

23 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x . Если фиксированное значение аргумента x получит приращение Δx , то функция также получит приращение $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение 1 Производной функции $y = f(x)$ в произвольно фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к нулю, и если этот предел существует и конечен.

$$y' = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Для нахождения производной от заданной функции $y = f(x)$, согласно определению, необходимо выполнить следующие действия:

1) придав фиксированному аргументу $x \in D(f)$ приращение Δx , вычислить значение функции $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$;

2) найти соответствующее значение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) составить отношение приращения функции к приращению

аргумента $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

4) найти предел данного отношения при значении $\Delta x \rightarrow 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пример 1 Найти, по определению, производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 4$.

Решение: Находим приращение функции в заданной точке, а затем, воспользовавшись определением 1, вычисляем производную.

$$\Delta f(4) = f(4 + \Delta x) - f(4) = (4 + \Delta x)^2 - 4^2 = 16 + 8\Delta x + \Delta x^2 - 16 = 8\Delta x + \Delta x^2,$$

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8 + \Delta x) = 8.$$

Теорема 1 Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ являются дифференцируемыми функциями в точке x , то есть существует производная функций в этой точке.

Основные правила дифференцирования

- 1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
- 2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
- 3) $(C \cdot v)' = C \cdot u'$,
- 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$.

Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C' = 0$ ($C = \text{Const}$);	2)	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ($n \in \mathbb{R}$);
3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$);	4)	$(e^x)' = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$);
5)	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$);	6)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$);
7)	$(\sin x)' = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$);	8)	$(\cos x)' = -\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$);
9)	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$);	10)	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ($x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$);
11)	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($ x < 1$);	12)	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($ x < 1$);
13)	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$);	14)	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$);
15)	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ ($x \in \mathbb{R}$);	16)	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ ($x \in \mathbb{R}$);
17)	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ ($x \in \mathbb{R}$);	18)	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ ($x \neq 0$).

Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс. Исходя из геометрического смысла производной и уравнения прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку, получаем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (2)$$

Уравнение нормали (прямой, перпендикулярной касательной, проведённой в точке касания) имеет вид:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (3)$$

Производная сложной функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Производная обратной функции: если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = \eta(y)$, производная которой отлична от нуля, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Говорят, что функция $y = f(x)$ неявно задана уравнением $F(x; y) = 0$, если $F(x; f(x)) = 0$. Для нахождения производной функции $y = f(x)$ необходимо последнее тождество продифференцировать по переменной x , считая левую часть тождества как сложную функцию от переменной x , а затем полученное уравнение разрешить относительно производной $f'(x)$.

Логарифмическое дифференцирование: логарифмическое дифференцирование применяется при нахождении производной показательной-степенной и дробно-рациональной функции; логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, то есть $(\ln(f(x)))'_x = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Применение предварительного логарифмирования часто упрощает нахождение производной. Например, при нахождении производной показательной-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$ предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x).$$

Пример 1 Доказать, что $(\cos 2x)' = -2 \cdot \sin 2x$.

Решение. Для доказательства равенства воспользуемся определением 1.

$$\begin{aligned} (\cos 2x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x + 2\Delta x) - \cos 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x + 2x}{2} \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{2}}{\Delta x} = \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + \Delta x) \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(2x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -2 \sin 2x \cdot 1 = -2 \sin 2x. \end{aligned}$$

Пример 2 Найти производные указанных функций:

а) $y = 7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x$.

Решение.

$$\text{а) } y' = \left(7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x \right)' = 35x^4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}} + 4\cos x;$$

Пример 3 Найти производные указанных функций:

а) $y = \cos^4 9x \cdot 5^{x^2}$; б) $y = \frac{\sin^3 8x}{(x^2 + 4)^3}$.

Решение.

$$\text{а) } y' = (\cos^4 9x \cdot 5^{x^2})' = (\cos^4 9x)' \cdot 5^{x^2} + (5^{x^2})' \cdot \cos^4 9x =$$

$$= 4\cos^3 9x (\cos 9x)' 5^{x^2} + 5^{x^2} \ln 5 (x^2)' \cos^4 9x = 5^{x^2} \cos^3 9x (-36\sin 9x + 2x \ln 5 \cos 9x);$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= \left(\frac{\sin^3 8x}{(x^2 + 4)^3} \right)' = \frac{(\sin^3 8x)' \cdot (x^2 + 4)^3 - ((x^2 + 4)^3)' \cdot \sin^3 8x}{((x^2 + 4)^3)^2} = \\ &= \frac{24\sin^2 8x \cos 8x (x^2 + 4)^3 - 6x(x^2 + 4)^2 \sin^3 8x}{((x^2 + 4)^3)^2} = \frac{6\sin^2 8x (4\cos 8x (x^2 + 4) - x \sin 8x)}{(x^2 + 4)^4}. \end{aligned}$$

Пример 4 Найти производную функции y , заданной неявно следующим уравнением: $3x^2 - 4y^3 + 5x^3y^4 = 6$.

Решение. Дифференцируем обе части заданного выражения, считая y функцией от переменной x :

$$(3x^2 - 4y^3 + 5x^3y^4)'_x = 6'_x$$

$$6x - 12y^2y' + 15x^2y^4 + 20x^3y^3y' = 0$$

Из этого равенства выражаем y' :

$$y' = \frac{6x + 15x^2y^4}{12y^2 - 20x^3y^3}.$$

Пример 5 Найти производную функции $y = x^{\sin 2x}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем $\ln y = \sin 2x \ln x$. Дифференцируем обе части последнего равенства по переменной x :

$$(\ln y)'_x = (\sin 2x)'_x \ln x + \sin 2x (\ln x)'_x \text{ или } \frac{y'}{y} = \cos 2x \ln x + \sin 2x \frac{1}{x}.$$

Окончательно имеем:

$$y' = y \cdot \left(\cos 2x \ln x + \frac{\sin 2x}{x} \right) = x^{\sin 2x} \cdot \left(\cos 2x \ln x + \frac{\sin 2x}{x} \right).$$

24 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Определение 1 Производной второго порядка или второй производной называется производная от производной первого порядка.

