

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Интегрирование – это задача, обратная дифференцированию. То есть по заданной производной или дифференциалу некоторой функции необходимо восстановить саму функцию. С механической точки зрения это означает, что по заданной скорости движения материальной точки необходимо восстановить закон движения этой точки.

Определение 1.1.1 Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке I , если для всех точек этого интервала выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1.1.1 Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале I , то они отличаются друг от друга лишь на постоянную величину C , то есть $F_2(x) - F_1(x) = C$, где $C = \text{Const}$.

Определение 1.1.2 Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$.

Определение 1.1.3 Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на промежутке I называется множество всех первообразных этой функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1.1.1)$$

В формуле (1.1.1) функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, а C – *константой*. Процесс нахождения неопределённого интеграла называется *интегрированием*.

Теорема 1.1.2 Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале I , то она интегрируема на этом интервале.

С геометрической точки зрения неопределённый интеграл представляет собой множество однопараметрических кривых $y = F(x) + C$, обладающих следующим свойством: все касательные к кривым в точках с одной и той же абсциссой параллельны между собой. Кривые множества $\{F(x) + C\}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси ординат.

Основные свойства неопределённого интеграла

$$1) \left(\int f(x) dx \right)'_x = f(x);$$

$$2) d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$3) \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$$

$$5) \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx;$$

6) если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

Таблица основных неопределённых интегралов

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$10) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$11) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \end{cases}$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C, \end{cases} \quad |x| < |a|$$

$a \neq 0;$

;

$$13) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C;$$

$$15) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \quad |x| > |a|;$$

$$16) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$17) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$18) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$19) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Если производные элементарных функций всегда выражаются элементарными функциями, то интегралы от элементарных функций не всегда можно представить в виде элементарных функций. Такие интегралы называются «не берущимися». Приведём примеры «не берущихся»

интегралов: $\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ – интегральный косинус, $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$ – эллиптический интеграл первого рода, $\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx$ – эллиптический интеграл второго рода.

Одним из методов интегрирования неопределённого интеграла является *метод непосредственного интегрирования*. Данный метод основан на применении таблицы основных неопределённых интегралов и свойств неопределённого интеграла.

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Кроме метода непосредственного интегрирования рассматриваются ещё два метода интегрирования: метод подстановки и метод интегрирования по частям.

Метод подстановкой (заменой переменной).

Пусть требуется вычислить неопределённый интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Метод подстановкой состоит в том, что в заданном интеграле $\int f(x)dx$ переменную интегрирования x заменяем новой переменной интегрирования z по формуле $x = \varphi(z)$. Тогда подынтегральное выражение будет иметь вид: $f(x)dx = f(\varphi(z))d\varphi(z) = f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$.

Теорема 2.1.1 Пусть функция $x = \varphi(z)$ определена и дифференцируема на некотором множестве K и пусть M – множество значений этой функции, на котором определена функции $f(x)$. Тогда если на множестве M функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве K справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz. \quad (2.1.1)$$

Предположим, что интеграл, стоящий в правой части формулы (2.1.1), известен:

$$\int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \Phi(z) + C.$$

Отсюда можно найти исходный интеграл в виде функции от переменной x . Для этого необходимо разрешить уравнение $x = \varphi(z)$ относительно переменной z . Если $z = \psi(x)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \Phi(z) + C = \Phi(\psi(x)) + C.$$

Часто при нахождении неопределённых интегралов пользуются методом «подведения» под знак дифференциала. По определению дифференциала функции $\eta'(x)dx = d(\eta(x))$. Переход от левой части последнего равенства к правой части называется подведением множителя $\eta'(x)$ под знак дифференциала.

Предположим, что необходимо найти интеграл вида

$$\int g(\eta(x))\eta'(x)dx.$$

Внесём в этом интеграле множитель $\eta'(x)$ под знак дифференциала и выполним замену переменной $\eta'(x) = t$:

$$\int g(\eta(x))\eta'(x)dx = \int g(\eta(x))d(\eta(x)) = \int g(t)dt.$$

Если интеграл $\int g(t)dt$ является табличным, то его находят непосредственным интегрированием.

Метод интегрирования по частям.

Теорема 2.1.2 Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции на промежутке I , то справедлива следующая формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2.1.2)$$

Формула (2.1.2) называется «*формулой интегрирования по частям*».

Формула интегрирования по частям в основном применяется, когда под знаком интеграла стоит произведение многочлена на трансцендентную функцию (всякая аналитическая функция, отличная от алгебраической функции, для вычисления значений которой помимо алгебраических операций над аргументом, необходимо применять предельный переход в той или иной форме) или произведение трансцендентных функций. В частности, к трансцендентным функциям относятся показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические и обратные гиперболические функции.

