

## ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 1.2 Примеры решения типовых задач

**1.2.1** Найти первообразную функции  $f(x) = 5\cos 7x - 3\sin 4x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Решение. Производные функций  $y = \sin 7x$ ,  $y = \cos 4x$  и  $y = \arcsin x$  равны, соответственно,  $y' = 7\cos 7x$ ,  $y' = -4\sin 4x$  и  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Следовательно,  $\cos 7x = \frac{1}{7}(\sin 7x)'$ ,  $\sin 4x = -\frac{1}{4}(\cos 4x)'$ , а  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arcsin x)'$ . Тогда первообразная заданной функции равна  $F(x) = \frac{5}{7}\sin 7x + \frac{3}{4}\cos 4x + \arcsin x$ .

**1.2.2** Найти  $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x + 5)dx$ .

Решение. Применив свойства 4 и 5, получим

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 2x + 5)dx = \int x^3 dx + 3\int x^2 dx - 2\int x dx + 5\int dx.$$

Применим к интегралам первую формулу таблицы интегралов

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 2x + 5)dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5 \cdot x + C = x^4 + x^3 - x^2 + 5x + C.$$

**1.2.3** Найти  $\int \left( \frac{5}{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$ .

Решение.  $\int \left( \frac{5}{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = 5\ln|x| + \sqrt[3]{x^4} - \sqrt{x} + C.$

**1.2.4** Найти  $\int 2^x 5^x e^x dx$ .

Решение.  $\int 2^x 5^x e^x dx = \int (10e)^x dx = \frac{(10e)^x}{\ln 10e} + C.$

**1.2.5** Найти  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ .

Решение.  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$   
 $= -\operatorname{ctg} x - x + C.$

**1.2.6** Найти  $\int \frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)} dx$ .

Решение.  $\int \frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)} dx = \int \frac{4+4x+x^2}{x(4+x^2)} dx = \int \left( \frac{4}{4+x^2} + \frac{4}{x} \right) dx =$   
 $= \frac{4}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + 4\ln|x| + C = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + 4\ln|x| + C.$

### 1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1. Найти первообразные следующих функций:

1.3.1.1  $3x^5 + 2$ .

1.3.1.2  $4x^3 + 5x + e$ .

1.3.1.3  $\sqrt[5]{x} - \sqrt{x}$ .

1.3.1.4  $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \pi$ .

1.3.1.5  $\frac{1}{\sqrt{4+3x}}$ .

1.3.1.6  $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ .

1.3.1.7  $\frac{1}{25+x^2}$ .

1.3.1.8  $\frac{x^3+1}{x-1}$ .

1.3.1.9  $\cos 7x - \sin 6x$ .

1.3.2. Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

1.3.2.1  $\int (\sqrt{5x} + 3) dx$ .

1.3.2.2  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{x}} dx$ .

1.3.2.3  $\int \frac{(5 - \sqrt{x})^2}{5\sqrt{x}} dx$ .

1.3.2.4  $\int \frac{x^4 + x^2 + 3}{x} dx$ .

1.3.2.5  $\int 7^{2x} e^x dx$ .

1.3.2.6  $\int (x + \sin x) dx$ .

1.3.2.7  $\int \frac{6 - \cos x}{\cos^2 x} dx$ .

1.3.2.8  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ .

1.3.2.9  $\int \operatorname{cth}^2 x dx$ .

1.3.2.10  $\int \frac{dx}{9 - x^2}$ .

1.3.2.11  $\int \frac{dx}{25 + x^2}$ .

1.3.2.12  $\int \frac{dx}{\sqrt{36 - x^2}}$ .

1.3.2.13  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 11}}$ .

1.3.2.14  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 13}}$ .

1.3.2.15  $\int \frac{(9+x)^2 dx}{x(81+x^2)}$ .

1.3.2.16  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 5} - \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$ .

1.3.2.17  $\int \frac{x^2 - 5}{x^2 - 4} dx$ .

1.3.2.18  $\int \frac{x^2 + 8}{x^2 + 9} dx$ .

1.3.2.19  $\int \left( \frac{9\sqrt[7]{x^2} - 3\sqrt[3]{x}}{32\sqrt[4]{x}} - \sin x + 31^x + \frac{(10+x)^2}{x(100+x^2)} - \frac{2\cos x + 3\cos^2 x}{4\cos x} + \operatorname{tg}^2 x - \frac{9}{x} \right) dx$ .

### 1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Найти неопределённые интегралы. Результат интегрирования проверить дифференцированием.

1.4.1.1  $\int \left( \frac{5\sqrt[7]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{7\sqrt[5]{x}} - 3\sin x + 2^x + \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} - \frac{\cos x + \cos^2 x}{2\cos x} + \operatorname{tg}^2 x - \frac{4}{x} + 2 \right) dx$ .

1.4.1.2  $\int \left( \frac{6\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[7]{x}} + \cos x + 3^x + \frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)} + \frac{3\sin x + 5\sin^2 x}{4\sin x} + \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1}{x^2} \right) dx$ .

1.4.1.3  $\int \left( \frac{4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x}}{5\sqrt[4]{x}} - 9\operatorname{sh} x + 4^x + \frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)} - \frac{\cos x - \cos^2 x}{3\cos x} + 5\operatorname{th}^2 x - \frac{9}{x^{10}} \right) dx$ .

1.4.1.4  $\int \left( \frac{9\sqrt[9]{x} - 6\sqrt[4]{x}}{5\sqrt[3]{x}} + 4\operatorname{ch} x + 5^x + \frac{(2-x)^2}{x(4+x^2)} + \frac{7\sin x - 8\sin^2 x}{5\sin x} + \operatorname{cth}^2 x - \frac{7}{x} \right) dx$ .

$$1.4.1.5 \quad \int \left( \frac{9\sqrt{x} + 6\sqrt[5]{x}}{3^{10}\sqrt{x}} - \sin x + 6^x + \frac{(3+x)^2}{x(9+x^2)} + \frac{2\cos x + \cos^2 x}{5\cos x} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 6 \right) dx.$$

$$1.4.1.6 \quad \int \left( \frac{8\sqrt[4]{x^3} - 5\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{x^7}} + \cos x + 8^x + 3 \cdot \frac{(4+x)^2}{x(16+x^2)} + \frac{1+3\sin x}{2\sin x} + \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{8}{x^9} \right) dx.$$

$$1.4.1.7 \quad \int \left( \frac{4^{10}\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x}}{6^{15}\sqrt{x}} - 2\operatorname{sh}x + 7^x + \frac{(3-x)^2}{x(9+x^2)} - \frac{7-5\cos x}{6\cos x} + \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{4}{x^5} \right) dx.$$

$$1.4.1.8 \quad \int \left( \frac{8\sqrt[6]{x} - 6\sqrt[7]{x}}{7\sqrt[3]{x^4}} + 9\operatorname{ch}x + 9^x + \frac{(4-x)^2}{x(16+x^2)} + 5^{2x} \cdot 3^x + \frac{2}{\sqrt{x^2-7}} - \frac{8}{x^9} + 5 \right) dx.$$