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = (y')' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

По индукции определяем производные высшего порядка.

Определение 2 Производной k -го порядка называется производная от производной $(k-1)$ -го порядка, то есть $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} = \left(y^{(k-1)} \right)' = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} \right)$.

Для вычисления производной любого порядка от произведения двух функций, минуя последовательное применение формулы для вычисления производной от произведения двух функций, удобно применять *формулу Лейбница*.

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}. \quad (1)$$

Если зависимость переменных задана в *параметрическом* виде уравнениями $y = y(t)$, $x = x(t)$, то производные первого и второго порядков вычисляются по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}. \quad (2)$$

Механический смысл производной: производная пути по времени есть скорость в данный момент времени, то есть

$$v_{\text{мгн}} = \frac{ds}{dt}. \quad (3)$$

С механической точки зрения вторая производная пути по времени равна ускорению материальной точки в данный момент времени:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{dv}{dt}. \quad (4)$$

Определение 3 Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0 , если её приращение в этой точке $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta), \quad (5)$$

где A – некоторое действительное число; $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx , при значении $\Delta x \rightarrow 0$.

Теорема 1 Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$.

На основании теоремы 9.1.1 формула (9.1.6) принимает вид

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta). \quad (6)$$

Определение 4 *Дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная часть приращения функции в точке x_0 .

$$d(f(x_0)) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (7)$$

В частности, если $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$, и, следовательно, $df(x_0) = dx = \Delta x$, то есть дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $d(f(x_0)) = f'(x_0) dx$.

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал $d(f(x_0))$ равен приращению ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ при приращении аргумента, равном Δx .

Дифференциал функции $y = f(x)$ в произвольной точке x находится по формулам

$$d(f(x)) = f'(x) \cdot dx \text{ или } dy = y' dx. \quad (8)$$

Для дифференциала функции справедливы следующие правила вычисления дифференциала:

$$1) \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$2) \quad d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv;$$

$$3) \quad d(C \cdot v) = C \cdot dv,$$

$$4) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0.$$

Определение 5 Дифференциалом k -го порядка называется дифференциал от дифференциала $(k-1)$ -го порядка, то есть $d^k y = d(d^{k-1} y) = y^{(k)} dx$.

Из определения дифференциала и формулы (7) следует

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta),$$

то есть дифференциал функции в точке x_0 отличается от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx , при значении $\Delta x \rightarrow 0$. На основании этого, дифференциал функции можно использовать для вычисления приближённых значений функции. Действительно, заменяя приращение функции в точке x_0 её дифференциалом, получаем приближённую формулу

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx. \quad (9)$$

Пример 1 Найти производные и дифференциалы первого и второго порядка для функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Находим первую производную $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$. Тогда дифференциал первого порядка равен $dy = y' dx = \sin 2x dx$. Находим производную второго порядка $y'' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$. Тогда дифференциал второго порядка равен $d^2 y = y'' dx^2 = 2\cos 2x dx^2$.

Пример 2 Найти производные y'_x и y''_{xx} для функции, заданной уравнениями: $y = e^{10t}$, $x = e^{2t}$.

Решение. Используя формулы (2) нахождения производных функций, заданных параметрическим образом, имеем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(e^{10t})'_t}{(e^{2t})'_t} = \frac{10e^{10t}}{2e^{2t}} = 5e^{8t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(5e^{8t})'_t}{(e^{2t})'_t} = \frac{40e^{8t}}{2e^{2t}} = 20e^{6t}.$$

Пример 3 С помощью дифференциала приближённо вычислить значение квадратного корня из 8,88 с точностью до двух знаков после запятой.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и вычислим её значение в точке $x = 8,88$, то есть найдём значение функции $f(8,88) = \sqrt{8,88}$. Воспользуемся формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, где $x_0 + \Delta x = x$. Положим, что $x_0 = 9$, тогда $\Delta x = x - x_0 = 8,88 - 9 = -0,12$. Значение функции в точке $x_0 = 9$ равно $f(9) = \sqrt{9} = 3$. Значение производной $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 9$ равно $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$. Следовательно, $\sqrt{8,88} \approx 3 + \frac{1}{6} \cdot (-0,12) = 2,98$.

25 ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Изучение производной функции даёт возможность судить о характерных особенностях в поведении этой функции. В основе исследований функций лежат теоремы, которые объединены общим названием – теоремами о среднем.

Теорема 1 (Ферма) Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и в точке x_0 функция достигает наибольшего или наименьшего значения, то производная функции в этой точке равна нулю.

Теорема 2 (Ролля) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, причём $f(a) = f(b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a;b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема 3 (Лагранжа) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a;b)$, такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \quad (1)$$

Теорема 4 (Коши) Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причём $\varphi'(x) \neq 0$ на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a;b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (2)$$

Пример 1 Доказать, что все корни производной многочлена

$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$$

действительны и различны.

Решение. Применим теорему Ролля к функции $y = f(x)$ на отрезке $[0;1]$.

Так как $f(0) = f(1) = 0$ и функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[0;1]$ и дифференцируемой на интервале $(0;1)$, то по теореме Ролля существует хотя бы одно число x_1 из интервала $(0;1)$ такое, что $f'(x_1) = 0$. Аналогично, применяя теорему Ролля к функции $y = f(x)$ на каждом из

отрезков $[1; 2]$, $[2; 3]$ и $[3; 4]$, убеждаемся, что внутри каждого из них существует корень уравнения $f'(x) = 0$.

Так как степень многочлена $f'(x)$ равна 4, то он имеет не более четырёх действительных корней. Поэтому все корни x_1, x_2, x_3, x_4 многочлена $f'(x)$ действительны, причём $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3 < x_4 < 4$.

