1.19	$\begin{cases} y = e^{3t} \cos 3t, \\ x = e^{3t} \sin 3t. \end{cases}$	9.4.1.20	$\begin{cases} y = \operatorname{ch} 5t, \\ x = \operatorname{sh} 5t. \end{cases}$	9.4.1.21	$\begin{cases} y = 12 \cos 3t, \\ x = 6 \sin 3t. \end{cases}$
9.4.1.22	$\begin{cases} y = \sqrt{1 - 4t^2}, \\ x = \arcsin 2t. \end{cases}$	9.4.1.23	$\begin{cases} y = \ln(1 + 9t^4), \\ x = \operatorname{arcctg} 3t^2. \end{cases}$	9.4.1.24	$\begin{cases} y = \cos 2t, \\ x = \ln \cos 2t. \end{cases}$
9.4.1.25	$\begin{cases} y = 2t^3 - t^2 + t, \\ x = \ln 3t. \end{cases}$	9.4.1.26	$\begin{cases} y = \operatorname{cth} 3t, \\ x = \operatorname{th} 3t. \end{cases}$	9.4.1.27	$\begin{cases} y = 4 \sin^2 2t, \\ x = 3 \cos 2t. \end{cases}$
9.4.1.28	$\begin{cases} y = 5 \operatorname{tg} \sqrt{2 + 3t}, \\ x = 3\sqrt{2 + 3t}. \end{cases}$	9.4.1.29	$\begin{cases} y = 2t^3 - t^2, \\ x = e^{4t^3 - 2t^2}. \end{cases}$	9.4.1.30	$\begin{cases} y = 2 \operatorname{ctg} 5t, \\ x = 4 \operatorname{tg} 5t. \end{cases}$

9.4.2 С помощью дифференциала функции приближенно вычислить заданные величины с точностью до четырех знаков после запятой.

9.4.2.1	$\sin 28^0.$	9.4.2.2	$\cos 57^0.$	9.4.2.3	$\operatorname{tg} 43^0.$
9.4.2.4	$\operatorname{ctg} 46^0.$	9.4.2.5	$\arcsin 0,43.$	9.4.2.6	$\arccos 0,62.$
9.4.2.7	$\operatorname{arctg} 0,91.$	9.4.2.8	$\operatorname{arcctg} 1,22.$	9.4.2.9	$\ln(e^3 + 0,15).$
9.4.2.10	$\sqrt{15,94}.$	9.4.2.11	$\sqrt[3]{8,15}.$	9.4.2.12	$\sqrt[5]{31,95}.$
9.4.2.13	$5^{2,01}.$	9.4.2.14	$\sqrt[4]{80,78}.$	9.4.2.15	$\lg 100,02.$
9.4.2.16	$\sqrt{\sin 33^0}.$	9.4.2.17	$\cos^3 62^0.$	9.4.2.18	$\operatorname{tg}^2 48^0.$
9.4.2.19	$\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 44^0}.$	9.4.2.20	$\arcsin^2 0,54.$	9.4.2.21	$\arccos^3 0,57.$
9.4.2.22	$\operatorname{arctg}^2 1,05.$	9.4.2.23	$\operatorname{arcctg}^3 0,93.$	9.4.2.24	$\ln(e^4 - 0,25).$
9.4.2.25	$\sqrt{(8,97)^3}.$	9.4.2.26	$\sqrt[3]{(26,75)^2}.$	9.4.2.27	$\sqrt[10]{(1023,99)^9}.$
9.4.2.28	$e^{3,91}.$	9.4.2.29	$\sqrt[4]{(624,87)^5}.$	9.4.2.30	$\lg^2 999,92.$

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Доказать, что все корни производной многочлена

$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$$

действительны и различны.

Решение. Применим теорему Ролля к функции $y = f(x)$ на отрезке $[0; 1]$.

Так как $f(0) = f(1) = 0$ и функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[0; 1]$ и дифференцируемой на интервале $(0; 1)$, то по теореме Ролля существует хотя бы одно число x_1 из интервала $(0; 1)$ такое, что $f'(x_1) = 0$. Аналогично, применяя теорему Ролля к функции $y = f(x)$ на каждом из отрезков $[1; 2]$, $[2; 3]$ и $[3; 4]$, убеждаемся, что внутри каждого из них существует корень уравнения $f'(x) = 0$.

Так как степень многочлена $f'(x)$ равна 4, то он имеет не более четырёх действительных корней. Поэтому все корни x_1, x_2, x_3, x_4 многочлена $f'(x)$ действительны, причём $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3 < x_4 < 4$.

10.2.2 Доказать, что для любых положительных чисел a и b , таких, что $b > a$, и любого натурального числа $n \geq 2$ имеет место неравенство

$$n \cdot (b-a) \cdot a^{n-1} < b^n - a^n < n \cdot (b-a) \cdot b^{n-1}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$, $x > 0$. Тогда

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a}.$$

Так как функция $f(x) = x^n$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемой на интервале $(a; b)$, то по теореме Лагранжа существует точка c из интервала $(a; b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a} = f'(c) = n \cdot c^{n-1}.$$

Учитывая неравенство $a^{n-1} < c^{n-1} < b^{n-1}$, получаем

$$n \cdot a^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < n \cdot b^{n-1}.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство.

10.2.3 Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = \arcsin x$ на отрезке $[-1; 1]$. Найти значение c , при котором выполнено условие (10.1.1)

Решение. Функция определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$. Найдём производную функции $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Производная конечна внутри интервала $(-1; 1)$, а в точках $x = \pm 1$ производная не существует, но это не нарушает условий

применимости теоремы Лагранжа. Следовательно, точка c , удовлетворяющая условию (10.1.1), должна существовать. Найдём эту точку

$$\frac{\arcsin 1 - \arcsin(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}; \quad \frac{\pi/2 - (-\pi/2)}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}},$$

откуда

$$\sqrt{1-c^2} = \frac{2}{\pi}, \text{ или } c = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}.$$

Итак, в данном случае условие (10.1.1) выполняется для двух точек.

10.2.4 Пользуясь формулой (10.1.1), оценить значение $\ln(1+e)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Эта функция дифференцируема всюду при значении $x > 0$ и $f'(x) = 1/x$. Для отрезка $[e; e+1]$ запишем формулу (10.1.1):

$$\ln(1+e) = \ln e + ((e+1) - e) \cdot \frac{1}{c} = 1 + \frac{1}{c},$$

где $e < c < 1+e$.

Оценим выражение $1 + 1/c$ при значении $e < c < 1+e$. Имеем

$$\ln(1+e) = 1 + \frac{1}{c} < 1 + \frac{1}{e}, \text{ так как } c > e \text{ и}$$

$$\ln(1+e) = 1 + \frac{1}{c} > 1 + \frac{1}{1+e}, \text{ так как } c < 1+e.$$

Таким образом,

$$1 + \frac{1}{1+e} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}.$$

Подставляя в эту оценку $e \approx 2,7$, получаем окончательно

$$1,27 < \ln(1+e) < 1,37.$$

10.2.5 Применима ли теорема Коши к функциям $f(x) = \cos x$ и $\varphi(x) = x^3$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$?

Решение. Заданные функции непрерывны на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ и дифференцируемы на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. При этом $f'(x) = -\sin x$, $\varphi'(x) = 3x^2$. В точке $x=0$ значения производных функции равны $f'(0) = \varphi'(0) = 0$. Следовательно, условие теоремы Коши не выполняется.