$$1.4.1.9 \quad \int \left( \frac{12\sqrt[3]{x} - 21\sqrt[4]{x}}{8^{12}\sqrt{x}} - 7\sin x + 10^x + \frac{(5+x)^2}{x(25+x^2)} - \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin x} + 9\operatorname{tg}^2 x - \frac{4}{x} \right) dx.$$

$$1.4.1.10 \quad \int \left( \frac{4\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[6]{x}}{9\sqrt[8]{x}} + 2\cos x + 11^x + \frac{(6+x)^2}{x(36+x^2)} + \frac{3}{\sqrt{5-x^2}} + 7\operatorname{ctg}^2 x + \frac{5}{x^6} \right) dx.$$

$$1.4.1.11 \quad \int \left( \frac{7\sqrt[7]{x^2} + \sqrt{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} - 3\operatorname{sh}x + 12^x + \frac{(5-x)^2}{x(25+x^2)} - \frac{3-2\cos x}{\cos x} + 2\operatorname{th}^2 x - \frac{8}{x} + 8 \right) dx.$$

$$1.4.1.12 \quad \int \left( \frac{8\sqrt[9]{x^2} - 5\sqrt[8]{x^5}}{4\sqrt[4]{x^5}} + \operatorname{ch}x + 13^x + \frac{(6-x)^2}{x(36+x^2)} + \frac{\sin x - 5\sin^2 x}{4\sin x} + \operatorname{cth}^2 x - \frac{7}{x} \right) dx.$$

$$1.4.1.13 \quad \int \left( \frac{4\sqrt[6]{x} + \sqrt[5]{x}}{3\sqrt[10]{x}} - \sin x + 7^x + \frac{(7+x)^2}{x(49+x^2)} + \frac{\cos x + 8\cos^2 x}{2\cos x} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx.$$

$$1.4.1.14 \quad \int \left( \frac{7\sqrt[3]{x^8} - 8\sqrt[6]{x^5}}{12\sqrt{x}} + \cos x + 15^x + \frac{(8+x)^2}{x(64+x^2)} + \frac{1+3\sin x}{2\sin x} + \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^3} \right) dx.$$

$$1.4.1.15 \quad \int \left( \frac{4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}}{12^{12}\sqrt{x}} - \operatorname{sh}x + 16^x + \frac{(7-x)^2}{x(49+x^2)} - \frac{3-\cos x}{6\cos x} + \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{4}{x^5} + e \right) dx.$$

$$1.4.1.16 \quad \int \left( \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}{8\sqrt[6]{x}} - 9\sin x + 17^x + \frac{(8+x)^2}{x(64+x^2)} - \frac{7\cos x + \cos^2 x}{3\cos x} - \operatorname{tg}^2 x - \frac{7}{x^8} \right) dx.$$

$$1.4.1.17 \quad \int \left( \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[8]{x}}{5\sqrt{x}} + 8\cos x + 18^x + \frac{(9+x)^2}{x(81+x^2)} + \frac{\sin x + 2\sin^2 x}{3\sin x} + 4\operatorname{ctg}^2 x + \frac{4}{x} \right) dx.$$

$$\begin{aligned}
1.4.1.18 \quad & \int \left( \frac{\sqrt[7]{x} - 2\sqrt[6]{x}}{3\sqrt[5]{x}} + 4\operatorname{sh}x + 19^x + \frac{(8-x)^2}{x(64-x^2)} - \frac{\cos x - 3\cos^2 x}{6\cos x} + 7\operatorname{th}^2 x - \frac{5}{x} \right) dx. \\
1.4.1.19 \quad & \int \left( \frac{\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[3]{x}} + \operatorname{ch}x + 20^x + \frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)} + \frac{\sin x - 3\sin^2 x}{5\sin x} + \operatorname{cth}^2 x - \frac{3}{x^4} + 7 \right) dx. \\
1.4.1.20 \quad & \int \left( \frac{5\sqrt[6]{x} + 2\sqrt{x}}{4\sqrt[3]{x}} - 7\sin x + 21^x + \frac{(x+3)^2}{x(x^2+9)} + \frac{3\cos x + \cos^2 x}{6\cos x} + \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx. \\
1.4.1.21 \quad & \int \left( \frac{5\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^2}}{7\sqrt[3]{x^7}} + \cos x + 21^x + \frac{(x+4)^2}{x(x^2+16)} + \frac{1+5\sin x}{5\sin x} + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6}{x^7} \right) dx. \\
1.4.1.22 \quad & \int \left( \frac{4\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}}{20\sqrt{x}} - 3\operatorname{sh}x + 22^x + \frac{(x-3)^2}{x(x^2-9)} - \frac{2-4\cos x}{2\cos x} + \frac{3}{\sqrt{16+x^2}} - \frac{7}{x^8} \right) dx. \\
1.4.1.23 \quad & \int \left( \frac{8\sqrt[8]{x} + \sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x^3}} + 5\operatorname{ch}x + 23^x + \frac{(x-4)^2}{x(16+x^2)} + 6^{2x} \cdot 5^x + \frac{3}{\sqrt{x^2-6}} - \frac{5}{x^6} + \pi \right) dx. \\
1.4.1.24 \quad & \int \left( \frac{\sqrt[8]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{4\sqrt[4]{x}} - 8\sin x + 24^x + \frac{(x+5)^2}{x(x^2+25)} - \operatorname{tg} x \cdot \frac{2}{\sin x} + 3\operatorname{tg}^2 x - \frac{8}{x} \right) dx. \\
1.4.1.25 \quad & \int \left( \frac{4\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + 3\cos x + 25^x + \frac{(x+6)^2}{x(x^2+36)} + \frac{2}{\sqrt{3-x^2}} + 5\operatorname{ctg}^2 x + \frac{3}{x^4} \right) dx. \\
1.4.1.26 \quad & \int \left( \frac{6\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[5]{x^3}} - 5\operatorname{sh}x + 26^x + \frac{(x-5)^2}{x(x^2+25)} - \frac{2-3\cos x}{\cos x} + 7\operatorname{th}^2 x - \frac{5}{x^6} \right) dx. \\
1.4.1.27 \quad & \int \left( \frac{\sqrt{x^9} - \sqrt[5]{x^8}}{3\sqrt[6]{x^5}} + \operatorname{ch}x + 27^x + \frac{(x-6)^2}{x(x^2+36)} + \frac{\sin x - 6\sin^2 x}{3\sin x} + 3\operatorname{cth}^2 x - \frac{7}{x} \right) dx. \\
1.4.1.28 \quad & \int \left( \frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[5]{x^6}}{\sqrt{x}} - 8\sin x + 28^x + \frac{(x+7)^2}{x(x^2+49)} + \frac{3\cos x + \cos^2 x}{5\cos x} + \frac{2}{\sqrt{8-x^2}} \right) dx. \\
1.4.1.29 \quad & \int \left( \frac{\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[7]{x^3}}{7\sqrt{x^3}} + 2\cos x + 29^x + \frac{(x+8)^2}{x(x^2+64)} + \frac{2+\sin x}{2\sin x} + \frac{9}{\cos^2 x} + \frac{11}{x^{12}} \right) dx. \\
1.4.1.30 \quad & \int \left( \frac{\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x}}{24\sqrt[6]{x}} - 3\operatorname{sh}x + 30^x + \frac{(x-7)^2}{x(x^2+49)} - \frac{2-\cos x}{6\cos x} + \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} - \frac{5}{x^6} \right) dx.
\end{aligned}$$

## МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

### 2.2 Примеры решения типовых задач

**2.2.1** Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ .

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)).