Пример 2 Доказать, что для любых положительных чисел a и b , таких, что $b > a$, и любого натурального числа $n \geq 2$ имеет место неравенство

$$n \cdot (b - a) \cdot a^{n-1} < b^n - a^n < n \cdot (b - a) \cdot b^{n-1}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$, $x > 0$. Тогда

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a}.$$

Так как функция $f(x) = x^n$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемой на интервале $(a; b)$, то по теореме Лагранжа существует точка c из интервала $(a; b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a} = f'(c) = n \cdot c^{n-1}.$$

Учитывая неравенство $a^{n-1} < c^{n-1} < b^{n-1}$, получаем

$$n \cdot a^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < n \cdot b^{n-1}.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство.

Пример 3 Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = \arcsin x$ на отрезке $[-1; 1]$. Найти значение c , при котором выполнено условие (10.1.1)

Решение. Функция определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$. Найдём производную функции $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Производная конечна внутри интервала $(-1; 1)$, а в точках $x = \pm 1$ производная не существует, но это не нарушает условий применимости теоремы Лагранжа. Следовательно, точка c , удовлетворяющая условию (1) должна существовать. Найдём эту точку

$$\frac{\arcsin 1 - \arcsin(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}; \quad \frac{\pi/2 - (-\pi/2)}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}},$$

откуда

$$\sqrt{1-c^2} = \frac{2}{\pi}, \text{ или } c = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}.$$

Итак, в данном случае условие (1) выполняется для двух точек.

Пример 4 Применима ли теорема Коши к функциям $f(x) = \cos x$ и $\varphi(x) = x^3$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$?

Решение. Заданные функции непрерывны на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ и дифференцируемы на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. При этом $f'(x) = -\sin x$, $\varphi'(x) = 3x^2$. В точке $x=0$ значения производных функции равны $f'(0) = \varphi'(0) = 0$. Следовательно, условие теоремы Коши не выполняется.

Покажем, что в этом случае действительно не существует точки c , в которой выполнено равенство (2). Выпишем выражение, стоящее слева в формуле Коши

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\cos(\pi/2) - \cos(-\pi/2)}{(\pi/2)^3 - (-\pi/2)^3} = \frac{0}{\pi^3/8} = 0.$$

Рассмотрим выражение, стоящее справа в формуле (2)

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = -\frac{\sin c}{3c^2}.$$

Числитель обращается в нуль на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ только при значении $c = 0$. Но в этой точке

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin c}{3c^2} \right) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin c}{c} \cdot \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3c} \right) = \infty.$$

Таким образом, левая часть равенства (2) равна нулю, а правая часть в точке $c = 0$ стремится к бесконечности. Следовательно, действительно не существует точки на заданном интервале, в которой можно применить теорему Коши для заданных функций.

При раскрытии неопределённостей $\left(\frac{0}{0} \right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ используют правило Лопиталья-Бернулли.

Теорема 5 (Лопиталья-Бернулли) Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, а в точке $x_0 \in (a; b)$ обе функции одновременно стремятся к нулю или к бесконечности и при этом существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (10.1.3)$$

При выполнении условия теоремы правило Лопиталья-Бернулли можно применять неоднократно.

Пример 5 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}.$$

Решение.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(e^{4x-12} - 1)'}{(\sin(2x-6))'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4e^{4x-12}}{2\cos(2x-6)} = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 2;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln^2 x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0. \end{aligned}$$

Раскрытие неопределённости типа $(0 \cdot \infty)$.

Для вычисления $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x))$, где $f(x)$ – бесконечно малая, а $\varphi(x)$ – бесконечно большая функция при значении $x \rightarrow x_0$, следует преобразовать произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ к виду $\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ или $\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}$. В первом случае получаем неопределённость $\left(\frac{0}{0} \right)$, а во втором $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Далее можно использовать правило Лопиталя-Бернулли.

Раскрытие неопределённости типа $(\infty - \infty)$.

Для вычисления $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x))$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большие функции при значении $x \rightarrow x_0$, следует преобразовать разность $f(x) - \varphi(x)$ к виду $f(x) \cdot \left(1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right)$. Для дальнейшего нахождения предела необходимо раскрыть неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ отношения $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 1$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x))$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$, то получаем неопределённость типа $(\infty \cdot 0)$, раскрытие которой рассмотрена выше.

Пример 6 Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{\ln x} - \frac{5}{\ln x} \right)$, используя правило Лопиталя:

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{\ln x} - \frac{5}{\ln x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 5}{\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x - 5)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} 5x = 5.$$

Раскрытие неопределённости типа (0^0) , (∞^0) , (1^∞) .

Во всех трёх случаях рассматривается предел $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\varphi(x)}$, где $f(x)$ есть в первом случае бесконечно малая функция, во втором случае – бесконечно большая функция, а в третьем случае – функция, имеющая предел, равный единице. Функция $\varphi(x)$ в первых двух случаях является бесконечно малой, а в третьем случае – бесконечно большой функцией.

Для раскрытия указанных неопределённостей логарифмируем предварительно функцию $y = (f(x))^{\varphi(x)}$. В результате получаем равенство

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x).$$

Находим предел $\ln y$, после чего находится предел функции y . Во всех трёх случаях неопределённостей при нахождении предела функции $\ln y$ получаем неопределённость типа $(0 \cdot \infty)$, метод, раскрытия которой приведён выше.

Пример 7 Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$, используя правило Лопиталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{\ln x} - \frac{5}{\ln x} \right); \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x &= (0)^0 = A, \text{ тогда } \ln A = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \cos x)'}{(\sin x)'} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\cos x} = -\frac{0}{1} = 0, \text{ следовательно, } A = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = e^0 = 1. \end{aligned}$$

26 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Одной из основных задач математического анализа является задача приближения или *аппроксимации* функции в окрестности заданной точки. Одной из основных формул приближённых вычислений является формула Тейлора. Наиболее простыми функциями в смысле вычисления их значений являются многочлены. Формула Тейлора даёт возможность замены функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 многочленом некоторой степени.

Если функция $y = f(x)$ является дифференцируемой n раз в точке x_0 , то многочлен вида

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (1)$$

называется *многочленом Тейлора* функции $y = f(x)$.