В формуле интегрирования по частям через функцию $u = u(x)$ обозначают ту функцию, производная которой даёт наибольшее упрощение. Через дифференциал dv обозначаем всё то, что осталось в подынтегральном выражении. Если выполняется условие теоремы 2.1.2, то формулу интегрирования по частям можно применять неоднократно.

Приведём некоторые часто встречающиеся типы интегралов, которые находятся по формуле интегрирования по частям.

1. Интегралы типа $\int P_n(x)\sin \beta x dx$, $\int P_n(x)\cos \beta x dx$, $\int P_n(x)a^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x)\operatorname{sh} \alpha x dx$, $\int P_n(x)\operatorname{ch} \alpha x dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x , а α и β – некоторые числа. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u = P_n(x)$, а через дифференциал dv обозначить всё то, что остаётся в подынтегральном выражении, и применить формулу интегрирования по частям n раз.

2. Интегралы типа $\int P_n(x)\log_a \beta x dx$, $\int P_n(x)\ln \beta x dx$, $\int P_n(x)\arcsin \beta x dx$, $\int P_n(x)\arccos \beta x dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg} \beta x dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} \beta x dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x , а β – некоторое число. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить функцию u равной множителю при многочлене $P_n(x)$, а через дифференциал dv обозначить $P_n(x)dx$.

3. Интегралы типа $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, где α и β – некоторые числа. Чтобы найти эти интегралы, необходимо дважды применить формулу интегрирования по частям.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Рациональной дробью $R(x)$ называется дробь, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены, то есть любая дробь вида

$$R(x) = \frac{A_n(x)}{B_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

Если степень многочлена числителя больше или равна степени многочлена знаменателя ($n \geq m$), то дробь называется *неправильной рациональной дробью*. Если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя ($n < m$), то дробь называется *правильной рациональной дробью*.

Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, для чего необходимо разделить многочлен в числителе на многочлен в знаменателе по правилу деления многочленов:

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = P(x) + \frac{C_k(x)}{B_m(x)},$$

где $P(x)$ – целая часть дроби $\frac{A_n(x)}{B_m(x)}$; $C_k(x)$ – остаток от деления (многочлен степени $k < m$).

Например,

$$\frac{x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 10x + 1}{x^2 + 2x - 3} = x^2 + 4x + \frac{2x + 1}{x^2 + 2x - 3},$$

так как

$$\begin{array}{r} x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 10x + 1 \quad | \quad x^2 + 2x - 3 \\ - \quad x^4 + 2x^3 - 3x^2 \\ \hline 4x^3 + 8x^2 - 10x \\ - \quad 4x^3 + 8x^2 - 12x \\ \hline 2x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{целая часть} \\ \leftarrow \text{остаток} \end{array}$$

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена, то есть к использованию табличных интегралов, и интегрированию правильной рациональной дроби. Интегрирование правильных рациональных дробей осуществляется путём перехода к интегрированию простейших рациональных дробей.

Простейшей рациональной дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырёх типов:

$$\begin{array}{ll}
1) \quad \frac{A}{x-a}; & 2) \quad \frac{A}{(x-a)^n} (n \geq 2); \\
3) \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; & 4) \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} (n \geq 2).
\end{array}$$

В простейших рациональных дробях параметры A, M, N, a, p, q – действительные числа, а квадратный трёхчлен не имеет действительных корней, то есть дискриминант $D = p^2 - 4q < 0$.

Простейшие дроби первого и второго типов интегрируются непосредственно с помощью основных методов интегрирования неопределённого интеграла и таблицы основных неопределённых интегралов:

$$\begin{aligned}
\int \frac{A dx}{x-a} &= A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C; \\
\int \frac{A dx}{(x-a)^n} &= A \int (x-a)^{-n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n) \cdot (x-a)^{n-1}} + C.
\end{aligned}$$

Найдём интеграл от простейшей рациональной дроби третьего типа.