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left[ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2 \\ dx = dt^2 = (t^2)' dt = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{\cos t \cdot 2t dt}{t} = 2 \int \cos t dt = 2 \sin t + C = \\ = 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

**2.2.2** Найти неопределённый интеграл  $\int (2 + 4 \cos 5x)^3 \sin 5x dx$ .

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)).

$$\int (2 + 4 \cos 5x)^3 \sin 5x dx = \left[ \begin{array}{l} 2 + 4 \cos 5x = t \\ d(2 + 4 \cos 5x) = dt \\ -20 \sin 5x dx = dt \end{array} \right] = -\frac{1}{20} \int t^3 dt = -\frac{1}{80} t^4 + C = \\ = -\frac{1}{80} (2 + 4 \cos 5x)^4 + C.$$

**2.2.3** Найти неопределённый интеграл  $\int 4x \ln x dx$ .

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\int 4x \ln x dx = \left[ \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = 4x dx & v = 2x^2 \end{array} \right] = 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \frac{dx}{x} = \\ = 2x^2 \ln x - \int 2x dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C.$$

**2.2.4** Найти неопределённый интеграл  $\int 125x^2 \sin 3x dx$ .

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\int 125x^2 \sin 5x dx = \left[ \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = 125 \sin 5x dx & v = -25 \cos 5x \end{array} \right] = -25x^2 \cos 5x + \int 50x \cos 5x dx = \\ = \left[ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2 dx \\ dv = 25 \cos 5x dx & v = 5 \sin 5x \end{array} \right] = -25x^2 \cos 5x + 10x \sin 5x - \int 10 \sin 5x dx = \\ = -25x^2 \cos 5x + 10x \sin 5x + 2 \cos 5x + C.$$

**2.2.5** Найти неопределённый интеграл  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ .

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)), а затем формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \left[ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2 \\ dx = dt^2 = (t^2)' dt = 2t dt \end{array} \right] = \int 2te^t dt = \left[ \begin{array}{ll} u = 2t & du = 2dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{ll} u = 2t & du = 2dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{array} \right] = 2te^t - 2 \int e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

## 2.3 Задания для решения на практическом занятии

**2.3.1** Найти неопределённые интегралы.

$$2.3.1.1 \quad \int \sin(3x+4) dx. \quad 2.3.1.2 \quad \int \frac{\sin(3x-1)}{\cos^3(3x-1)} dx. \quad 2.3.1.3 \quad \int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$2.3.1.4 \quad \int \frac{6x-2}{3x^2-2x+5} dx. \quad 2.3.1.5 \quad \int x e^{x^2+1} dx. \quad 2.3.1.6 \quad \int \frac{\operatorname{tg} 3x dx}{\cos^2 3x}.$$

$$1.3.1.7 \quad \int \frac{6-\cos 3x}{\sin^2 3x} dx. \quad 2.3.1.8 \quad \int \frac{x dx}{x^2+1}. \quad 2.3.1.9 \quad \int \frac{x^3 dx}{x^8+1}.$$

**2.3.2** Найти неопределённые интегралы.

$$2.3.2.1 \quad \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx. \quad 2.3.2.2 \quad \int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x}. \quad 2.3.2.3 \quad \int \frac{e^{2x} dx}{e^x+1}.$$

**2.3.3** Найти неопределённые интегралы.

$$2.3.3.1 \quad \int (3x+4)e^{2x+1} dx. \quad 2.3.3.2 \quad \int (x^2-1) \ln x dx. \quad 2.3.3.3 \quad \int x^2 \cos 3x dx.$$

$$2.3.3.4 \quad \int \operatorname{arctg} 2x dx. \quad 2.3.3.5 \quad \int (x-1) \sin 6x dx. \quad 2.3.3.6 \quad \int x \arcsin x dx.$$

**2.3.4** Найти неопределённые интегралы.

$$2.3.4.1 \quad \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx. \quad 2.3.4.2 \quad \int \sin \sqrt{x} dx. \quad 2.3.4.3 \quad \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$$

## 2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Найти неопределённые интегралы. Результат интегрирования проверить дифференцированием.

2.4.1.1 а)  $\int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)}$ ; б)  $\int 27(x^2 - 2)e^{3x} dx$ ; в)  $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ .

2.4.1.2 а)  $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}$ ; б)  $\int (x^2 + 2x) \ln x dx$ ; в)  $\int \frac{(\sqrt[3]{x} + 2)e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ .

2.4.1.3 а)  $\int \frac{(2x - 5) dx}{x^2 - 5x + 6}$ ; б)  $\int 8x^2 \sin 2x dx$ ; в)  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$ .

2.4.1.4 а)  $\int \operatorname{tg}(6x + 4) dx$ ; б)  $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ ; в)  $\int 2x^3 \sin x^2 dx$ .

2.4.1.5 а)  $\int \operatorname{ctg}(3x - 1) dx$ ; б)  $\int 27x^2 \cos 3x dx$ ; в)  $\int \frac{\operatorname{arcctg} \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}} dx$ .

2.4.1.6 а)  $\int \operatorname{th}(4x + 5) dx$ ; б)  $\int \operatorname{arcctg} 3x dx$ ; в)  $\int 3x^5 \cos x^3 dx$ .

2.4.1.7 а)  $\int \operatorname{cth}(7x + 5) dx$ ; б)  $\int \frac{x \sin 4x}{\cos^2 4x} dx$ ; в)  $\int \frac{\arcsin \sqrt[7]{x}}{\sqrt[7]{x^6}} dx$ .

2.4.1.8 а)  $\int \frac{(2x + 4) dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$ ; б)  $\int \arcsin 2x dx$ ; в)  $\int 3x^7 \sin x^4 dx$ .

2.4.1.9 а)  $\int \sin^3 5x \cos 5x dx$ ; б)  $\int \frac{x \cos 5x}{\sin^2 5x} dx$ ; в)  $\int \frac{\arccos \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx$ .

2.4.1.10 а)  $\int \cos^4 3x \sin 3x dx$ ; б)  $\int \arccos 7x dx$ ; в)  $\int 2x^9 \cos x^5 dx$ .

2.4.1.11 а)  $\int \frac{\operatorname{tg}^5 7x dx}{\cos^2 7x}$ ; б)  $\int x^2 \log_2 x \ln 2 dx$ ; в)  $\int 10x^3 5^{5x^2 + 3} dx$ .

2.4.1.12 а)  $\int \frac{\operatorname{ctg}^6 4x dx}{\sin^2 4x}$ ; б)  $\int 64x^2 5^{4x+2} dx$ ; в)  $\int x^3 \log_3 x^2 dx$ .

2.4.1.13 а)  $\int \frac{\operatorname{arctg}^9 8x dx}{1 + 64x^2}$ ; б)  $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$ ; в)  $\int 8x^{15} \sin x^8 dx$ .