Теорема 1 Если функция $y = f(x)$ определена и n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то при $x \rightarrow x_0$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

или в более краткой форме

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + o((x - x_0)^n), \quad (2)$$

где $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ — *остаточный член в форме Пеано*.

Формула (2) называется *формулой Тейлора n -го порядка с остаточным членом в форме Пеано*.

Если в формуле Тейлора (2) положить $x_0 = 0$, получаем частный случай формулы Тейлора, которая называется *формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (3)$$

Теорема 2 Если функция $y = f(x)$ определена и $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то при $x \rightarrow x_0$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

или в более краткой форме

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (4)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа, а $c = x_0 + \Theta(x-x_0)$ и $0 < \Theta < 1$.

Формула (4) называется *формулой Тейлора n -го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа*.

Если в формуле Тейлора (4) положить $x_0 = 0$, получаем частный случай формулы Тейлора, которая называется *формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (5)$$

где $c = \Theta x$ и $0 < \Theta < 1$.

Основные разложения применяются для представления по формуле Тейлора многих функций. При этом разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора по степеням $x-x_0$ заменой $x-x_0 = z$ сводятся к разложению функции $f(x_0+z) = f_1(z)$ по формуле Маклорена в окрестности точки $z = 0$.

Рассмотрим разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора (Маклорена).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad (6)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}$, $0 < \Theta < 1$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x), \quad (7)$$

где $R_n(x) = o(x^{2n+1})$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \Theta < 1$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x), \quad (8)$$

где $R_n(x) = o(x^{2n})$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \Theta < 1$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x). \quad (9)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(-1)^n}{(1+\Theta x)^{n+1}}$, $0 < \Theta < 1$.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (10)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n)}{(n+1)!} \cdot (1+\Theta x)^{m-n-1} \cdot x^{n+1}$, $0 < \Theta < 1$.

Формула Тейлора находит широкое применение при вычислении значений функции с заданной степенью точности. Пусть известны значения функции $y = f(x)$, а также значения её производных в точке x_0 , и необходимо вычислить приближённое значение функции в точке x_1 из окрестности точки x_0 с абсолютной погрешностью δ . Из формулы Тейлора следует, что

$$f(x_1) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n_0)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^{n_0},$$

где n_0 – наименьший из номеров n , для которых $|R_n(x_1)| < \delta$.

Формула Тейлора используется также при нахождении пределов, исследовании функции на экстремум и выпуклость, при вычислении интегралов, решении дифференциальных уравнений и в теории рядов.

Пример 1 Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Найдём значение функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$, и её производных в точке $x_0 = 2$. Значение функции в заданной точке равно двум.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad f'(2) = -1;$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad f''(2) = 2;$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}, \quad f'''(2) = -6$$

$$f^{(IV)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5}, \quad f^{(IV)}(2) = 24.$$

Следовательно, формула Тейлора (1) третьего порядка для функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$ имеет вид:

$$\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(1+\Theta(x-2))^5}, \text{ где } 0 < \Theta < 1.$$

Пример 2 Вычислить число e с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,0001.

Решение. Применяя формулу Маклорена (6) для функции $f(x) = e^x$, получаем

$$e = f(1) = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(x).$$

Число слагаемых в разложении определяем из неравенства $|R_n(x)| = \frac{e^\Theta}{(n+1)!} < 0,0001$, где $0 < \Theta < 1$. Полученное неравенство выполняется при значении $n = 7$. Следовательно,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2,2182.$$

27 ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение 1 Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на интервале I , если для каждой точки $x_1 > x_2$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$). Если последние неравенства нестрогие, то функция называется *неубывающей* (*невозрастающей*).

Теорема 1 Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на интервале I возрастает (убывает), то на этом интервале I производная функции $y = f(x)$ является неотрицательной (неположительной), то есть для производной функции $y = f(x)$ выполняются неравенства $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Определение 2 Интервалы, на которых функция убывает или возрастает, называются *интервалами монотонности функции*. Интервалы, на которых функция не убывает или не возрастает, называются *интервалами строгой монотонности функции*.

Определение 3 Точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками*. Точки области определения, в которых производная равна нулю, называют *стационарными точками*.

Определение 4 Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*), если для любой точки x из проколотой δ -окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки локального максимума и локального минимума называются *точкам локального экстремума*, а значения функции в них – *локальным экстремумом* функции в данных точках.

Теорема 2 (необходимый признак локального экстремума дифференцируемой функции). Если в точке $x = x_0$ для функции $y = f(x)$ существует локальный экстремум, то в этой точке значение производной равно нулю или не существует ($f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует).

Теорема 3 (первый достаточный признак локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в окрестности критической точки x_0 и при переходе через эту точку производная $f'(x)$ меняет свой знак, то точка x_0 является точкой экстремума.

При этом, если производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой локального максимума, если производная меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой локального минимума.

Пример 1 Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 8)^2}$. Определить интервалы возрастания и убывания функции. Найти точки экстремума.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$.

Находим производную функции: $f'(x) = \frac{2 \cdot (2x - 6)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 6x + 8}}$. Критическими точками

функции будут $x=3$, в которой $f'(x)=0$, и $x=2$, $x=4$, в которых $f'(x)$ не существует. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f'(x)$	–	$\nexists$	+	0	–	$\nexists$	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

Функция возрастает на каждом из интервалов: $[2; 3]$ и $[4; +\infty)$. Функция убывает на каждом из интервалов: $(-\infty; 2]$ и $[3; 4]$. Точки экстремума: $y_{\max} = y(3) = 1$, $y_{\min} = y(2) = y(4) = 0$.

Теорема 4 (второй достаточный признак локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в стационарной точке x_0 и $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция достигает локальный максимум, а если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция достигает локальный минимум.

Теорема 5 (третий достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

- 1) если n – чётное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума;
- 2) если n – чётное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума;
- 3) если n – нечётное, то x_0 – не является точкой локального экстремума.