Покажем, что в этом случае действительно не существует точки c , в которой выполнено равенство (10.1.2). Выпишем выражение, стоящее слева в формуле Коши

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\cos(\pi/2) - \cos(-\pi/2)}{(\pi/2)^3 - (-\pi/2)^3} = \frac{0}{\pi^3/8} = 0.$$

Рассмотрим выражение, стоящее справа в формуле (10.1.2)

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = -\frac{\sin c}{3c^2}.$$

Числитель обращается в нуль на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ только при значении $c = 0$. Но в этой точке

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin c}{3c^2} \right) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin c}{c} \cdot \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3c} \right) = \infty.$$

Таким образом, левая часть равенства (10.1.2) равна нулю, а правая часть в точке $c = 0$ стремится к бесконечности. Следовательно, действительно не существует точки на заданном интервале, в которой можно применить теорему Коши для заданных функций.

10.2.6 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{\ln x} - \frac{5}{\ln x} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$.

Решение.

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(e^{4x-12} - 1)'}{(\sin(2x-6))'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4e^{4x-12}}{2 \cos(2x-6)} = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 2;$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln^2 x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0;$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{\ln x} - \frac{5}{\ln x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x-5)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} 5x = 5;$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = (0)^0 = A$, тогда $\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \cos x)'}{(\sin x)'} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\cos x} = -\frac{0}{1} = 0, \text{ следовательно, } A = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = e^0 = 1.$$

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Не находя производной функции

$$P(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$$

выяснить, сколько действительных корней имеет уравнение $P'(x) = 0$, и указать интервалы, в которых они лежат.

10.3.2 Показать, что функция $f(x) = x^2 - 1$ на отрезке $[-1; 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Найти соответствующее значение c .

10.3.3 На дуге кубической параболы $y = x^3$, заключённой между точками $A(2; 8)$ и $B(4; 64)$, найти точку, касательная в которой параллельна хорде AB .

10.3.4 Доказать, что $e^x > 1 + x$, при $x > 0$.

10.3.5 Проверить условие теоремы Лагранжа для функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

10.3.6 Пользуясь теоремой Лагранжа, оценить значение $\arctg 1,5$.

10.3.7 Записав формулу Коши для функций $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ и $\varphi(x) = x^2 + 4$ на отрезке $[0; 2]$, найти значение c .

10.3.8 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\arcsin 5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{e^{3/x} - 1}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^{3x}}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arctg x\right)}.$$

10.3.9 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tg x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{5}{x}\right); \text{ в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln^3 x); \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right).$$

10.3.10 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin^2 x)^{1/\tg^2 x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x}.$$

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

10.4.1.1 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tg 3x)^{\ctg 3x}.$

10.4.1.2 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{\tg \pi x}.$

10.4.1.3 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\sin \frac{\pi x}{2}\right)^{x^2 - 4}.$

10.4.1.4 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)^{x^2 - 1}.$

10.4.1.5 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 2x}.$

10.4.1.6 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3)^{1/\ln(3-x)}.$

10.4.1.7 $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tg x)^{1/(4x - \pi)}.$

10.4.1.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\sin 7x}.$

10.4.1.9 $\lim_{x \rightarrow 4} (\ln(5 - x))^{\sh(4-x)}.$

10.4.1.10 $\lim_{x \rightarrow 0} (\ch 6x)^{1/\sh 6x}.$

$$10.4.1.11 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\cos(\pi x/4)}.$$

$$10.4.1.13 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$10.4.1.15 \quad \lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \sin x)^{\operatorname{ctg} 5x}.$$

$$10.4.1.17 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{3\pi x}{2}}.$$

$$10.4.1.19 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} 2x} \right)^{\sin 2x}.$$

$$10.4.1.21 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{8x-2\pi}}.$$

$$10.4.1.23 \quad \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{1}{x-9} \right)^{2x-18}.$$

$$10.4.1.25 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 3x)^{1/\operatorname{tg} 2x}.$$

$$10.4.1.27 \quad \lim_{x \rightarrow 8} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8} \right)^{\sin \pi x}.$$

$$10.4.1.29 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\lg(10 + x))^{1/x}.$$

$$10.4.1.12 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)^{\ln x}.$$

$$10.4.1.14 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x)^{x-1}.$$

$$10.4.1.16 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{1/\operatorname{ctg} x}.$$

$$10.4.1.18 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\lg 7x)^{1/x}.$$

$$10.4.1.20 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg} 3x}.$$

$$10.4.1.22 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{th} 3x)^{x^3}.$$

$$10.4.1.24 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)^{2/\ln x}.$$

$$10.4.1.26 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{\ln x^2}.$$

$$10.4.1.28 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\ln \sin x)^{x^2}.$$

$$10.4.1.30 \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2 - x)^{x^3 - 5x + 2}.$$

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

11.2 Примеры решения типовых задач

11.2.1 Разложить многочлен $P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ по степеням двучлена $x - 2$.

Решение. Многочлен имеет производные любого порядка. Поэтому при любом значении переменной можно выразить значение заданной функции по формуле (11.1.1). Находим коэффициенты в разложении. Значение многочлена в точке $x_0 = 2$ равно нулю.

$$P_4'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8; \quad P_4'(2) = 0.$$

$$P_4''(x) = 24x^2 - 30x - 6; \quad P_4''(2) = 30.$$

$$P_4'''(x) = 48x - 30; \quad P_4'''(2) = 66.$$

$$P_4^{(4)}(x) = 48; \quad P_4^{(4)}(2) = 48.$$

$$P_4^{(5)}(x) = 0; \quad P_4^{(5)}(2) = 0.$$

Применим формулу (11.1.1):

$$P_4(x) = 0 + \frac{0}{1!}(x-2) + \frac{30}{2!}(x-2)^2 + \frac{66}{3!}(x-2)^3 + \frac{48}{4!}(x-2)^4;$$

$$P_4(x) = 15 \cdot (x-2)^2 + 11 \cdot (x-2)^3 + 2 \cdot (x-2)^4,$$

$$R_5(x) = 0, \text{ так как } P_4^{(v)}(x) = 0.$$

11.2.2 Для многочлена $4x^4 + x^2 - 3x + 2$ написать формулу Тейлора второго порядка в точке $x_0 = -1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение параметра Θ , которое соответствует следующим значениям аргумента: а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = -1$.

Решение. Находим производные первого, второго и третьего порядка многочлена $f(x) = 4x^4 + x^2 - 3x + 2$:

$$f'(x) = 16x^3 + 2x - 3, \quad f''(x) = 48x^2 + 2, \quad f'''(x) = 96x.$$

Вычисляем значения многочлена, первой и второй производных в точке $x_0 = -1$, а значение третьей производной в точке $x_0 + \Theta(x - x_0) = -1 + \Theta(x + 1)$:

$$f(-1) = 10, \quad f'(-1) = -21, \quad f''(-1) = 50, \quad f'''(x) = 96 \cdot (-1 + \Theta(x + 1)).$$

Подставляя полученные значения в формулу (11.1.1), получаем формулу Тейлора второго порядка разложения заданного многочлена в точке $x_0 = -1$.

$$f(x) = 10 - 21 \cdot (x + 1) + 25 \cdot (x + 1)^2 + 16 \cdot (-1 + \Theta \cdot (x + 1)) \cdot (x + 1)^3.$$

Для нахождения параметра Θ , который соответствует заданным значениям x , подставляем эти числа в последнее равенство. Откуда находим параметр Θ . Для значений $x = 0$ или $x = 1$, параметр Θ равен $1/4$, а для значения $x = -1$, параметр Θ может принимать любое действительное число.