2.4.1.14 а)  $\int \frac{\operatorname{arcctg}^4 3x dx}{1 + 9x^2}$ ; б)  $\int 27x^2 \sin 3x dx$ ; в)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ .

2.4.1.15 а)  $\int \frac{\arcsin^6 7x dx}{\sqrt{1 - 49x^2}}$ ; б)  $\int x \operatorname{arcctg} 5x dx$ ; в)  $\int 7x^5 \cos x^3 dx$ .

2.4.1.16 а)  $\int \frac{\arccos^7 6x dx}{\sqrt{1 - 36x^2}}$ ; б)  $\int \frac{x \sin 5x}{\cos^2 5x} dx$ ; в)  $\int \arcsin \sqrt[4]{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

2.4.1.17 а)  $\int \frac{(\ln^3 5x + \ln 3x) dx}{x}$ ; б)  $\int x \arcsin 7x dx$ ; в)  $\int \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ .

- 2.4.1.18 a)  $\int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x) dx}{\cos^2 x}$ ; б)  $\int \frac{x \cos 6x}{\sin^2 6x} dx$  в)  $\int 3^{\sqrt{x}} dx$ .
- 2.4.1.19 a)  $\int \frac{(\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x) dx}{\sin^2 x}$ ; б)  $\int 64(x^2 - 3)e^{4x} dx$ ; в)  $\int \frac{\log_5 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
- 2.4.1.20 a)  $\int e^{3x^2+x+2} (2x+2) dx$ ; б)  $\int (x^2 + 5x) \ln x dx$ ; в)  $\int 6x^{11} \sin x^6 dx$ .
- 2.4.1.21 a)  $\int 2^{x^2+4x} (4x+8) dx$ ; б)  $\int 27x^2 \sin 3x dx$ ; в)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt[7]{x} \frac{dx}{\sqrt[7]{x^5}}$
- 2.4.1.22 a)  $\int \frac{6x dx}{\sqrt{81x^4 - 16}}$ ; б)  $\int \operatorname{arctg} 4x dx$ ; в)  $\int 9x^3 \cos x^2 dx$ .
- 2.4.1.23 a)  $\int \frac{12x dx}{\sqrt{9x^2 - 2}}$ ; б)  $\int 216x^2 \cos 6x dx$ ; в)  $\int x^3 \operatorname{arcctg} x^2 dx$ .
- 2.4.1.24 a)  $\int \frac{8x dx}{\sqrt{16x^4 + 49}}$ ; б)  $\int \operatorname{arcctg} 9x dx$ ; в)  $\int x \arcsin x^2 dx$ .
- 2.4.1.25 a)  $\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^4 - 2}}$ ; б)  $\int \frac{x \sin 6x}{\cos^2 6x} dx$ ; в)  $\int x \arccos x^2 dx$ .
- 2.4.1.26 a)  $\int \frac{24x^5 dx}{64x^{12} + 1}$ ; б)  $\int \arcsin 5x dx$ ; в)  $\int x^5 6^{3x^3+1} dx$ .
- 2.4.1.27 a)  $\int \frac{10x^4 dx}{32x^{10} + 1}$ ; б)  $\int \frac{x \cos 11x}{\sin^2 11x} dx$ ; в)  $\int \frac{\operatorname{arctg}(1+x^2)}{1+x^2} dx$ .
- 2.4.1.28 a)  $\int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\sin^6 x + 4}$ ; б)  $\int \arccos 8x dx$ ; в)  $\int \frac{\ln(\ln(\ln x))}{x \ln x} dx$ .
- 2.4.1.29 a)  $\int \frac{\cos^2 x \sin x dx}{\cos^3 x + 16}$ ; б)  $\int x^2 \log_3 x \ln 3 dx$ ; в)  $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ .
- 2.4.1.30 a)  $\int \frac{(3^{\sqrt{x}} - 5) dx}{\sqrt{x}}$ ; б)  $\int 27x^2 7^{3x+2} dx$ ; в)  $\int \frac{\operatorname{arcctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ .

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

### 3.2 Примеры решения типовых задач

**3.2.1** Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{(4x-1)dx}{x^5-x^2}$ .

Решение. Разложим знаменатель на множители

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Тогда подынтегральная функция представима в виде суммы простейших рациональных дробей

$$\frac{4x-1}{x^5-x^2} = \frac{4x-1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть, получаем дробь, равную первоначальной, причём её знаменатель равен знаменателю исходной дроби, а, следовательно, числители полученных дробей также будут равны.

$$Ax(x-1)(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Mx+N)x^2(x-1) = 4x-1.$$

Для определения неизвестных параметров в разложении, применим комбинированный метод «неопределённых коэффициентов».

При значении переменной  $x=0$ , получаем значение параметра  $B=1$ .

При значении переменной  $x=1$ , получаем значение параметра  $C=1$ .

Перепишем равенство числителей дробей в виде

$$A(x^4-x) + B(x^3-1) + C(x^4+x^3+x^2) + M(x^4-x^3) + N(x^3-x^2) = 4x-1,$$

или, с учётом найденных параметров, равенство принимает вид

$$(A+1+M)x^4 + (2-M+N)x^3 + (1-N)x^2 - Ax = 4x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+1+M=0, \\ 2-M+N=0, \\ 1-N=0, \\ -A=4. \end{cases}$$

Из полученной системы находим неизвестные параметры в разложении исходной подынтегральной функции:  $A = -4$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$ ,  $M = 3$ ,  $N = 1$ .

Итак,  $\frac{4x-1}{x^5-x^2} = -\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+x+1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \int \frac{4x-1}{x^5-x^2} dx &= -4 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{3x+1}{x^2+x+1} dx = \\ &= -4 \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x-1| + \frac{3}{2} \int \frac{2x+1-1/3}{x^2+x+1} dx = \ln \frac{|x-1|}{x^4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \ln \frac{|x-1|}{x^4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \ln \frac{|x-1|}{x^4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

**3.2.2** Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx$ .

Решение. Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r} - \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^4 + 2x} \cdot \frac{x^2 + 2}{x + 3} \\ \quad \frac{3x^2 + 3x + 7}{3x^2} + 6 \\ \hline \quad \quad 3x + 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx &= \int \left( x + 3 + \frac{3x+1}{x^2+2} \right) dx = \int x dx + 3 \int dx + \\ &+ \int \frac{3x+1}{x^2+2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

### 3.3 Задания для решения на практическом занятии

### 3.3.1 Найти неопределённые интегралы.

**3.3.1.1**  $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$

**3.3.1.2**  $\int \frac{(3x-1)dx}{x^3-4x^2+3x}$ .

**3.3.1.3**  $\int \frac{dx}{x^3 - 9x}$ .

$$\begin{array}{lll}
3.3.1.4 \quad \int \frac{6x-2}{(x-5)^2(x+2)} dx & 3.3.1.5 \quad \int \frac{(x+1)dx}{x^4+4x^3+4x^2} & 3.3.1.6 \quad \int \frac{(x^2+3)dx}{x^4+x^2} \\
3.3.1.7 \quad \int \frac{(6-x)dx}{(x-2)(x^2+6x+13)} & 3.3.1.8 \quad \int \frac{(x+5)dx}{x^3+2x^2+x} & 3.3.1.9 \quad \int \frac{(x^3+2)dx}{x^4+x^2}
\end{array}$$