Одной из основных характеристик функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ являются её глобальные экстремумы, то есть наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Непрерывная функция $y = f(x)$ достигает на отрезке $[a; b]$ своего наибольшего $\max_{[a; b]} f(x)$ и наименьшего $\min_{[a; b]} f(x)$ значения либо в критических точках, принадлежащих отрезку $[a; b]$, либо на концах этого отрезка $[a; b]$.

Следовательно, для нахождения глобальных экстремумов $\max_{[a; b]} f(x)$ и $\min_{[a; b]} f(x)$ функции $f(x)$ необходимо найти её значения в критических точках, которые принадлежат отрезку, и на концах отрезка. Среди полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения. Если отрезок не задан, то считаем, что наибольшее и наименьшее значения необходимо найти на всей области определения функции. В этом случае используем достаточные признаки экстремума.

Пример 2 Найти наименьшее и наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x}$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение. Функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на отрезке, либо в критических точках, которые принадлежат данному отрезку, либо на концах отрезка. Определим критические точки, для чего находим производную функции и выясняем, где она равна нулю или не существует.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x} \right)' = \frac{x^2 - 6x + 5}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right)^2}}.$$

$$f'(x) = 0, \quad x^2 - 6x + 5 = 0, \quad x = 1 \in [-1; 2], \quad x = 5 \notin [-1; 2].$$

Производная функции $f'(x)$ - не существует, если $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x = 0$. Решая

полученное уравнение, находим значения переменной: $x = 0 \in [-1; 2]$ или

$x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2} \notin [-1; 2]$. Таким образом, вычисляем значения функции в точках:

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

$$f(-1) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1)} = -\sqrt[3]{\frac{25}{3}}; \quad f(0) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0} = 0;$$

$$f(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1} = \sqrt[3]{\frac{7}{3}};$$

$$f(2) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Среди полученных значений выбираем наибольшее $\max_{[-1;2]} f(x)$ и наименьшее $\min_{[-1;2]} f(x)$ значения функции: $\max_{[-1;2]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{\frac{7}{3}}$;
 $\min_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -\sqrt[3]{\frac{25}{3}}$.

Пример 3 Предприятие города A , для доставки своей продукции в город B строит автомобильную дорогу AC , которая соединяет его с железной дорогой BD (см. рисунок 1). К какому пункту C , относительно города B , необходимо подвести автомобильную дорогу, чтобы при перевозке своей продукции из города A в город B предприятие имело бы наименьшее количество затрат. При этом известно, что стоимость автомобильных перевозок груза на 1 км равна 13 у. е., а стоимость перевозок груза по железной дороге 5 у. е.

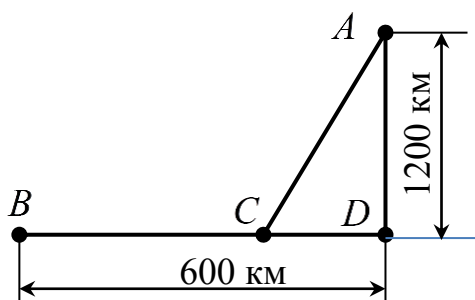


Рисунок 1 – Схема движения

Решение. Пусть S – стоимость перевозки продукции из города A в город B . Тогда $S_1 = 5x$ – стоимость перевозки груза по железной дороге на участке BC , длина которого равна x , а, стоимость перевозки продукции, по автомобильной дороге, равна

$$S_2 = 13 \cdot |AC| = 13 \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2} = 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}.$$

Следовательно, общая стоимость перевозки продукции из города A в город B будет определяться по формуле:

$$S = S_1 + S_2 = 5x + 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}.$$

Так как, стоимость должна быть наименьшей, то исследуем полученную функцию на экстремум, то есть, определим точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$\begin{aligned} S' &= (5x + 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2})' = (5x)' + (13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2})' = \\ &= 5 - \frac{13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} - 13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}}. \\ S' &= 0; \quad 5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} - 13 \cdot (600 - x) = 0. \\ 5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} &= 13 \cdot (600 - x). \end{aligned}$$

Решаем полученное иррациональное уравнение.

$$\begin{cases} 600 - x \geq 0, \\ 25 \cdot (1200^2 + (600 - x)^2) = 169 \cdot (600 - x)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 600, \\ 144 \cdot x^2 - 172800 \cdot x + 15840000 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 600, \\ x = 100 \vee x = 1100, \end{cases} \quad x = 100 \text{ км.}$$

Производная стоимости S' – не существует, если $\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} = 0$, но такого значения x нет, так как сумма квадратов положительных чисел не может равняться нулю.

Таким образом, при расстоянии $x_0 = 100$ км. стоимость перевозки продукции из города A в город B достигает своего экстремально значения, но при этом, затраты на перевозку продукции, которую изготавливает предприятие, может быть как наибольшей, так и наименьшей. Воспользуемся достаточным признаком экстремума: если $S''(x_0) < 0$, то при расстоянии $x = x_0$ стоимость является максимальной, а при значении $f''(x_0) > 0$ – минимальной. Найдем вторую производную функции, которая является стоимостью перевозки продукции из города A в город B , и определим её значение при перевозке груза, по железной дороге, на расстояние $x = 100$ км.

$$S'' = \left(5 - \frac{13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}} \right)' = \frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - x)^2)^3}}.$$

$$S''(500) = \left(\frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - x)^2)^3}} \right) \Big|_{x=100} = \frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - 100)^2)^3}} = 144000 > 0.$$

Так как, вторая производна $S''(100) > 0$, то, используя достаточный признак экстремума, при расстоянии $x = 100$ км. предприятие будет иметь наименьшее количество затрат.

Определение 5 Дифференцируемая функция $y = f(x)$ называется *выпуклой (вогнутой)* на интервале I , если дуга кривой на этом интервале расположена не выше (не ниже) любой касательной, проведённой к графику функции в любой точке этого интервала.

Определение 6 Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на вогнутость или наоборот, называется *точкой перегиба*.

Теорема 6 Если функция $y = f(x)$ на интервале I дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то график функции на этом интервале выпуклый (вогнутый).