11.2.3 Пусть $P(x)$ – многочлен четвёртой степени, $P(-1) = -4$, $P'(-1) = -3$, $P''(-1) = 8$, $P'''(-1) = -18$, $P^{(IV)}(-1) = 24$. Вычислить $P(1)$, $P'(2)$, $P''(0)$, $P'''(-1/4)$, $P^{(4)}(5)$.

Решение. Используя формулу (11.1.1), записываем многочлен четвёртой степени:

$$P(x) = -4 - 3 \cdot (x+1) + 4 \cdot (x+1)^2 - 3 \cdot (x+1)^3 + (x+1)^4, \text{ или } P(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 5.$$

Найдём производные многочлена $P(x)$ до четвёртого порядка включительно и вычислим значения производных и функции в заданных точках.

$$P(1) = -2;$$

$$P'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x, \quad P'(x) = 48;$$

$$P''(x) = 12x^2 + 6x + 2, \quad P''(x) = 2;$$

$$P'''(x) = 24x + 6, \quad P'''(-1/4) = 0;$$

$$P^{(4)}(x) = 24, \quad P^{(4)}(x) = 24.$$

11.2.4 Написать формулу Маклорена n -го порядка функции $f(x) = \sin x$.

Решение. Найдём значение функции $f(x) = \sin x$ и её производных в точке $x_0 = 0$. Значение функции в точке $x_0 = 0$ равно нулю.

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2), \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2), \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2), \quad f'''(0) = -1;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Следовательно, формула Маклорена n -го порядка функции $f(x) = \sin x$ имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\Theta x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right),$$

где $0 < \Theta < 1$.

11.2.5 Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Найдём значение функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ и её производных в точке $x_0 = 2$. Значение функции в заданной точке равно двум.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad f'(2) = -1;$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad f''(2) = 2;$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}, \quad f'''(2) = -6$$

$$f^{(IV)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5}, \quad f'(2) = 24.$$

Следовательно, формула Тейлора (11.1.1) третьего порядка для функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$ имеет вид

$$\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(1+\Theta(x-2))^5}, \text{ где } 0 < \Theta < 1.$$

11.2.6 Вычислить число e с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,0001.

Решение. Применяя формулу Маклорена (11.1.6) для функции $f(x) = e^x$, получаем

$$e = f(1) = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(x).$$

Число слагаемых в разложении определяем из неравенства $|R_n(x)| = \frac{e^\Theta}{(n+1)!} < 0,0001$, где $0 < \Theta < 1$. Полученное неравенство выполняется при значении $n = 7$. Следовательно,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2,2182.$$

11.2.7 Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2 + 3x^4}.$

Решение. Так как $4 - 4\cos^3 x = 4(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x) \sim 12(1 - \cos x)$, а $4x^2 + 3x^4 \sim 4x^2$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\cos^3 x}{4x^2 + 3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(1 - \cos x)}{4x^2}.$$

Заменяя $\cos x$ его разложением по формуле Маклорена $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\cos^3 x}{4x^2 + 3x^4} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

поскольку $\frac{x^2}{2!} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$ при значении $x \rightarrow 0$.

11.3 Задания для решения на практическом занятии

- 11.3.1 Разложить многочлен $P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ по степеням двучлена $x + 1$.
- 11.3.2 Для многочлена $x^4 - 3x^2 + 2x + 5$ написать формулу Тейлора второго порядка в точке $x_0 = 1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение параметра Θ , которое соответствует следующим значениям аргумента: а) $x = 1$; б) $x = 2$; в) $x = 3$.
- 11.3.3 Пусть $P(x)$ – многочлен четвёртой степени, $P(1) = 3$, $P'(1) = 8$, $P''(1) = 26$, $P'''(1) = 60$, $P^{(4)}(1) = 72$. Вычислить $P(0)$, $P'(-1)$, $P''(2)$, $P'''(-2) = 0$, $P^{(4)}(3)$.
- 11.3.4 Написать формулу Маклорена n -го порядка функции $f(x) = e^x$.
- 11.3.5 Написать формулу Маклорена n -го порядка функции $f(x) = \cos x$.
- 11.3.6 Написать формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = 0$.
- 11.3.7 Написать формулу Маклорена третьего порядка для функции $f(x) = \arcsin x$ в точке $x_0 = 0$.
- 11.3.8 Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 1$.
- 11.3.9 Вычислить с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001, приближённое значение следующих чисел:
а) $\sqrt[3]{e}$; б) $\ln 1,05$; в) $\cos 1$; г) $\sqrt[6]{65}$.
- 11.3.10 Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить пределы:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2 - 3x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{2x^3 + 3x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2 - \sin(2x - 4)}{x - 2 + \sin(5x - 10)}$.

11.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

- 11.4.1 Для многочлена $P_4(x)$ написать формулу Тейлора второго порядка в точке x_0 . Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение параметра Θ , которое соответствует значениям аргумента: $x = x_1$, $x = x_2$ и $x = x_3$.
- 11.4.1.1 $P_4(x) = 5x^4 + 4x^2 - 3x - 2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.
- 11.4.1.2 $P_4(x) = 4x^4 + 3x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.
- 11.4.1.3 $P_4(x) = -3x^4 + 2x^2 + 6x - 2$, $x_0 = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.
- 11.4.1.4 $P_4(x) = 7x^4 - 2x^2 - 5x + 6$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.
- 11.4.1.5 $P_4(x) = 6x^4 + 2x^2 - 4x + 9$, $x_0 = 5$, $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$.
- 11.4.1.6 $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3x + 4$, $x_0 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

- 11.4.1.7** $P_4(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x + 6, x_0 = -3, x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -1.$
- 11.4.1.8** $P_4(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3x - 3, x_0 = 4, x_1 = -4, x_2 = 4, x_3 = 2.$
- 11.4.1.9** $P_4(x) = x^4 + x^2 + x + 1, x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.10** $P_4(x) = 7x^4 + 3x^2 - 2x - 5, x_0 = -3, x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -1.$
- 11.4.1.11** $P_4(x) = -4x^4 + 2x^2 + 3x + 9, x_0 = -1, x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.12** $P_4(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4x + 12, x_0 = 4, x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 4.$
- 11.4.1.13** $P_4(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2x + 4, x_0 = -3, x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = 2.$
- 11.4.1.14** $P_4(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 8, x_0 = -1, x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3.$
- 11.4.1.15** $P_4(x) = -6x^4 - x^2 - x - 1, x_0 = 2, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.16** $P_4(x) = -4x^4 - 3x^2 - 3x + 2, x_0 = 2, x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = 2.$
- 11.4.1.17** $P_4(x) = 3x^4 + 4x^2 - 4x + 3, x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.18** $P_4(x) = 2x^4 + 2x^2 - 3x - 3, x_0 = -1, x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 1.$
- 11.4.1.19** $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3x + 4, x_0 = 5, x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = 5.$
- 11.4.1.20** $P_4(x) = -3x^4 - 5x^2 - 3x - 4, x_0 = -1, x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.21** $P_4(x) = 4x^4 - x^2 - 3x + 2, x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -2.$
- 11.4.1.22** $P_4(x) = 5x^4 - 7x^2 + 2x - 3, x_0 = 7, x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = -3.$
- 11.4.1.23** $P_4(x) = 3x^4 - x^2 + 2x + 3, x_0 = -1, x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 2.$
- 11.4.1.24** $P_4(x) = 2x^4 - 2x^2 + x + 1, x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2.$
- 11.4.1.25** $P_4(x) = 4x^4 - 2x^2 - 2x + 4, x_0 = -3, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -3.$
- 11.4.1.26** $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3x + 4, x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1.$
- 11.4.1.27** $P_4(x) = -4x^4 + 3x^2 - x + 3, x_0 = 3, x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -2.$
- 11.4.1.28** $P_4(x) = 2x^4 - 6x^2 + 5x - 2, x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 1.$
- 11.4.1.29** $P_4(x) = -4x^4 + 2x^2 - 5x + 1, x_0 = 3, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3.$
- 11.4.1.30** $P_4(x) = -4x^4 - 3x^2 - 2x - 1, x_0 = -4, x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = -4.$

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

12.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 8)^2}$. Определить интервалы возрастания и убывания функции. Найти точки экстремума.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$.