3.3.2 Найти неопределённые интегралы.

$$\begin{array}{lll}
3.3.2.1 \quad \int \frac{(x^5+1)dx}{x^4-8x^2+16} & 3.3.2.2 \quad \int \frac{(x^3+x^2)dx}{x^2-6x+5} & 3.3.2.3 \quad \int \frac{x^4 dx}{x^4-16}
\end{array}$$

### 3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти неопределённые интегралы.

$$\begin{array}{lll}
3.4.1.1 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(7x^2-1)dx}{x^3-2x^2-3x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(4x^2+3x+17)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}; & \text{в)} \quad \int \frac{x^4}{x^3-1} dx \\
3.4.1.2 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(x^2+2)dx}{x^3+2x^2-3x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(x^2-19x+34)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}; & \text{в)} \quad \int \frac{x^4+2x}{x^3+1} dx \\
3.4.1.3 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(x^2-5)dx}{x^3+3x^2-4x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(2x+22)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}; & \text{в)} \quad \int \frac{2x^5}{x^3-8} dx \\
3.4.1.4 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(2x^2+1)dx}{x^3+x^2-2x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(3x+13)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}; & \text{в)} \quad \int \frac{x^5-2}{x^3+8} dx \\
3.4.1.5 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(4x^2-5)dx}{x^3-3x^2+2x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(4x+2)dx}{x^4+4x^2}; & \text{в)} \quad \int \frac{3x^4}{x^3-27} dx \\
3.4.1.6 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(3x+2)dx}{x^3+6x^2+8x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(4x^2+38)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}; & \text{в)} \quad \int \frac{x^4+3x}{x^3+27} dx \\
3.4.1.7 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(x-9)dx}{x^3-6x^2+8x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(x^2-6x+8)dx}{x^3+8}; & \text{в)} \quad \int \frac{4x^5}{x^3-64} dx \\
3.4.1.8 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(5x^2-9)dx}{x^3-7x^2+12x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(x^2-5x+40)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}; & \text{в)} \quad \int \frac{4x^5-x^2}{x^3+64} dx \\
3.4.1.9 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(4x-3)dx}{x^3-8x^2+15x}; & \text{б)} \quad \int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}; & \text{в)} \quad \int \frac{5x^4}{x^3-125} dx \\
3.4.1.10 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(6x^2+2)dx}{x^3-9x^2+18x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(12-6x)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}; & \text{в)} \quad \int \frac{5x^4+3x}{x^3+125} dx \\
3.4.1.11 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(3x^2+3)dx}{x^3-7x^2+10x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(4x-x^2-12)dx}{x^3+8}; & \text{в)} \quad \int \frac{6x^5}{x^3-216} dx \\
3.4.1.12 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(2x+5)dx}{x^3+4x^2-12x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(2x^2+4x+20)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}; & \text{в)} \quad \int \frac{6x^5-x}{x^3+216} dx \\
3.4.1.13 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(8x^2+2)dx}{x^3-5x^2-14x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(2x^2+2x+20)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}; & \text{в)} \quad \int \frac{7x^4}{x^3-343} dx
\end{array}$$

|          |    |                                         |    |                                                 |    |                                      |
|----------|----|-----------------------------------------|----|-------------------------------------------------|----|--------------------------------------|
| 3.4.1.14 | a) | $\int \frac{(3x+7)dx}{x^3-8x^2+12x};$   | б) | $\int \frac{(x^2-13x+40)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)};$ | В) | $\int \frac{x^4+7x}{x^3+343}dx.$     |
| 3.4.1.15 | a) | $\int \frac{(7x^2+2)dx}{x^3-10x^2+21x}$ | б) | $\int \frac{(5x+13)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)};$      | В) | $\int \frac{8x^5+x^4}{x^3-512}dx.$   |
| 3.4.1.16 | a) | $\int \frac{(2x+6)dx}{x^3+8x^2+12x};$   | б) | $\int \frac{(x^2+3x+2)dx}{x^3-1};$              | В) | $\int \frac{8x^5-x}{x^3+512}dx.$     |
| 3.4.1.17 | a) | $\int \frac{(2x^2-4)dx}{x^3+2x^2-8x};$  | б) | $\int \frac{(6-9x)dx}{x^3+8};$                  | В) | $\int \frac{9x^4}{x^3-729}dx.$       |
| 3.4.1.18 | a) | $\int \frac{(3x-5)dx}{x^3+2x^2-15x};$   | б) | $\int \frac{(4x^2+7x+5)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$    | В) | $\int \frac{x^4-9x}{x^3+729}dx.$     |
| 3.4.1.19 | a) | $\int \frac{(2x^2+6)dx}{x^3+6x^2-7x};$  | б) | $\int \frac{(x^2+3x-6)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)};$   | В) | $\int \frac{x^5+10x^3}{x^3-1000}dx.$ |
| 3.4.1.20 | a) | $\int \frac{(3x-2)dx}{x^3-x^2-6x};$     | б) | $\int \frac{(3-9x)dx}{x^3-1};$                  | В) | $\int \frac{x^5-10x^4}{x^3+1000}dx.$ |
| 3.4.1.21 | a) | $\int \frac{(3x^2-4)dx}{x^3+x^2-12x};$  | б) | $\int \frac{(4x^2+x+10)dx}{x^3+8};$             | В) | $\int \frac{11x^4}{x^3-1331}dx.$     |
| 3.4.1.22 | a) | $\int \frac{(5x-2)dx}{x^3+7x^2+10x};$   | б) | $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)};$           | В) | $\int \frac{11x^4+x^3}{x^3+1331}dx.$ |
| 3.4.1.23 | a) | $\int \frac{(2x^2-6)dx}{x^3+4x^2-12x};$ | б) | $\int \frac{(3x^2+2x+1)dx}{x^3-27};$            | В) | $\int \frac{x^5+12x^2}{x^3-1728}dx.$ |
| 3.4.1.24 | a) | $\int \frac{(4x+5)dx}{x^3-9x^2+20x};$   | б) | $\int \frac{(8x+5)dx}{(x+3)(x^2-8x+25)};$       | В) | $\int \frac{12x^5-2x}{x^3+1728}dx.$  |
| 3.4.1.25 | a) | $\int \frac{(2x^2-3)dx}{x^3+x^2-6x};$   | б) | $\int \frac{(2x^2+x+7)dx}{(x-3)(x^2+x+1)};$     | В) | $\int \frac{13x^4+x^2}{x^3-2197}dx.$ |
| 3.4.1.26 | a) | $\int \frac{(5x-4)dx}{x^3-x^2-20x};$    | б) | $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3+27};$                 | В) | $\int \frac{13x^4}{x^3+2197}dx.$     |
| 3.4.1.27 | a) | $\int \frac{(3x^2-7)dx}{x^3+4x^2-21x};$ | б) | $\int \frac{(4x^2+7)dx}{x^3+6x^2+25x};$         | В) | $\int \frac{14x^3+x^2}{x^3-2744}dx.$ |
| 3.4.1.28 | a) | $\int \frac{(8x+2)dx}{x^3-2x^2-8x};$    | б) | $\int \frac{(4x^2+3x)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)};$     | В) | $\int \frac{14x^5-x^4}{x^3+2744}dx.$ |
| 3.4.1.29 | a) | $\int \frac{(5x^2-3)dx}{x^3+2x^2-15x};$ | б) | $\int \frac{(5x+8)dx}{(x+1)(x^2-6x+34)};$       | В) | $\int \frac{x^4+15x^3}{x^3-3375}dx.$ |
| 3.4.1.30 | a) | $\int \frac{(4x-5)dx}{x^3+x^2-20x};$    | б) | $\int \frac{(4x+12)dx}{x^4+16x^2};$             | В) | $\int \frac{15x^5-x^4}{x^3+3375}dx.$ |

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

### 4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Найти неопределённый интеграл  $\int \sin^2 3x dx$ .

Решение.  $\int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C.$

4.2.2 Найти неопределённый интеграл  $\int \cos^3 5x dx$ .