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \left[\begin{array}{l} \text{в числителе выделяем} \\ \text{производную знаменателя} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}}{x^2+px+q} dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{представляем интеграл в} \\ \text{виде суммы двух интегралов} \end{array} \right] = \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p) dx}{x^2+px+q} + \frac{2N-Mp}{2} \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{в первом интеграле подводим выражение } (2x+p) \text{ под знак дифференциала,} \\ \text{а во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат} \end{array} \right] = \\
&= \frac{M}{2} \int \frac{(x^2+px+q)' dx}{x^2+px+q} + \frac{2N-Mp}{2} \int \frac{dx}{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}} = \\
&= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \frac{2N-Mp}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2} = \\
&= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C
\end{aligned}$$

Рассмотрим интегрирование простейшей рациональной дроби четвёртого типа $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$. Интегрирование дроби этого типа после выделения в числителе производной квадратного трёхчлена, стоящего в

знаменателе, и выделения полного квадрата в этом трёхчлене, сводится к вычислению интегралов

$$\int (x^2 + px + q)^{-n} d(x^2 + px + q) = \frac{1}{(1-n)(x^2 + px + q)^{n-1}} + C_1$$

и

$$I_n = \int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^n}.$$

В последнем интеграле $z = x + \frac{p}{2}$, $b = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Представим последний интеграл в виде

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^n} = \frac{1}{b^2} \int \frac{(z^2 + b^2) - z^2}{(z^2 + b^2)^n} dz = \frac{1}{b^2} \left(\int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(z^2 + b^2)^n} \right) = \\ &= \left[\int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^{n-1}} = I_{n-1} \right] = \frac{1}{b^2} \left(I_{n-1} - \int \frac{z^2 dz}{(z^2 + b^2)^n} \right). \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{z^2 dz}{(z^2 + b^2)^n}$ воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 dz}{(z^2 + b^2)^n} &= \left[dv = \frac{z dz}{(z^2 + b^2)^n} \quad v = \frac{1}{2(1-n)(z^2 + b^2)^{n-1}} \right] = \frac{z}{2(1-n)(z^2 + b^2)^{n-1}} - \\ &- \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^{n-1}} = \frac{z}{2(1-n)(z^2 + b^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в формулу интеграла I_n , имеем

$$I_n = \frac{1}{b^2} \left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{z}{2(1-n)(z^2 + b^2)^{n-1}} \right). \quad (3.1.1)$$

Формула (3.1.1) называется рекуррентной. Зная табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dz}{z^2 + b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{z}{b} + C, \text{ по формуле (3.1.1) можно найти интеграл}$$

$$I_2 = \int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^2} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получены формулы для интегрирования всех четырёх типов простейших рациональных дробей.

Рассмотрим произвольную правильную рациональную дробь. Любую правильную рациональную дробь $C_k(x)/B_m(x)$ можно представить в виде

суммы конечного числа простейших рациональных дробей первого – четвёртого типа. Для разложения $C_k(x)/B_m(x)$ на простейшие дроби необходимо разложить многочлен $B_m(x)$ на линейные и квадратные множители, для чего надо решить уравнение $B_m(x)=0$. Предположим, что многочлен $B_m(x)$ разложим на простейшие линейные и квадратные множители:

$$B_m(x) = (x - \alpha_1)^{s_1} \dots (x - \alpha_i)^{s_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{r_j},$$

где $s_1 + \dots + s_i + 2r_1 + \dots + 2r_j = m$.

Теорема 3.1.1 Правильную рациональную дробь $C_k(x)/B_m(x)$, где $B_m(x) = (x - \alpha_1)^{s_1} \dots (x - \alpha_i)^{s_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{r_j}$, можно единственным образом разложить на сумму простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{C_k(x)}{B_m(x)} = & \frac{A_{11}}{x - \alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1s_1}}{(x - \alpha_1)^{s_1}} + \dots + \frac{A_{i1}}{x - \alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_{is_i}}{(x - \alpha_i)^{s_i}} + \\ & + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_{12}x + N_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1r_1}x + N_{1r_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}} + \dots \\ & \dots + \frac{M_{j1}x + N_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{M_{j2}x + N_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{M_{jr_j}x + N_{jr_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{r_j}}, \end{aligned}$$

где коэффициенты в разложении являются некоторыми действительными числами.

Проиллюстрируем формулу теоремы 3.1.1 примерами, не находя коэффициентов в разложении.

Например:

$$1) \frac{2x+5}{(x-2)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2};$$

$$2) \frac{3x^2-4x+1}{(x-3)^3(x^2-x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3} + \frac{Mx+N}{x^2-x+4};$$

$$3) \frac{x-4}{x^4(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Mx+N}{x^2+4} + \frac{Kx+L}{(x^2+4)^2}.$$

Чтобы найти коэффициенты в разложении правильной рациональной дроби на простейшие рациональные дроби, чаще всего используют метод неопределённых коэффициентов и метод частных значений.

Метод неопределённых коэффициентов

Пусть дано разложение правильной рациональной дроби $C_k(x)/B_m(x)$ на простейшие дроби с неопределёнными коэффициентами. Приводим простейшие дроби в разложении к общему знаменателю $B_m(x)$ и приравниваем многочлен, получившийся в числителе, многочлену $C_k(x)$.