Находим производную функции: $f'(x) = \frac{2 \cdot (2x - 6)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 6x + 8}}$. Критическими точками

функции будут $x=3$, в которой $f'(x)=0$, и $x=2$, $x=4$, в которых $f'(x)$ не существует. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f'(x)$	–	∄	+	0	–	∄	+
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

Функция возрастает на каждом из интервалов: $[2; 3]$ и $[4; +\infty)$. Функция убывает на каждом из интервалов: $(-\infty; 2]$ и $[3; 4]$. Точки экстремума: $y_{\max} = y(3) = 1$, $y_{\min} = y(2) = y(4) = 0$.

12.2.2 Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x} \text{ на отрезке } [-1; 2].$$

Решение. Функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на отрезке, либо в критических точках, которые принадлежат данному отрезку, либо на концах отрезка. Определим критические точки, для чего находим производную функции и выясняем, где она равна нулю или не существует.

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x} \right)' = \frac{x^2 - 6x + 5}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right)^2}}.$$

$$f'(x) = 0, \quad x^2 - 6x + 5 = 0, \quad x = 1 \in [-1; 2], \quad x = 5 \notin [-1; 2].$$

Производная функции $f'(x)$ не существует, если $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x = 0$. Решая полученное уравнение, находим значения переменной: $x = 0 \in [-1; 2]$ или

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2} \notin [-1; 2].$$

Таким образом, вычисляем значения функции в точках: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

$$f(-1) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1)} = -\sqrt[3]{\frac{25}{3}}; \quad f(0) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0} = 0;$$

$$f(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1} = \sqrt[3]{\frac{7}{3}};$$

$$f(2) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Среди полученных значений выбираем наибольшее $\max_{[-1;2]} f(x)$ и наименьшее

$$\min_{[-1;2]} f(x) \text{ значения функции: } \max_{[-1;2]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{\frac{7}{3}}; \min_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -\sqrt[3]{\frac{25}{3}}.$$

12.2.3 Предприятие города A для доставки своей продукции в город B строит автомобильную дорогу AC , которая соединяет его с железной дорогой

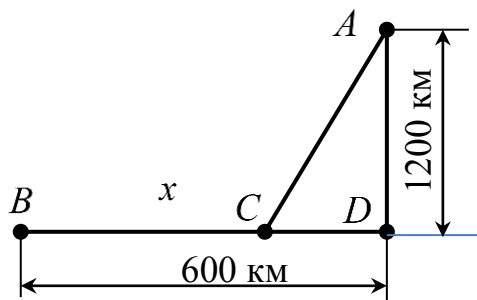


Рисунок 12.2.1 – Схема движения

BD (см. рисунок 12.2.1). К какому пункту C , относительно города B , необходимо подвести автомобильную дорогу, чтобы при перевозке своей продукции из города A в город B предприятие имело бы наименьшее количество затрат. При этом известно, что стоимость автомобильных перевозок груза на 1 км равна 13 у. е., а стоимость перевозок груза по железной дороге 5 у. е.

Решение. Пусть S – стоимость перевозки продукции из города A в город B . Тогда $S_1 = 5x$ – стоимость перевозки груза по железной дороге на участке BC , длина которого равна x , а стоимость перевозки продукции по автомобильной дороге равна

$$S_2 = 13 \cdot |AC| = 13 \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2} = 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}.$$

Следовательно, общая стоимость перевозки продукции из города A в город B будет определяться по формуле:

$$S = S_1 + S_2 = 5x + 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}.$$

Так как стоимость должна быть наименьшей, то исследуем полученную функцию на экстремум, то есть определим точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$S' = (5x + 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2})' = (5x)' + (13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2})' =$$

$$= 5 - \frac{13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} - 13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}}.$$

$$S' = 0; \quad 5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} - 13 \cdot (600 - x) = 0.$$

$$5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} = 13 \cdot (600 - x).$$

Решаем полученное иррациональное уравнение.

$$\begin{cases} 600 - x \geq 0, \\ 25 \cdot (1200^2 + (600 - x)^2) = 169 \cdot (600 - x)^2. \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 600, \\ 144 \cdot x^2 - 172800 \cdot x + 15840000 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 600, \\ x = 100 \vee x = 1100, \end{cases} \quad x = 100 \text{ км.}$$

Производная стоимости S' не существует, если $\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} = 0$, но такого значения x нет, так как сумма квадратов положительных чисел не может равняться нулю.

Таким образом, при расстоянии $x_0 = 100$ км стоимость перевозки продукции из города A в город B достигает своего экстремального значения, но при этом, затраты на перевозку продукции, которую изготавливает предприятие, может быть как наибольшей, так и наименьшей. Воспользуемся достаточным признаком экстремума: если $S''(x_0) < 0$, то при расстоянии $x = x_0$ стоимость является максимальной, а при значении $f''(x_0) > 0$ – минимальной. Найдём вторую производную функции, которая является стоимостью перевозки продукции из города A в город B , и определим её значение при перевозке груза по железной дороге на расстояние $x = 100$ км.

$$S'' = \left(5 - \frac{13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}} \right)' = \frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - x)^2)^3}}.$$

$$S''(500) = \left(\frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - x)^2)^3}} \right) \Big|_{x=100} = \frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - 100)^2)^3}} = 144000 > 0.$$

Так как вторая производная $S''(100) > 0$, то, используя достаточный признак экстремума, при расстоянии $x = 100$ км. предприятие будет иметь наименьшее количество затрат.

12.2.4 Задана функция $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48$. Определить интервалы выпуклости и вогнутости функции. Определить точки перегиба.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. Находим первую и вторую производную функции: $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x$, $f''(x) = 12x^2 - 72x + 60$. Решая уравнение $f''(x) = 0$, находим $x = 1$ и $x = 5$. Точек, в которых вторая производная $f''(x)$ не существует, нет. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых вторая производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	∪	67	∩	-77	∪

Функция является выпуклой на интервале $(1; 5)$. Функция является вогнутой на каждом из интервалов: $(-\infty; 1)$ и $(5; +\infty)$. Точки перегиба: $M_1(1; 67)$, $M_2(5; -77)$.

12.2.5 Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел, за исключением точки $x=2$. В точке $x=2$ односторонние пределы равны бесконечности ($\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$), то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой. Найдём наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x-2} = 2.$$

Таким образом, у данной кривой существует единственная наклонная асимптота, уравнение которой $y = x + 2$.

12.2.6 Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2}{x-1}$ и построить ее график. Определить количество корней уравнения $y(x) = a$ для любого действительного числа a .