Решение.  $\int \cos^3 5x dx = \int \cos^2 5x \cos 5x dx = \frac{1}{5} \int (1 - \sin^2 5x) d \sin 5x =$   
 $= [\sin 5x = t] = \frac{1}{5} \int (1 - t^2) dt = \frac{t}{5} - \frac{t^3}{15} + C = \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin^3 5x}{15} + C.$

4.2.3 Найти неопределённый интеграл  $\int \sin 12x \cos 8x dx$ .

Решение.  $\int \sin 4x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 2x + \sin 6x) dx = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$

4.2.4 Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{dx}{12 \cos x + 5 \sin x + 13}.$

Решение.  $\int \frac{dx}{12 \cos x + 5 \sin x + 13} = \left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] =$

$$= \int \frac{2dt}{\left(12 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 \frac{2t}{1+t^2} + 13\right) \cdot (1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 10t + 25} = 2 \int \frac{dt}{(t+5)^2} =$$

$$= -\frac{2}{t+5} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 5} + C.$$

**4.2.5** Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{dx}{1-10\sin^2 x}$ .

Решение. 
$$\int \frac{dx}{1-10\sin^2 x} = \left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(1 - \frac{10t^2}{1+t^2}\right) \cdot (1+t^2)} = \int \frac{dt}{1-9t^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1+3t}{1-3t} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1+3\operatorname{tg} x}{1-3\operatorname{tg} x} \right| + C.$$

**4.2.6** Найти неопределённый интеграл  $\int \sqrt{4-x^2} dx$ .

Решение. 
$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t \\ t = \arcsin \frac{x}{2} \end{array} \right] = \int \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = 4 \int \cos^2 t dt =$$

$$= 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \sin 2 \arcsin \frac{x}{2} + C =$$

$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} + 2 \cdot \sin \arcsin \frac{x}{2} \cdot \cos \arcsin \frac{x}{2} + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C.$$

### 4.3 Задания для решения на практическом занятии

**4.3.1** Найти неопределённые интегралы.

**4.3.1.1**  $\int \cos^2 7x dx$ .      **4.3.1.2**  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ .      **4.3.1.3**  $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$ .

**4.3.1.4**  $\int \cos^3 2x dx$ .      **4.3.1.5**  $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$ .      **4.3.1.6**  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ .

**4.3.2** Найти неопределённые интегралы:

**4.3.2.1**  $\int \cos 6x \cos 4x dx$ .      **4.3.2.2**  $\int \sin 6x \sin 2x dx$ .      **4.3.2.3**  $\int \cos 5x \sin x dx$ .

**4.3.2.4**  $\int \cos 8x \cos 7x dx$ .      **4.3.2.5**  $\int \sin 9x \sin 6x dx$ .      **4.3.2.6**  $\int \sin 7x \cos x dx$ .

### 4.3.3 Найти неопределённые интегралы.

$$4.3.3.1 \int \frac{dx}{4\cos x + 6\sin x} \quad 4.3.3.2 \int \frac{dx}{1 - \sin x} \quad 4.3.3.3 \int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}.$$

### 4.3.4 Найти неопределённые интегралы.

$$4.3.4.1 \int \frac{dx}{\cos^2 x - 4\sin^2 x} \quad 4.3.4.2 \int \frac{\sin 2x dx}{1 + 4\cos^2 x} \quad 4.3.4.3 \int \frac{dx}{1 - 5\sin^2 x}.$$

### 4.3.5 Найти неопределённые интегралы.

$$4.3.5.1 \int \frac{\sqrt{4 - x^2} dx}{x^2} \quad 4.3.5.2 \int \frac{\sqrt{x^2 - 1} dx}{x^2} \quad 4.3.5.3 \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}.$$

## 4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

### 4.4.1 Найти неопределённые интегралы.

$$\begin{array}{lll} 4.4.1.1 & \text{a) } \int \sin^2 3x \cos^3 3x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{5 - 4\cos x}; & \text{в) } \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 36}}. \\ 4.4.1.2 & \text{a) } \int \sin^3 5x \cos^3 5x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{2 - 2\sin x}; & \text{в) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(9 + x^2)^3}}. \\ 4.4.1.3 & \text{a) } \int \sin^3 7x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x}; & \text{в) } \int \frac{4x^4}{\sqrt{16 - x^2}} dx. \\ 4.4.1.4 & \text{a) } \int \cos^3 9x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{112\sin x - 15\cos x}; & \text{в) } \int \frac{\sqrt{x^2 - 25} dx}{x^3}. \\ 4.4.1.5 & \text{a) } \int \sin^3 2x \cos^2 2x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{24\cos x + 26}; & \text{в) } \int x^3 \sqrt{4 + x^2} dx. \\ 4.4.1.6 & \text{a) } \int \sin^4 8x \cos^3 8x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{3\cos x - 5}; & \text{в) } \int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx. \\ 4.4.1.7 & \text{a) } \int \sin^3 6x \cos^4 6x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{25\sin x + 7}; & \text{в) } \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 49}}. \\ 4.4.1.8 & \text{a) } \int \sin^4 2x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{41\sin x - 9}; & \text{в) } \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{64 + x^2}}. \\ 4.4.1.9 & \text{a) } \int \cos^4 5x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}; & \text{в) } \int \frac{3x^3}{\sqrt{25 - x^2}} dx. \\ 4.4.1.10 & \text{a) } \int \sin^5 12x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1}; & \text{в) } \int x^4 \sqrt{9 - x^2} dx. \\ 4.4.1.11 & \text{a) } \int \sin^2 4x \cos^3 4x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{4 - 5\cos x}; & \text{в) } \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 49}}. \\ 4.4.1.12 & \text{a) } \int \sin^3 6x \cos^3 6x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{3 - 5\sin x}; & \text{в) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}. \end{array}$$