Для тождественного равенства двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая равенство многочленов, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного равенства. В результате получаем систему m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными. Решая полученную систему, находим неизвестные коэффициенты в разложении дроби на простейшие рациональные дроби.

Метод частных значений

При использовании данного метода для нахождения неопределённых коэффициентов придаём переменной x несколько частных значений (по числу неопределённых коэффициентов) и получаем систему алгебраических уравнений относительно неопределённых коэффициентов. Наиболее выгодно применять этот метод в случае простых действительных корней уравнения $B_m(x)=0$. Тогда удобно последовательно полагать x равным одним из корней многочлена, стоящего в знаменателе.

Иногда для нахождения неопределённых коэффициентов удобно применять комбинацию указанных выше методов, то есть приравнивать коэффициенты при некоторых степенях переменной и придавать переменной частные значения.

Сформулируем **правило интегрирования рациональных дробей**.

Для того чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить следующие действия:

- 1) если рассматриваемая дробь является неправильной, то её необходимо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;
- 2) если рассматриваемая рациональная дробь является правильной, то её необходимо представить в виде суммы простейших рациональных дробей;
- 3) интеграл от рациональной дроби необходимо представить в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Интегралы типа $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$, где $m, n \in \mathbb{Z}, m \geq 0, n \geq 0$.

Если числа m и n – чётные, то применяются формулы понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Если хотя бы одно из чисел m или n – нечётное, то, отделяя от нечётной степени один сомножитель, подносим его под знак дифференциала. В подынтегральной функции переходим к функции, которую получили под знаком дифференциала, используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Интегралы типа $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$.

Данные интегралы вычисляются путём разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x),$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x),$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x).$$

Интегралы типа $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x \, dx$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$).

Они вычисляются подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ и $\operatorname{ctg} x = t$ соответственно.

Если $\operatorname{tg} x = t$, то $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда $\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \int \frac{t^n dt}{1+t^2}$. Данный интеграл при $n \geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, который находится по правилу интегрирования рациональных дробей.

Интегралы типа $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. При этом используются формулы

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если имеет место тождество $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять *упрощённую подстановку* $\operatorname{tg} x = t$. При этом используются формулы

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим интегралы от иррациональных функций, для интегрирования которых применяются тригонометрические подстановки.

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, где R – рациональная функция аргументов $(|x| \leq |a|)$, находятся с помощью подстановки $x = a \sin t$ или $x = a \cos t$.

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, где R – рациональная функция двух аргументов $(|x| \geq |a|)$, находятся с помощью подстановки $x = \frac{a}{\sin t}$ или $x = \frac{a}{\cos t}$.

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, находятся с помощью подстановки $x = a \operatorname{tg} t$ или $x = a \operatorname{ctg} t$.

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots) dx$, где $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots$ – целые числа, а $R(x, y, z, \dots)$ – рациональная функция своих аргументов. В этих интегралах подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования и радикалов от x . Они находятся с помощью подстановки $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$. При такой

замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1} = k_1, \frac{m_2}{n_2} = k_2, \dots$ являются целыми числами, то есть интеграл сводится к интегрированию рациональной функции от переменной t :

$$\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots) dx = \int R(t^s, t^{k_1}, t^{k_2}, \dots) s t^{s-1} dt.$$

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right) dx$, где

$n_1, m_1, n_2, m_2, \dots$ – целые числа, а $R(x, y, z, \dots)$ – рациональная функция своих аргументов. Они находятся с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s –

общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$. При такой замене переменной интеграл сводится к интегрированию рациональной функции от переменной t .

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, могут быть найдены с помощью подстановки $u = x + \frac{b}{2a}$. Они сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.

Интегралы этого типа могут быть также найдены с помощью одной из трёх подстановок Эйлера:

- 1) если $a > 0$, то применяется подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$;
- 2) если $a < 0, c > 0$, то используется подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$;
- 3) если $a < 0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, то используется подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$, где x_0 – один из корней квадратного трёхчлена.

Интегралы типа $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, где $m, n, p \in \mathbb{Q}, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Данные интегралы называются *интегралами от дифференциального бинома* $x^m (a + bx^n)^p dx$. Эти интегралы приводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановок Чебышева П. Л. только в следующих трёх случаях:

- 1) если $p \in \mathbb{Z}$, то применяется подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n ;
- 2) если $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то применяется подстановка $a + bx^n = z^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$;
- 3) если $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то применяется подстановка $a + bx^n = z^s x^n$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях интегралы от дифференциального бинома нельзя выразить через элементарные функции.