Решение. 1. Так как, в точке $x=1$ значение функции не существует, то областью определения функции является множество $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Определим точки разрыва функции и асимптоты графика. Так как в точке $x=1$ функция не определена, то данная точка является точкой разрыва. Исследуем функцию в окрестности данной точки:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Так как односторонние пределы равны $\pm\infty$, то в точке $x=1$ функция терпит разрыв второго рода, а, следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты $y = k \cdot x + b$ графика функции.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

Таким образом, наклонной асимптотой графика функции является прямая $y = x + 1$.

3. Область определения функции не является симметричным множеством относительно начала координат, из определения четности и нечетности функции, исходная функция не является четной и не является нечетной. Исследуемая функция является дробно-рациональной, а, следовательно, непериодическая.

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Найдем производную функции.

$$y' = \frac{(x^2)' \cdot (x-1) - x^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2 \cdot x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}.$$

Экстремального значения функция может достигать в критических точках, которые принадлежат области определения, то есть в точках, в которых производная равна нулю или не существует. Находим критические точки. Производная функции $y' = 0$, если $x \cdot (x-2) = 0$, то есть $x = 0 \in D(y)$ или $x = 2 \in D(y)$. Производная функции y' не существует, если $x = 1 \notin D(y)$. Знаки y' найдем, решая методом интервалов неравенство $\frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2} > 0$ (или < 0).

Результаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
y		0		$\nexists$		4	

По необходимому и достаточному признаку монотонности функция возрастает, если $y' \geq 0$, и убывает, если $y' \leq 0$. Следовательно, исследуемая функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$, а убывает на промежутках $[0; 1)$ и $(1; 2]$. По достаточному признаку экстремума, если производная в критической точке меняет свой знак с отрицательного на положительный, то данная точка является точкой локального минимума, если же знак, в данной точке, меняется с положительного на отрицательный, то в этой точке функция достигает локального максимума.

$$y_{\min} = y(2) = 4, y_{\max} = y(0) = 0.$$

5. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость. Определим точки перегиба, если они существуют. Найдем вторую производную функции.

$$y'' = \frac{(x^2 - 2x)' \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot ((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Не существует значения переменной, при которой вторая производная функции равна нулю. Вторая производная функции y'' не существует, если $x = 1 \notin D(y)$. Результаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	$\nexists$	+
y		$\nexists$	

Согласно достаточному признаку выпуклости (вогнутости), функция является выпуклой, если $y'' < 0$, и вогнутой, если $y'' > 0$. Следовательно, исследуемая функция выпуклая на промежутке $(-\infty; 1)$ и вогнутая на промежутке $(1; +\infty)$. По достаточному признаку точек перегиба, если вторая производная в

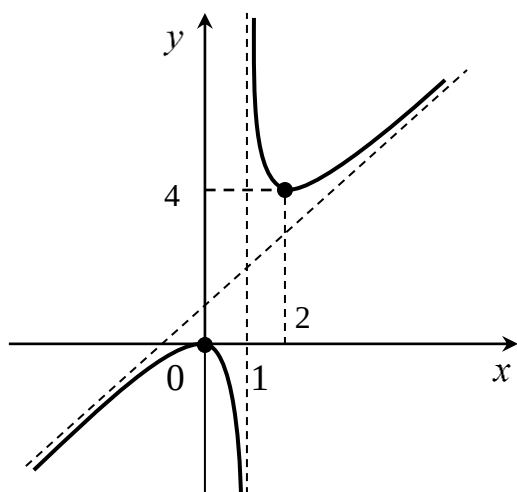


Рисунок 12.2.2 – График функции

точке равна нулю или не существует и при переходе через эту точку из области определения функции, вторая производная меняет свой знак, то данная точка является точкой перегиба. Исходная функция не имеет точек перегиба.

6. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

Если $x=0$, то $y=0$. Аналогично, значение функции равно нулю, если $x=0$. Таким образом, функция имеет единственную точку пересечения с осями координат: $O(0;0)$.

7. По результатам проведенных исследований строим график функции (рисунок 12.2.2).

8. Множество значений функции $E(y): y \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Для определения числа корней уравнения $y(x)=a$ строим прямые $y=a$, которые параллельны оси абсцисс. Из рисунка (12.2.2) видим, что прямая $y=a$ для $y \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ пересекает линию графика заданной функции f двух

точках, а, следовательно, уравнение $\frac{x^2}{x-1} = a$ на этих промежутках имеет ровно

два корня. Если $a=0$ или $a=4$, то прямые $y=0$ и $y=4$ касаются заданной линии в одной точке, а, следовательно, уравнение имеет единственное решение. При значениях $a \in (0; 4)$ прямая не имеет точек пересечения с графиком функции

$y = \frac{x^2}{x-1}$, а, следовательно, уравнение $\frac{x^2}{x-1} = a$ не имеет решения.

12.3 Задания для решения на практических занятиях

12.3.1 Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума:

а) $y = x^3 - 15x^2 + 48x + 6$; б) $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$; в) $y = x^3 e^{-x}$; г) $y = \ln(1 + x^2)$.

12.3.2 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-1; 4]$.

12.3.3 Найти на отрезке $[0; 4]$ наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 3}$.

12.3.4 Найти наибольшее значение функции $f(x) = \ln x / x$ на интервале $(0; +\infty)$.

12.3.5 Определить максимальную площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна a .

12.3.6 Чему должны быть равны радиус основания R , высота H и образующая l прямого кругового конуса для того, чтобы при заданном объёме V он имел наименьшую полную поверхность?

12.3.7 Найти радиус основания и высоту прямого конуса, вписанного в шар радиуса шесть метров так, чтобы его объём был наибольшим.

12.3.8 Число 66 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение этих чисел было бы наибольшим.

12.3.9 По двум улицам движутся к перекрёстку два автомобиля с постоянными скоростями $v_1 = 50 \text{ км/ч}$ и $v_2 = 40 \text{ км/ч}$. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент времени автомобили находятся от перекрёстка на расстояниях $l_1 = 4 \text{ км}$ и $l_2 = 3 \text{ км}$, определить, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

12.3.10 Для указанных функций найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба:

а) $y = x^3 - 6x^2 + x + 6$; б) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$; в) $y = \frac{\ln x}{x}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}$.

12.3.11 Найти асимптоты графиков указанных функций:

а) $y = \frac{2x}{3x-3}$; б) $y = \frac{x^3}{x^2-9}$; в) $y = xe^{1/x}$; г) $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+5}$; д) $y = \operatorname{tg} x$.

12.3.12 Провести полное исследование и построить графики указанных функций:

а) $y = x^3 - 18x^2 + 60x + 3$; б) $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$; в) $y = e^{2x-x^2}$; г) $y = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}}$.

12.3.13 Провести полное исследование и построить график функций $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$. Сколько корней имеет уравнение $\frac{x^3}{2(1+x)^2} = a$, в зависимости от параметра a .

12.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

12.4.1 Найти наибольшее $\max_{[a;b]} f(x)$ и наименьшее $\min_{[a;b]} f(x)$ значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

12.4.1.1 $y = \sqrt[3]{(x^2 + 5x + 4)^2}$, $[-5; -2]$. **12.4.1.2** $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $[1; 3]$.

12.4.1.3 $y = \sin(x + \pi/3)$, $[0; 3\pi/2]$. **12.4.1.4** $y = e^{x^2 - 6x + 2}$, $[0; 4]$.

12.4.1.5 $y = \ln x/x$, $[1; 3]$. **12.4.1.6** $y = \sqrt[5]{(x^2 - 7x + 12)^4}$, $[3; 2; 5]$.