|          |                                   |                                             |                                               |
|----------|-----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 4.4.1.13 | a) $\int \sin^3 8x dx;$           | б) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x};$     | В) $\int \frac{28x^4}{\sqrt{81 - x^2}} dx.$   |
| 4.4.1.14 | a) $\int \cos^3 11x dx;$          | б) $\int \frac{dx}{9\sin x - 6\cos x};$     | В) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 36} dx}{x^3}.$     |
| 4.4.1.15 | a) $\int \sin^3 3x \cos^2 3x dx;$ | б) $\int \frac{dx}{8\cos x + 10};$          | В) $\int x^3 \sqrt{1 + x^2} dx.$              |
| 4.4.1.16 | a) $\int \sin^4 9x \cos^3 9x dx;$ | б) $\int \frac{dx}{40\cos x - 24};$         | В) $\int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx.$              |
| 4.4.1.17 | a) $\int \sin^3 7x \cos^4 7x dx;$ | б) $\int \frac{dx}{13\sin x + 5};$          | В) $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 64}}.$     |
| 4.4.1.18 | a) $\int \sin^4 2x dx;$           | б) $\int \frac{dx}{5\sin x - 3};$           | В) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{49 + x^2}}.$     |
| 4.4.1.19 | a) $\int \cos^4 5x dx;$           | б) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2};$  | В) $\int \frac{12x^3}{\sqrt{36 - x^2}} dx.$   |
| 4.4.1.20 | a) $\int \cos^5 20x dx;$          | б) $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x - 3};$  | В) $\int x^4 \sqrt{4 - x^2} dx.$              |
| 4.4.1.21 | a) $\int \sin^2 5x \cos^3 5x dx;$ | б) $\int \frac{dx}{5 - 11\cos x};$          | В) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 25}}.$     |
| 4.4.1.22 | a) $\int \sin^3 7x \cos^3 7x dx;$ | б) $\int \frac{dx}{7 - 25\sin x};$          | В) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(36 + x^2)^3}}.$ |
| 4.4.1.23 | a) $\int \sin^3 9x dx;$           | б) $\int \frac{dx}{5\sin x + 12\cos x};$    | В) $\int \frac{4x^4}{\sqrt{64 - x^2}} dx.$    |
| 4.4.1.24 | a) $\int \cos^3 12x dx;$          | б) $\int \frac{dx}{12\sin x - 5\cos x};$    | В) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16} dx}{x^3}.$     |
| 4.4.1.25 | a) $\int \sin^3 4x \cos^2 4x dx;$ | б) $\int \frac{dx}{15\cos x + 17};$         | В) $\int x^3 \sqrt{9 + x^2} dx.$              |
| 4.4.1.26 | a) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx;$   | б) $\int \frac{dx}{20\cos x - 29};$         | В) $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$              |
| 4.4.1.27 | a) $\int \sin^3 8x \cos^4 8x dx;$ | б) $\int \frac{dx}{5\sin x + 3};$           | В) $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 81}}.$     |
| 4.4.1.28 | a) $\int \sin^4 3x dx;$           | б) $\int \frac{dx}{7\sin x - 13};$          | В) $\int \frac{6x^5 dx}{\sqrt{36 + x^2}}.$    |
| 4.4.1.29 | a) $\int \cos^4 6x dx;$           | б) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 4};$ | В) $\int \frac{14x^3}{\sqrt{49 - x^2}} dx.$   |
| 4.4.1.30 | a) $\int \cos^5 30x dx;$          | б) $\int \frac{dx}{5\sin x - \cos x - 5};$  | В) $\int x^4 \sqrt{5 - x^2} dx.$              |

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}.$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} &= \left[ \begin{array}{ll} 2x+1=t^6 & t=\sqrt[6]{2x+1} \\ x=\frac{1}{2}(t^6-1) & dx=3t^5 dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3 \int \frac{t^2-1+1}{t-1} dt = 3 \int \left( t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[6]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1| + C. \end{aligned}$$

5.2.2 Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$

$$\text{Решение. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}| + C.$$

5.2.3 Найти неопределённый интеграл  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int x^3(4-x^2)^{3/2} dx &= \left[ \begin{array}{lll} m=3 & n=2 & p=-\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n}=2 \in \mathbb{Z} & 4-x^2=t^2 & xdx=-tdt \end{array} \right] = \\ &= -\int (4-t^2)t^{-3}tdt = \int \frac{t^2-4}{t^2} dt = \int dt - 4 \int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{4}{t} = \sqrt{4-x^2} + \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} + C. \end{aligned}$$

5.2.4 Вычислить определённый интеграл  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sin^2 x dx.$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\sin^2 x dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (4-4\cos 2x) dx = (4x-2\sin 2x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ &= \left( 4 \cdot \frac{\pi}{2} - 2\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left( 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 2\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 2\pi - 0 - \pi + 2 = \pi + 2. \end{aligned}$$

5.2.5 Вычислить определённый интеграл  $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}.$

$$\text{Решение. } \int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}} = \left[ \begin{array}{ll} x=t^3 & x=8 \rightarrow t=2 \\ dx=3t^2 dt & x=27 \rightarrow t=3 \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{3t^2 dt}{t^2+t} =$$

$$= 3 \int_2^3 \frac{tdt}{t+1} = 3 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = (3t - 3 \ln |t+1|) \Big|_2^3 = (9 - 3 \ln 4) - (6 - 3 \ln 3) = 3 - \ln \frac{64}{27}.$$

**5.2.6** Вычислить определённый интеграл  $\int_0^1 x e^x dx$ .

Решение.  $\int_0^1 x e^x dx = \left[ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right] = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$   
 $= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$

### 5.3 Задания для решения на практическом занятии

#### 5.3.1 Найти неопределённые интегралы

5.3.1.1  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}.$     5.3.1.2  $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}-1)\sqrt{x}}.$     5.3.1.3  $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$

#### 5.3.2 Найти неопределённые интегралы.

5.3.2.1  $\int \sqrt{(7+6x-x^2)^3} dx.$     5.3.2.2  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$     5.3.2.3  $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}.$

#### 5.3.3 Найти неопределённые интегралы.

5.3.3.1  $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx.$     5.3.3.2  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(x+1)^2}}.$     5.3.3.3  $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}}.$

#### 5.3.4 Вычислить определённые интегралы.

5.3.4.1  $\int_1^2 (x^2 + 5x + 3) dx.$     5.3.4.2  $\int_0^\pi \cos^2 3x dx.$     5.3.4.3  $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx.$

#### 5.3.5 Вычислить определённые интегралы.

5.3.5.1  $\int_4^5 \frac{dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$     5.3.5.2  $\int_{-1}^0 \frac{(4x+3)dx}{x^2 - 9x + 8}.$     5.3.5.3  $\int_1^2 \frac{(6x+7)dx}{x^2 + 3x + 2}.$

#### 5.3.6 Вычислить определённые интегралы.

5.3.6.1  $\int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x-2}}.$     5.3.6.2  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}.$     5.3.6.3  $\int_0^2 \sqrt{9-x^2} dx.$

#### 5.3.7 Вычислить определённые интегралы.

5.3.7.1  $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx.$     5.3.7.2  $\int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx.$     5.3.7.3  $\int_1^e \ln^2 x dx.$   
 5.3.7.4  $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$     5.3.7.5  $\int_0^{\pi/3} x^2 \sin 3x dx.$     5.3.7.6  $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx.$

### 5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

**5.4.1** Заданы интегралы. Необходимо: а) найти определённый интеграл; б) вычислить определённый интеграл; в) вычислить определённый интеграл.