Теорема 7 Если вторая производная функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе через эту точку вторая производная меняет свой знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба.

Пример 4 Задана функция $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48$. Определить интервалы выпуклости и вогнутости функции. Определить точки перегиба.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. Находим первую и вторую производную функции: $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x$, $f''(x) = 12x^2 - 72x + 60$. Решая уравнение $f''(x) = 0$, находим $x = 1$ и $x = 5$. Точек, в которых вторая производная $f''(x)$ не существует, нет. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых вторая производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty; 1)$	1	(1; 5)	5	$(5; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\cup$	67	$\cap$	-77	$\cup$

Функция является выпуклой на интервале $(1; 5)$. Функция является вогнутой на каждом из интервалов: $(-\infty; 1)$ и $(5; +\infty)$. Точки перегиба: $M_1(1; 67)$, $M_2(5; -77)$.

Определение 7 Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

Определение 8 Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной* (если $k = 0$ – *горизонтальной*) асимптотой графика функции $y = f(x)$ на бесконечности, если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема 8 Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b. \quad (1)$$

Пример 5 Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел, за исключением точки $x=2$. В точке $x=2$ односторонние пределы равны бесконечности ($\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$), то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой. Найдём наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x-2} = 2.$$

Таким образом, у данной кривой существует единственная наклонная асимптота, уравнение которой $y = x + 2$.

Общая схема исследования функции:

- 1) находим область определения функции;
- 2) определяем точки разрыва функции, вертикальные и горизонтальные асимптоты;
- 3) исследуем функцию на наличие свойств чётности или нечётности, периодичности;
- 4) определяем интервалы монотонности функции и точки экстремума;
- 5) находим интервалы выпуклости, вогнутости функции, точки перегиба;
- 6) находим точки пересечения графика функции с осями координат;
- 7) строим график функции;
- 8) указываем множество значений функции.

Замечание. Числовая функция $y = f(x)$ называется *чётной* (*нечётной*), если область определения симметрична относительно начала координат и $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной функции симметричен относительно начала координат. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, с наименьшим положительным периодом T , если для любого x из области определения функции числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат области определения функции, и справедливо равенство $f(x-T) = f(x+T) = f(x)$.

Пример 6 Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2}{x-1}$ и построить ее график.

Решение. 1). Так как, в точке $x=1$ значение функции не существует, то областью определения функции является множество $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Определим точки разрыва функции и асимптоты графика. Так как, в точке $x=1$ функция неопределенна, то данная точка является точкой разрыва. Исследуем функцию в окрестности данной точки:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Так как односторонние пределы равны $\pm\infty$, то в точке $x=1$ функция терпит разрыв второго рода, а, следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты $y = k \cdot x + b$ графика функции.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x \cdot (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

Таким образом, наклонной асимптотой графика функции является прямая $y = x + 1$.

3) Область определения функции не является симметричным множеством относительно начала координат, из определения четности и нечетности функции, исходная функция не является четной и не является нечетной. Исследуемая функция является дробно-рациональной, а, следовательно, непериодическая.

4) Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Найдем производную функции.

$$y' = \frac{(x^2)' \cdot (x-1) - x^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2 \cdot x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}.$$

Экстремального значения функция может достигать в критических точках, которые принадлежат области определения, то есть в точках, в

которых производная равна нулю или не существует. Находим критические точки. Производная функции $y' = 0$, если $x \cdot (x - 2) = 0$, то есть $x = 0 \in D(y)$ или $x = 2 \in D(y)$. Производная функции y' – не существует, если $x = 1 \notin D(y)$. Знаки y' найдем, решая методом интервалов неравенство $\frac{x \cdot (x - 2)}{(x - 1)^2} > 0$ (или < 0). Результаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	$\nexists$	–	0	+
y		0		$\nexists$		4	

По необходимому и достаточному признаку монотонности, функция возрастает если $y' \geq 0$ и убывает, если $y' \leq 0$. Следовательно, исследуемая функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$ а, убывает на промежутках $[0; 1)$ и $(1; 2]$. По достаточному признаку экстремума, если производная в критической точке меняет свой знак с отрицательного на положительный, то данная точка является точкой локального минимума, если же знак, в данной точке, меняется с положительного на отрицательный, то в этой точке функция достигает локального максимума.

$$y_{\min} = y(2) = 4, \quad y_{\max} = y(0) = 0.$$

5) Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость. Определим точки перегиба, если они существуют. Найдем вторую производную функции.

$$y'' = \frac{(x^2 - 2x)' \cdot (x - 1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot ((x - 1)^2)'}{(x - 1)^4} = \frac{2}{(x - 1)^3}.$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Не существует значения переменной, при которой вторая производная функции равна нулю. Вторая производная функции y'' – не существует, если $x = 1 \notin D(y)$. Результаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	–	$\nexists$	+
y		$\nexists$	

Согласно достаточного признака выпуклости (вогнутости), функция является выпуклой, если $y'' < 0$, и вогнутой, если $y'' > 0$. Следовательно,

исследуемая функция выпуклая на промежутке $(-\infty; 1)$ и вогнутая на промежутке $(1; +\infty)$. По достаточному признаку точек перегиба, если вторая производная в точке равна нулю или не существует и при переходе через эту точку из области определения функции, вторая производная меняет свой знак, то данная точка является точкой перегиба. Исходная функция не имеет точек перегиба.

6) Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

Если $x = 0$, то $y = 0$. Аналогично, значение функции равно нулю, если $x = 0$. Таким образом, функция имеет единственную точку пересечения с осями координат: $O(0; 0)$.

7) По результатам проведенных исследований строим график функции (рисунок 2).