12.4.1.7 $y = x^3 + 4x^2 - 11x + 2$, $[0; 4]$. **12.4.1.8** $y = \cos(x + \pi/6)$, $[-\pi/2; \pi]$.

12.4.1.9 $y = e^{x^2 + 4x}$, $[-3; -1]$. **12.4.1.10** $y = \ln(4 - x^2)$, $[-1; 3/2]$.

12.4.1.11 $y = \sqrt[4]{(x^2 + 6x + 8)^3}$, $[-8; -4]$. **12.4.1.12** $y = x^3 - 3x^2 + 5$, $[-2; 1]$.

12.4.1.13 $y = \sin(x - \pi/4)$, $[0; 2\pi]$. **12.4.1.14** $y = e^{x^2 - 2x}$, $[0; 2]$.

- 12.4.1.15 $y = \ln(9 - x^2)$, $[1; 2]$. 12.4.1.16 $y = \sqrt[4]{(x^2 + 6x + 8)^3}$, $[-8; -4]$.
 12.4.1.17 $y = x^3 + 5x^2 + 3x$, $[-5; -1]$. 12.4.1.18 $y = \cos(x - \pi/4)$, $[\pi/2; 2\pi]$.
 12.4.1.19 $y = e^{x^2+8x}$, $[-5; 0]$. 12.4.1.20 $y = \ln(16 - x^2)$, $[-\sqrt{15}; \sqrt{15}]$.
 12.4.1.21 $y = \sqrt[9]{(x^2 - 12x + 120)^7}$, $[0; 7]$. 12.4.1.22 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $[2; 5]$.
 12.4.1.23 $y = \sin(x - \pi/6)$, $[-\pi/2; \pi]$. 12.4.1.24 $y = e^{x^2-10x}$, $[0; 6]$.
 12.4.1.25 $y = \ln(1 + x^2)$, $[-2; 3]$. 12.4.1.26 $y = \sqrt[4]{(x^2 + 6x + 8)^3}$, $[-8; -4]$.
 12.4.1.27 $y = x^3 + 0,5 \cdot x^2 - 2x$, $[0; 5]$. 12.4.1.28 $y = \cos(x - \pi/3)$, $[-3\pi/2; \pi]$.
 12.4.1.29 $y = e^{4x-x^2}$, $[1; 3]$. 12.4.1.30 $y = 2\ln(e + x^2)$, $[-1; 1]$.

12.4.2 Решить следующие задачи.

12.4.2.1 Найти наибольший объём конуса с длиной образующей, равной $3\sqrt{3}$.

12.4.2.2 Найти высоту цилиндра, который можно вписать в шар радиуса $5\sqrt{2}$ и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

12.4.2.3 Найти радиус основания конуса с боковой поверхностью, равной $(\sqrt{2} + 1) \cdot \pi$, если шар, вписанный в этот конус, имеет наибольший объём.

12.4.2.4 Найти наибольшую площадь боковой поверхности конуса, который вписан в шар радиуса $R = 3$ м.

12.4.2.5 Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около полушара радиуса $\sqrt{27}$, при этом центр шара совпадает с центром основания конуса.

12.4.2.6 Найти наибольший объём цилиндра, вписанный в шар радиуса $3\sqrt{3}$.

12.4.2.7 Найти отношение радиуса шара, описанного около цилиндра, с наибольшей площадью боковой поверхности, к радиусу основания цилиндра.

12.4.2.8 Во сколько раз объём шара, описанного около цилиндра наибольшего объёма, больше объёма этого цилиндра?

12.4.2.9 Найти отношение радиуса шара, который описан около конуса наибольшего объёма, к высоте этого конуса.

12.4.2.10 Найти радиус основания конуса наименьшего объёма, в который вписан цилиндр, радиус основания которого равен 4. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

12.4.2.11 В конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол величиной 2φ , вписана сфера радиуса $R = 4$ м. При каких значениях угла φ площадь боковой поверхности конуса будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.

12.4.2.12 Найти наибольшее значение объёма правильной четырёхугольной пирамиды, вершины которой принадлежат описанной сфере радиуса $R = 9$ м.

12.4.2.13 Найти наибольшее значение объёма правильной треугольной призмы, если расстояние от центра основания до одной из вершин другого основания равно $4\sqrt{3}$ м.

12.4.2.14 Найти отношение высоты конуса, описанного около цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, к высоте этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

12.4.2.15 Найти отношение радиуса основания конуса, описанного около цилиндра наибольшего объёма, к радиусу основания этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

12.4.2.16 В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно $l = 2$ м. При какой длине стороны основания объём пирамиды будет наибольшим? Найти наибольший объём пирамиды.

12.4.2.17 Найти наибольший объём цилиндра, если площадь его полной поверхности равна $S = 12\pi$ м².

12.4.2.18 Найти наименьшую площадь полной поверхности прямой правильной треугольной призмы объёмом $V = 36$ м³.

12.4.2.19 Найти наибольший объём правильной четырёхугольной пирамиды с боковым ребром $l = \sqrt{2}$ м.

12.4.2.20 Из всех правильных треугольных призм с заданным объёмом $V = 16\sqrt{3}$ м³ найти призму с наименьшей суммой длин всех её рёбер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

12.4.2.21 Найти площадь прямоугольника наибольшей площади, который вписан в окружность радиуса $R = 4\sqrt{2}$ м.

12.4.2.22 В конус радиуса 4 см и высотой 6 см вписан цилиндр наибольшего объёма. Определить высоту цилиндра.

12.4.2.23 Найти наибольшую площадь прямоугольника, основание которого лежит на гипотенузе длиной 13 см описанного прямоугольного треугольника, острый угол которого равен 30° .

12.4.2.24 Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольную трапецию с длинами оснований 24 см и 8 см и длиной высоты 12 см.

12.4.2.25 Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами длиной 18 см, 24 см 30 см и имеющего с ними общий острый угол.

12.4.2.26 Первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен десяти. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_6$.

12.4.2.27 Пятый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен двенадцати. Найти наименьшее значение произведения $S = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5$.

12.4.2.28 Четвёртый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен четырём. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_3$.

12.4.2.29 Определить размеры открытого бассейна объёмом 64 м^3 с квадратным дном таким образом, чтобы на облицовку дна и стен плиткой пошло наименьшее количество материала.

12.4.2.30 Через какую точку на кривой $y = -x^2 + 2x$ должна проходить касательная к этой кривой, чтобы трапеция, образованная касательной, осями координат и прямой $x = 1$, имела наименьшую площадь?

12.4.3 Определить число корней уравнения $f(x) = a$, где параметр $a \in \mathbb{R}$, проведя полное исследование графика функции $y = f(x)$.

12.4.3.1 а) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{(x - 1)^3}$; б) $f(x) = (3 - x) \cdot e^{x-2}$.

12.4.3.2 а) $f(x) = \frac{x^3 + 4}{(x + 1)^3}$; б) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

12.4.3.3 а) $f(x) = \frac{8x^3 + 8x}{(2x - 1)^3}$; б) $f(x) = (4 - x) \cdot e^{x-3}$.

12.4.3.4 а) $f(x) = \frac{8x^3 + 8x}{(2x + 1)^3}$; б) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

12.4.3.5 а) $f(x) = \frac{x^4 - 8}{(x + 1)^4}$; б) $f(x) = (-1 - x) \cdot e^{x+2}$.

12.4.3.6 а) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = x^2 \ln x$.