|          |                                             |                                                               |                                                     |
|----------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 5.4.1.1  | a) $\int \frac{x}{1+\sqrt{4x+1}} dx;$       | б) $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx;$   | в) $\int_0^{\pi/4} x \sin 4x dx.$                   |
| 5.4.1.2  | a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$       | б) $\int_{-\pi}^0 \sin^6 x \cos^2 x dx;$                      | в) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{16+9\cos^2 x}.$   |
| 5.4.1.3  | a) $\int \frac{5}{1+\sqrt[4]{9x+1}} dx;$    | б) $\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx;$  | в) $\int_{\pi}^{2\pi} x \cos 3x dx.$                |
| 5.4.1.4  | a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{3x+1}};$      | б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^8 x dx;$                          | в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+7\sin^2 x}.$      |
| 5.4.1.5  | a) $\int \frac{2x+1}{2+\sqrt{7x+2}} dx;$    | б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^8 x dx;$                          | в) $\int_1^e x^2 \ln x dx.$                         |
| 5.4.1.6  | a) $\int \frac{dx}{4+\sqrt[3]{6x+7}};$      | б) $\int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx;$  | в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+7\cos^2 x}.$      |
| 5.4.1.7  | a) $\int \frac{3x-1}{3+\sqrt[4]{4x+3}} dx;$ | б) $\int_0^{9\pi} \sin^2 \frac{x}{3} \cos^6 \frac{x}{3} dx;$  | в) $\int_0^{1/2} \arcsin x dx.$                     |
| 5.4.1.8  | a) $\int \frac{3dx}{5+\sqrt[3]{9x+2}};$     | б) $\int_0^{6\pi} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx;$  | в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}.$                |
| 5.4.1.9  | a) $\int \frac{4x+5}{4+\sqrt{3x+4}} dx;$    | б) $\int_0^{2\pi} \sin^8 2x dx;$                              | в) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arccos x dx.$              |
| 5.4.1.10 | a) $\int \frac{x dx}{4+\sqrt[3]{3x+4}};$    | б) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx;$                      | в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$             |
| 5.4.1.11 | a) $\int \frac{7x}{5+\sqrt[4]{8x+5}} dx;$   | б) $\int_0^{3\pi} \sin^6 \frac{x}{6} dx;$                     | в) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx.$ |
| 5.4.1.12 | a) $\int \frac{x dx}{9+\sqrt[3]{3x-1}};$    | б) $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} dx;$                      | в) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+8}.$                     |
| 5.4.1.13 | a) $\int \frac{3x-2}{6+\sqrt{7x+6}} dx;$    | б) $\int_0^{5\pi} \sin^2 \frac{x}{5} \cos^2 \frac{x}{5} dx;$  | в) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx.$   |
| 5.4.1.14 | a) $\int \frac{x dx}{6-\sqrt[3]{6x-9}};$    | б) $\int_0^{\pi/6} \sin^4 3x \cos^4 3x dx;$                   | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-4\sin^2 x}.$         |
| 5.4.1.15 | a) $\int \frac{2x+5}{7+\sqrt[4]{5x+2}} dx;$ | б) $\int_0^{\pi/4} \cos^8 x dx;$                              | в) $\int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx.$                     |
| 5.4.1.16 | a) $\int \frac{2x dx}{5-3\sqrt[3]{x+1}};$   | б) $\int_0^{14\pi} \sin^2 \frac{x}{7} \cos^4 \frac{x}{7} dx;$ | в) $\int_0^3 x^3 \sqrt{9-x^2} dx.$                  |

|          |                                             |                                                                       |                                                      |
|----------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 5.4.1.17 | a) $\int \frac{2x-4}{6-\sqrt{9x+2}} dx;$    | б) $\int_0^{10\pi} \sin^4 \frac{x}{5} \cos^4 \frac{x}{5} dx;$         | в) $\int_0^{\pi/5} x \sin 5x dx.$                    |
| 5.4.1.18 | a) $\int \frac{3x dx}{4-3\sqrt[3]{x+2}};$   | б) $\int_0^{4\pi} \sin^6 \frac{x}{4} dx;$                             | в) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{49+x^2}}.$ |
| 5.4.1.19 | a) $\int \frac{3x-3}{5+\sqrt[4]{7x+1}} dx;$ | б) $\int_0^{8\pi} \cos^6 \frac{x}{4} dx;$                             | в) $\int_{\pi/8}^{\pi/4} x \cos 4x dx.$              |
| 5.4.1.20 | a) $\int \frac{dx}{6+2\sqrt[3]{6x+5}};$     | б) $\int_0^{10\pi} \sin^2 \frac{x}{5} \cos^4 \frac{x}{5} dx;$         | в) $\int x^4 \sqrt{4-x^2} dx.$                       |
| 5.4.1.21 | a) $\int \frac{7x+6}{6+\sqrt{2x+7}} dx;$    | б) $\int_{-14\pi}^{-12\pi} \sin^2 \frac{x}{7} \cos^4 \frac{x}{7} dx;$ | в) $\int_1^e x^3 \ln x dx.$                          |
| 5.4.1.22 | a) $\int \frac{4x dx}{10+\sqrt[3]{x+1}};$   | б) $\int_{\pi}^{4\pi} \sin^6 \frac{x}{8} dx;$                         | в) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}.$       |
| 5.4.1.23 | a) $\int \frac{x-1}{9+\sqrt[4]{6x+5}} dx;$  | б) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos^6 \frac{x}{8} dx;$                        | в) $\int_0^{1/4} \arcsin 2x dx.$                     |
| 5.4.1.24 | a) $\int \frac{5x dx}{3-\sqrt[3]{x+1}};$    | б) $\int_{-\pi/2}^{3\pi} \sin \frac{x}{2} \cos^{15} \frac{x}{2} dx;$  | в) $\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$                 |
| 5.4.1.25 | a) $\int \frac{3x}{8+\sqrt{2x+3}} dx;$      | б) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx;$  | в) $\int_0^1 \arccos 2x dx.$                         |
| 5.4.1.26 | a) $\int \frac{2x dx}{2+7\sqrt[3]{x+2}};$   | б) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 2x \cos^2 2x dx;$                           | в) $\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$                   |
| 5.4.1.27 | a) $\int \frac{4x-2}{2-\sqrt[4]{3x+4}} dx;$ | б) $\int_0^{\pi/12} \cos^8 3x dx;$                                    | в) $\int_{-1}^0 \operatorname{arctg} 4x dx.$         |
| 5.4.1.28 | a) $\int \frac{dx}{3+\sqrt[3]{9x+1}};$      | б) $\int_0^{\pi/16} \sin^8 4x dx;$                                    | в) $\int_8^{27} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}.$           |
| 5.4.1.29 | a) $\int \frac{2x-1}{3-5\sqrt{4x+1}} dx;$   | б) $\int_{9\pi}^{18\pi} \sin^2 \frac{x}{9} \cos^2 \frac{x}{9} dx;$    | в) $\int_0^{\ln 3} x^4 e^{2x} dx.$                   |
| 5.4.1.30 | a) $\int \frac{x dx}{4+\sqrt[3]{6x+8}};$    | б) $\int_{-36\pi}^{36\pi} \sin^4 \frac{x}{6} \cos^6 \frac{x}{6} dx;$  | в) $\int_0^3 \frac{dx}{x^3-27}.$                     |