8) Множество значений функции $E(y): y \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

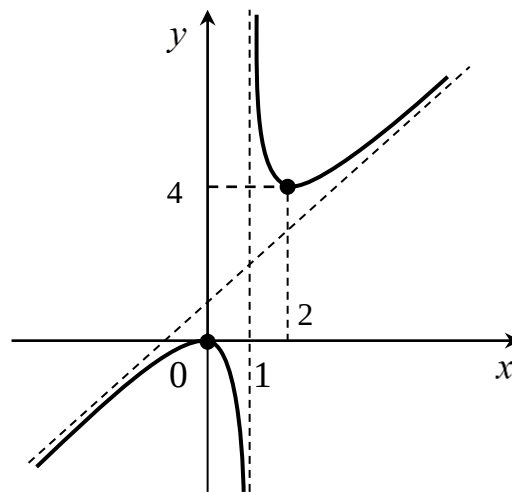


Рисунок 2 – График функции

28 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

При решении технических задач часто приходится иметь дело не только с числовыми функциями, но и с функциями, у которых область определения или множество значений состоит из элементов произвольной природы, например, являются подмножеством множества векторов трёхмерного пространства.

Определение 1 Векторной функцией действительного аргумента называется отображение, которое каждому действительному числу $t \in D \subseteq \mathbf{R}$ ставит в соответствие единственный вектор $\vec{a} = \vec{a}(t) \in E \subseteq V^3$.

Задание вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ равносильно заданию трёх скалярных функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$, которые являются её координатами: $\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$. Если вектор $\vec{a}$ является радиусом-вектором точки $M(x; y; z)$, то вектор-функцию принято обозначать:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Разным значениям t будут соответствовать различные значения вектор-функции, то есть вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ имеет определённую длину и направление. Таким образом, вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ может изменяться как по величине, так и по направлению. Зафиксируем точку приложения вектор-функции. При непрерывном изменении параметра t конец вектора $\vec{a} = \vec{a}(t)$ описывает некоторую линию.

Определение 2 Линия, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{a}$ при непрерывном изменении параметра $t \in D \subseteq \mathbf{R}$, называется *годографом* вектор функции скалярного аргумента $\vec{a}(t)$.

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движущейся в пространстве материальной точки, а любую линию в пространстве как годограф некоторой вектор-функции.

Пример 1 Найти годограф вектор-функции

$$\vec{r}(t) = \frac{16 - 4t^2}{4 + t^2} \vec{i} + \frac{16t}{4 + t^2} \vec{j} + 3\vec{k}.$$

Решение. Имеем параметрические уравнения годографа

$$x(t) = \frac{16 - 4t^2}{4 + t^2}, \quad y(t) = \frac{16t}{4 + t^2}, \quad z(t) = 3.$$

Исключая параметр t , получим

$$x^2 + y^2 = \frac{(16 - 4t^2)^2}{(4 + t^2)^2} + \frac{256t^2}{(4 + t^2)^2} = \frac{16 \cdot (16 + 8t^2 + t^4)}{(4 + t^2)^2} = 16.$$

Следовательно, годографом функции $\vec{r}(t)$ является окружность

$$x^2 + y^2 = 16, \quad z = 3,$$

из которой исключена точка $P_0(-4; 0; 3)$. При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $P(x; y; z)$ на годографе движется от точки $P_0(-4; 0; 3)$ против часовой стрелки, если наблюдать из точки расположенной выше плоскости $z = 3$. При этом $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x = -4$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y = 0$.

Введём понятие предела, непрерывности и производной вектор-функции. Предположим, что вектор-функция $\vec{a} = \vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$ определена в некоторой окрестности точки t_0 . Это означает, что в окрестности точки t_0 определены числовые функции $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$.

Определение 3 Вектор $\vec{a} = a_x^0\vec{i} + a_y^0\vec{j} + a_z^0\vec{k}$ называется *пределом вектор-функции* $\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$ при значении $t \rightarrow t_0$, если она определена в проколотой окрестности точки t_0 и

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t) = a_x^0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t) = a_y^0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t) = a_z^0$$

В этом случае записывают: $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}^0$ или

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t) \cdot \vec{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t) \cdot \vec{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t) \cdot \vec{k} = a_x^0 \cdot \vec{i} + a_y^0 \cdot \vec{j} + a_z^0 \cdot \vec{k}.$$

Таким образом, для того чтобы найти предел вектор-функции, необходимо найти соответствующие пределы координат данной функции. Если хотя бы один из пределов координат функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ не существует, то не существует предела вектор-функции. Так как, определение предела вектор-функции конструктивно не отличается от определения предела функции, то и правила нахождения предела будут аналогичны правилам нахождения предела функции: предел суммы равен сумме пределов, предел скалярного или векторного произведения вектор-функций равен скалярному или векторному произведению вектор-функций.

Определение 4 Вектор-функция $\vec{a}(t)$ называется непрерывной в точке t_0 , если она определена в окрестности этой точки и $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}(t_0)$.

Определение 5 Производной вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ по аргументу t называется новая вектор-функция

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

Если $\vec{a}(t) = (a_x(t); a_y(t); a_z(t))$, то

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left(\frac{a_x(t)}{dt}; \frac{a_y(t)}{dt}; \frac{a_z(t)}{dt} \right).$$

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

С геометрической точки зрения производная вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке t_0 есть вектор-функция $\vec{r}' = \vec{r}'(t_0)$ направленный по касательной к годографу этой вектор-функции в сторону возрастания параметра t .

Механический смысл производной от вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ состоит в том, что $\vec{r}'(t)$ есть вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции ($\vec{r}'(t_0) = \vec{v}(t_0)$).

Приведём правила дифференцирования вектор-функций ($\vec{a} = \vec{a}(t)$, $\vec{b} = \vec{b}(t)$).

- 1) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt}$.
- 2) $\frac{d}{dt}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$, где α – постоянный скаляр.
- 3) $\frac{d\vec{c}}{dt} = 0$, где $\vec{c}$ – постоянный вектор.
- 4) $\frac{d}{dt}(\varphi \cdot \vec{a}) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \vec{a} + \varphi \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$, где $\varphi = \varphi(t)$ – скалярная функция от t .
- 5) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$.
- 6) $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$.

$$7) \frac{d}{dt}(\vec{a}(\varphi(t))) = \frac{d\vec{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \text{ где } \varphi = \varphi(t) - \text{ скалярная функция от } t.$$

$$8) \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0, \text{ если } |\vec{a}| = 0.$$

Производная вектор-функции $\vec{a}'(t)$ является, в свою очередь, вектор-функцией скалярного аргумента, и её также можно дифференцировать.