12.4.3.7 а) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 1}$; б) $f(x) = (4 + x) \cdot e^{-x-3}$.

12.4.3.8 а) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

12.4.3.9 а) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$; б) $f(x) = (3 + 2x) \cdot e^{-2x-2}$.

12.4.3.10 а) $f(x) = \frac{x}{2 - x^3}$; б) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

12.4.3.11 а) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; б) $f(x) = (x - 2) \cdot e^{3-x}$.

12.4.3.12 а) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = x^2 \cdot \ln^2 x$.

12.4.3.13 а) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$; б) $f(x) = (5 + 2x) \cdot e^{-2x-4}$.

12.4.3.14 а) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$; б) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$.

12.4.3.15 а) $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 4}$; б) $f(x) = (2x - 1) \cdot e^{\frac{2}{x}}$.

- 12.4.3.16 a) $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $f(x) = x \cdot \ln^2 x$.
- 12.4.3.17 a) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$; б) $f(x) = \frac{e^{2x+2}}{2x+2}$.
- 12.4.3.18 a) $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+4x+2}$; б) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$.
- 12.4.3.19 a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; б) $f(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x}$.
- 12.4.3.20 a) $f(x) = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$; б) $f(x) = \ln \frac{x}{x+2} + 2$.
- 12.4.3.21 a) $f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3}$; б) $f(x) = \frac{e^{5x-5}}{5x-5}$.
- 12.4.3.22 a) $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$; б) $f(x) = \ln \frac{x}{x-3} - 3$.
- 12.4.3.23 a) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$; б) $f(x) = \frac{e^{7-x}}{7-x}$.
- 12.4.3.24 a) $f(x) = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$; б) $f(x) = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3$.
- 12.4.3.25 a) $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2}$; б) $f(x) = -\frac{e^{-3-x}}{3+x}$.
- 12.4.3.26 a) $f(x) = \frac{8x-8}{x^2+2x+1}$; б) $f(x) = 3 \cdot \ln \frac{x}{x+3} - 7$.
- 12.4.3.27 a) $f(x) = \frac{x^3-32}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{e^{9+x}}{9+x}$.
- 12.4.3.28 a) $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x+1}$; б) $f(x) = e^{2x-x^2}$.
- 12.4.3.29 a) $f(x) = \frac{x^5}{x^4-1}$; б) $f(x) = \ln(x^2-5x+6)$.
- 12.4.3.30 a) $f(x) = \frac{1-2x^3}{x^2}$; б) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

13.2 Примеры решения типовых задач

13.2.1 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = \frac{16-4t^2}{4+t^2} \vec{i} + \frac{16t}{4+t^2} \vec{j} + 3\vec{k}$.

Решение. Имеем параметрические уравнения годографа

$$x(t) = \frac{16-4t^2}{4+t^2}, \quad y(t) = \frac{16t}{4+t^2}, \quad z(t) = 3.$$

Исключая параметр t , получим

$$x^2 + y^2 = \frac{(16-4t^2)^2}{(4+t^2)^2} + \frac{256t^2}{(4+t^2)^2} = \frac{16 \cdot (16+8t^2+t^4)}{(4+t^2)^2} = 16.$$

Следовательно, годографом функции $\vec{r}(t)$ является окружность

$$x^2 + y^2 = 16, \quad z = 3,$$

из которой исключена точка $P_0(-4; 0; 3)$. При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $P(x; y; z)$ на годографе движется от точки $P_0(-4; 0; 3)$ против часовой стрелки, если наблюдать из точки расположенной выше плоскости $z = 3$. При этом $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x = -4$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y = 0$.

13.2.2 Дано уравнение движения: $\vec{r}(t) = (4t^2 - 2)\vec{i} + (1 - 3t^4)\vec{j} + t^4\vec{k}$.

Определить скорость и ускорение движения.

Решение. $v(t) = \vec{r}'(t) = 8t \cdot \vec{i} - 12t^3 \cdot \vec{j} + 4t^3 \cdot \vec{k}$,

$$v(t) = \vec{r}''(t) = 8 \cdot \vec{i} - 36t^2 \cdot \vec{j} + 12t^2 \cdot \vec{k}$$

13.2.3 Найти кривизну и радиус кривизны линии $y = x^3 + 5x^2 + 3x$ в точке $M(1; 9)$.

Решение. Вычислим значения первой и второй производной в точке M : $y' = 3x^2 + 10x + 3$, $y'(1) = 16$, $y'' = 6x + 10$, $y''(1) = 16$. Тогда

$$K = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{16}{(1+16^2)^{3/2}} \right| = \frac{16}{257\sqrt{257}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{257\sqrt{257}}{16}.$$

13.2.4 Найти уравнение эволюты параболы $y^2 = 2x + 2$.

Решение. Находим первую и вторую производные.

$$2yy' = 2, \quad y' = 1/y, \quad y'^2 + yy'' = 0, \quad y'' = -y'^2/y = -1/y^3.$$

По формулам (13.1.8) находим координаты центра кривизны:

$$X = x - \frac{y' \cdot (1+y'^2)}{y''} = \frac{y^2}{2} - 1 - \frac{\frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y^2} \right)}{-\frac{1}{y^3}} = \frac{3}{2}y^2;$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{y^3}} = -y^3.$$

Таким образом, найдены параметрические уравнения эволюты:

$$X = \frac{3}{2}y^2, \quad Y = -y^3.$$

Исключая параметр y , найдём уравнение эволюты в виде

$$X^3 = \frac{27}{8}Y^2.$$

Выполнив замену $Y = y$, $X = x$, окончательно получаем уравнение искомой эволюты: $27y^2 = 8x^3$.

13.2.5 Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = t^3 - 1$, $y = t^2$, $z = 4t^2 + 1$ в точке $P_0(0; 1; 5)$.

Решение. Данной точке соответствует значение параметра $t = 1$. Находим производные

$$x' = (t^3 - 1)' = 3t^2, \quad y' = (t^2)' = 2t, \quad z' = (4t^2 + 1)' = 8t.$$

Подставляя значение $t = 1$, получаем

$$x'(1) = 3, \quad y'(1) = 2, \quad z'(1) = 8.$$

Для записи уравнения касательной прямой и нормальной плоскости воспользуемся уравнениями (13.1.1) и (13.1.2), соответственно.

Уравнение касательной прямой:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{8}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$3x + 2(y-1) + 8(z-5) = 0,$$

или

$$3x + 2y + 8z - 42 = 0.$$

13.3 Задания для решения на практических занятиях

13.3.1 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = (2t-1)\vec{i} + (2-3t)\vec{j} + 4t\vec{k}$.

13.3.2 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = \sqrt{1-t^2} \cdot \vec{i} + \sqrt{1+t^2} \cdot \vec{j}$.

13.3.3 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = 4\text{ch } t \cdot \vec{i} - \vec{j} + 3\text{sh } t \cdot \vec{k}$.

13.3.4 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + 2t \cdot \vec{k}$.

13.3.5 Дано уравнение движения: $\vec{r}(t) = (2t - 2\sin t)\vec{i} + (2 - 2\cos t)\vec{j}$. Определить скорость и ускорение движения. Построить векторы скорости и ускорения для моментов $t = \pi/2$, $t = \pi$ и $t = 3\pi/2$.

- 13.3.6** Дано уравнение движения: $\vec{r}(t) = 3t \cdot \vec{i} + (4t - t^3) \vec{j}$. Определить скорость и ускорение движения. Построить векторы скорости и ускорения для моментов $t = 0$, $t = 1$ и $t = 2$.
- 13.3.7** Дано уравнение движения: $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + 5 \cdot \vec{k}$. Определить скорость и ускорение движения. Построить векторы скорости и ускорения для моментов $t = \pi/2$, $t = \pi$ и $t = 3\pi/2$.
- 13.3.8** Найти кривизну и радиус кривизны линии $y = x^2$ в точке $M(1; 1)$.
- 13.3.9** Найти кривизну и радиус кривизны линии $x^2 + 4y^2 = 4$ в точках $M_1(2; 0)$ $M_2(0; 1)$.
- 13.3.10** Найти кривизну и радиус кривизны линии $x^2 - xy + y^2 = 1$ при значении $t = 1$.
- 13.3.11** Найти кривизну и радиус кривизны линии $x = t^2/2$, $y = t^3/3$ в точке $M(1/2; 1/3)$.
- 13.3.12** Найти кривизну и радиус кривизны линии $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в любой точке.
- 13.3.13** Найти кривизну и радиус кривизны линии $r = a(1 - \cos \varphi)$ в любой точке и при значении $\varphi = \pi$.
- 13.3.14** Найти кривизну и радиус кривизны линии $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ в любой точке и при значении $\varphi = \pi$.
- 13.3.15** Найти уравнение эволюты кривой $y = x^3$.
- 13.3.16** Найти уравнение эволюты кривой $x^2 - y^2 = 4$.
- 13.3.17** Найти уравнение эволюты кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.
- 13.3.18** Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = 2\sin^2 t$, $y = 2\sin 2t$, $z = 4\cos^2 t$ при значении $t = \pi/6$.
- 13.3.19** Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = 3\operatorname{sh} t$, $y = 3\operatorname{ch} t$, $z = 3t$ при значении $t = 0$.
- 13.3.20** Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = 2t^3$, $y = 3t^2$, $z = 2t^2 - t + 1$ в точке $P_0(16; 12; 7)$.

13.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

- 13.4.1** Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$.
- 13.4.1.1** $x(t) = 2t^2 + 3t - 1$, $y(t) = 3t^3 + 2t - 2$, $z(t) = 4t - 2t^2$, $P_0(4; 3; 2)$.
- 13.4.1.2** $x(t) = 3e^{2t}$, $y(t) = 4e^{3t}$, $z(t) = 5e^{4t}$, $P_0(3; 4; 5)$.
- 13.4.1.3** $x(t) = \sin 2t$, $y(t) = \cos 2t$, $z(t) = \sin 3t$, $P_0(0; -1; -1)$.
- 13.4.1.4** $x(t) = 16\sqrt{t}$, $y(t) = 48\sqrt[3]{t}$, $z(t) = 12\sqrt[3]{t^2}$, $P_0(128; 192; 768)$.
- 13.4.1.5** $x(t) = \operatorname{tg} t$, $y(t) = \operatorname{ctg} t$, $z(t) = 8t/\pi$, $P_0(1; 1; 2)$.
- 13.4.1.6** $x(t) = 3t^2 + 5t - 2$, $y(t) = 4t^3 + t - 4$, $z(t) = 2t - 3t^2$, $P_0(20; 30; -10)$.

- 13.4.1.7 $x(t) = 4e^{2t}, y(t) = 5e^{4t}, z(t) = 2e^{3t}, P_0(36; 405; 54).$
- 13.4.1.8 $x(t) = \sin 3t, y(t) = -\cos 2t, z(t) = \sin t, P_0(-1; 1; 1).$
- 13.4.1.9 $x(t) = 20\sqrt[4]{t}, y(t) = 4\sqrt{t}, z(t) = 6\sqrt[3]{t}, P_0(20; 4; 6).$
- 13.4.1.10 $x(t) = 2\operatorname{tg} 3t, y(t) = \operatorname{ctg} 3t, z(t) = 12t/\pi, P_0(-2; -1; 3).$
- 13.4.1.11 $x(t) = 5t^2 + 4t - 2, y(t) = 5t^3 + t - 1, z(t) = 3t - 2t^2, P_0(-1; -7; -5).$
- 13.4.1.12 $x(t) = 2e^{4t}, y(t) = 5e^{3t}, z(t) = 2e^{2t}, P_0(162; 135; 18).$
- 13.4.1.13 $x(t) = \cos 2t, y(t) = \sin 2t, z(t) = \sin 3t, P_0(-1; 0; -1).$
- 13.4.1.14 $x(t) = 3\sqrt[3]{t^4}, y(t) = 6\sqrt[3]{t^5}, z(t) = 2\sqrt{t^3}, P_0(768; 6144; 1024).$
- 13.4.1.15 $x(t) = 3\operatorname{tg} 5t, y(t) = 5\operatorname{ctg} 3t, z(t) = 16t/\pi, P_0(3; -5; 4).$
- 13.4.1.16 $x(t) = 4t^2 + 3t - 2, y(t) = -t^3 + t - 2, z(t) = -t + t^2, P_0(8; 4; 6).$
- 13.4.1.17 $x(t) = e^{3t}, y(t) = 3e^{2t}, z(t) = 6e^t, P_0(27; 27; 18).$
- 13.4.1.18 $x(t) = \sin 5t, y(t) = \cos 6t, z(t) = \sin 7t, P_0(1; -1; -1).$
- 13.4.1.19 $x(t) = 4\sqrt{t}, y(t) = 12\sqrt[4]{t}, z(t) = -\sqrt[4]{t^3}, P_0(16; 24; -8).$
- 13.4.1.20 $x(t) = 4\operatorname{tg} 7t, y(t) = 7\operatorname{ctg} 5t, z(t) = 20t/\pi, P_0(-4; 7; 5).$
- 13.4.1.21 $x(t) = t^2 + 8t - 3, y(t) = 12t^3 + 12t - 9, z(t) = 3t - 2t^2, P_0(-3; -9; 0).$
- 13.4.1.22 $x(t) = 5e^t, y(t) = 6e^{2t}, z(t) = 4e^{3t}, P_0(10; 24; 32).$
- 13.4.1.23 $x(t) = 4\sin 3t, y(t) = 2\cos 3t, z(t) = 4\sin t, P_0(-4; 0; 4).$
- 13.4.1.24 $x(t) = 16\sqrt{-t}, y(t) = 48\sqrt[3]{t}, z(t) = 12\sqrt[3]{t^2}, P_0(128; -192; 768).$
- 13.4.1.25 $x(t) = 2\operatorname{ctg} 9t, y(t) = 3\operatorname{tg} 3t, z(t) = 24t/\pi, P_0(2; -3; 6).$
- 13.4.1.26 $x(t) = t^2 + t - 2, y(t) = t^3 - 9t - 2, z(t) = 6t - t^2, P_0(10; -2; 9).$
- 13.4.1.27 $x(t) = 4e^{3t}, y(t) = 7e^{2t}, z(t) = 9e^{3t}, P_0(32; 28; 72).$
- 13.4.1.28 $x(t) = 2\sin 3t, y(t) = 4\cos 5t, z(t) = 2\cos 2t, P_0(0; -4; 2).$
- 13.4.1.29 $x(t) = 4\sqrt{-t}, y(t) = 12\sqrt[4]{-t}, z(t) = -2\sqrt[4]{-t^3}, P_0(16; 24; -8).$
- 13.4.1.30 $x(t) = 28t/\pi, y(t) = 7\operatorname{ctg} 7t, z(t) = -7\operatorname{tg} 3t, P_0(7; -7; 7).$