Определение 6 Производной второго порядка вектор-функции $\vec{a}(t)$ называется производная от производной первого порядка $\vec{a}'(t)$.

$$\vec{a}''(t) = \frac{d^2 \vec{a}(t)}{dt^2} = (\vec{a}'(t))' = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \right).$$

По индукции, определяются производные высшего порядка:

$$\vec{a}^{(n)}(t) = \frac{d^n \vec{a}(t)}{dt^n} = (\vec{a}^{(n-1)}(t))' = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1} \vec{a}}{dt^{n-1}} \right).$$

Механический смысл второй производной от вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 состоит в том, что $\vec{r}''(t_0)$ есть вектор ускорения движения материальной точки в данный момент времени.

Таким образом, если $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор материальной точки, $\vec{v}(t)$ – скорость, а $\vec{a}(t)$ – ускорение, то

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

Пример 2 Дано уравнение движения: $\vec{r}(t) = (4t^2 - 2)\vec{i} + (1 - 3t^4)\vec{j} + t^4\vec{k}$. Определить скорость и ускорение движения.

$$\text{Решение. } \vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = 8t \cdot \vec{i} - 12t^3 \cdot \vec{j} + 4t^3 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = 8 \cdot \vec{i} - 36t^2 \cdot \vec{j} + 12t^2 \cdot \vec{k}.$$

Рассмотрим пространственную кривую L заданную параметрическим образом: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Эта кривая представляет собой годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, а вектор $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0))$ направлен по касательной к кривой L в точке касания $M_0(x_0; y_0; z_0)$, соответствующей значению параметра t_0 , а, следовательно, этот вектор возьмём в качестве направляющего вектора касательной. Тогда уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \quad (1)$$

Определение 7 *Нормальной плоскостью* к пространственной кривой называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и проходящая через точку касания.

Уравнение нормальной плоскости к пространственной кривой имеет вид:

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (2)$$

Пусть кривая в плоскости Oxy является графиком вектор функции $\vec{r} = \vec{r}(l) = (x(l); y(l))$, где l – длина дуги кривой.

Пример 3 Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = t^3 - 1$, $y = t^2$, $z = 4t^2 + 1$ в точке $P_0(0; 1; 5)$.

Решение. Данной точке соответствует значение параметра $t = 1$. Находим производные

$$x' = (t^3 - 1)' = 3t^2, \quad y' = (t^2)' = 2t, \quad z' = (4t^2 + 1)' = 8t.$$

Подставляя значение $t = 1$, получаем

$$x'(1) = 3, \quad y'(1) = 2, \quad z'(1) = 8.$$

Для записи уравнения касательной прямой и нормальной плоскости воспользуемся уравнениями (13.1.1) и (13.1.2), соответственно.

Уравнение касательной прямой:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{8}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$3x + 2(y-1) + 8(z-5) = 0,$$

или

$$3x + 2y + 8z - 42 = 0.$$

Определение 3.1.8 *Кривизной кривой* называется абсолютная величина предела отношения угла $\Delta\varphi$ поворота касательной, соответствующей дуге данной кривой, к длине Δl этой дуги, при стремлении последней к нулю, и если этот предел существует и конечен.

$$K = \left| \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \right|. \quad (3)$$

Величина $R = 1/K$ называется *радиусом кривизны*.

Кривизна K определяется соотношением

$$K = \left| \frac{d^2 r}{dl^2} \right| = \left| \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}'|^3} \right|. \quad (4)$$

Формулы для вычисления кривизны:

1) если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то

$$K = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right|; \quad (5)$$

2) если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$,
то

$$K = \left| \frac{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \right|. \quad (6)$$

3) если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, то

$$K = \left| \frac{r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \right|. \quad (7)$$

Пример 4 Найти кривизну и радиус кривизны линии $y = x^3 + 5x^2 + 3x$ в точке $M(1; 9)$.

Решение. Вычислим значения первой и второй производной в точке M : $y' = 3x^2 + 10x + 3$, $y'(1) = 16$, $y'' = 6x + 10$, $y''(1) = 16$. Тогда

$$K = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{16}{(1 + 16^2)^{3/2}} \right| = \frac{16}{257\sqrt{257}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{257\sqrt{257}}{16}.$$

Определение 9 *Окружностью кривизны* кривой в её точке M называется предельное положение окружности, проведённой через точку M и две другие точки кривой, при стремлении последних к точке M .

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны, а *центр кривизны*, соответствующей точке M , находится на нормали к кривой, проведённой в точке M в сторону вогнутости кривой.

Координаты x_c и y_c центра кривизны равны

$$x_c = x - \frac{y' \cdot (1 + y'^2)}{y''}, \quad y_c = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \quad (8)$$

Определение 10 Множество точек центров кривизны линии называется *эволютой*, а сама линия по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

Пример 5 Найти уравнение эволюты параболы $y^2 = 2x + 2$.

Решение. Находим первую и вторую производные.

$$2yy' = 2, \quad y' = 1/y, \quad y'^2 + yy'' = 0, \quad y'' = -y'^2/y = -1/y^3.$$

По формулам (13.1.8) находим координаты центра кривизны:

$$X = x - \frac{y' \cdot (1 + y'^2)}{y''} = \frac{y^2}{2} - 1 - \frac{\frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y^2} \right)}{-\frac{1}{y^3}} = \frac{3}{2}y^2;$$

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y + \frac{1 + \frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{y^3}} = -y^3.$$

Таким образом, найдены параметрические уравнения эволюты:

$$X = \frac{3}{2}y^2, \quad Y = -y^3.$$

Исключая параметр y , найдём уравнение эволюты в виде

$$X^3 = \frac{27}{8}Y^2.$$

Выполнив замену $Y = y, X = x$, окончательно получаем уравнение искомой эволюты: $27y^2 = 8x^3$.