

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}.$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} &= \left[\begin{array}{ll} 2x+1=t^6 & t=\sqrt[6]{2x+1} \\ x=\frac{1}{2}(t^6-1) & dx=3t^5 dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3 \int \frac{t^2-1+1}{t-1} dt = 3 \int \left(t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[6]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1| + C. \end{aligned}$$

5.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$

$$\text{Решение. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}| + C.$$

5.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int x^3(4-x^2)^{3/2} dx &= \left[\begin{array}{lll} m=3 & n=2 & p=-\frac{3}{2} \notin Z \\ \frac{m+1}{n}=2 \in Z & 4-x^2=t^2 & xdx=-tdt \end{array} \right] = \\ &= -\int (4-t^2)t^{-3}tdt = \int \frac{t^2-4}{t^2} dt = \int dt - 4 \int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{4}{t} = \sqrt{4-x^2} + \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} + C. \end{aligned}$$

5.2.4 Вычислить определённый интеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sin^2 x dx.$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\sin^2 x dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (4-4\cos 2x) dx = (4x-2\sin 2x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ &= \left(4 \cdot \frac{\pi}{2} - 2\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left(4 \cdot \frac{\pi}{4} - 2\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 2\pi - 0 - \pi + 2 = \pi + 2. \end{aligned}$$

5.2.5 Вычислить определённый интеграл $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}.$

$$\text{Решение. } \int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}} = \left[\begin{array}{ll} x=t^3 & x=8 \rightarrow t=2 \\ dx=3t^2 dt & x=27 \rightarrow t=3 \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{3t^2 dt}{t^2+t} =$$

$$= 3 \int_2^3 \frac{tdt}{t+1} = 3 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = (3t - 3 \ln |t+1|) \Big|_2^3 = (9 - 3 \ln 4) - (6 - 3 \ln 3) = 3 - \ln \frac{64}{27}.$$

5.2.6 Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 x e^x dx$.

Решение. $\int_0^1 x e^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right] = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$
 $= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Найти неопределённые интегралы

5.3.1.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}$. 5.3.1.2 $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}-1)\sqrt{x}}$. 5.3.1.3 $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

5.3.2 Найти неопределённые интегралы.

5.3.2.1 $\int \sqrt{(7+6x-x^2)^3} dx$. 5.3.2.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. 5.3.2.3 $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

5.3.3 Найти неопределённые интегралы.

5.3.3.1 $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$. 5.3.3.2 $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(x+1)^2}}$. 5.3.3.3 $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}}$.

5.3.4 Вычислить определённые интегралы.

5.3.4.1 $\int_1^2 (x^2 + 5x + 3) dx$. 5.3.4.2 $\int_0^\pi \cos^2 3x dx$. 5.3.4.3 $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$.

5.3.5 Вычислить определённые интегралы.

5.3.5.1 $\int_4^5 \frac{dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$. 5.3.5.2 $\int_{-1}^0 \frac{(4x+3)dx}{x^2 - 9x + 8}$. 5.3.5.3 $\int_1^2 \frac{(6x+7)dx}{x^2 + 3x + 2}$.

5.3.6 Вычислить определённые интегралы.

5.3.6.1 $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$. 5.3.6.2 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$. 5.3.6.3 $\int_0^2 \sqrt{9-x^2} dx$.

5.3.7 Вычислить определённые интегралы.

5.3.7.1 $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$. 5.3.7.2 $\int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx$. 5.3.7.3 $\int_1^e \ln^2 x dx$.
 5.3.7.4 $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$. 5.3.7.5 $\int_0^{\pi/3} x^2 \sin 3x dx$. 5.3.7.6 $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Заданы интегралы. Необходимо: а) найти определённый интеграл; б) вычислить определённый интеграл; в) вычислить определённый интеграл.

5.4.1.1	a) $\int \frac{x}{1+\sqrt{4x+1}} dx;$	б) $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx;$	в) $\int_0^{\pi/4} x \sin 4x dx.$
5.4.1.2	a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$	б) $\int_{-\pi}^0 \sin^6 x \cos^2 x dx;$	в) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{16+9\cos^2 x}.$
5.4.1.3	a) $\int \frac{5}{1+\sqrt[4]{9x+1}} dx;$	б) $\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx;$	в) $\int_{\pi}^{2\pi} x \cos 3x dx.$
5.4.1.4	a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{3x+1}};$	б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^8 x dx;$	в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+7\sin^2 x}.$
5.4.1.5	a) $\int \frac{2x+1}{2+\sqrt{7x+2}} dx;$	б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^8 x dx;$	в) $\int_1^e x^2 \ln x dx.$
5.4.1.6	a) $\int \frac{dx}{4+\sqrt[3]{6x+7}};$	б) $\int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx;$	в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+7\cos^2 x}.$
5.4.1.7	a) $\int \frac{3x-1}{3+\sqrt[4]{4x+3}} dx;$	б) $\int_0^{9\pi} \sin^2 \frac{x}{3} \cos^6 \frac{x}{3} dx;$	в) $\int_0^{1/2} \arcsin x dx.$
5.4.1.8	a) $\int \frac{3dx}{5+\sqrt[3]{9x+2}};$	б) $\int_0^{6\pi} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx;$	в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}.$
5.4.1.9	a) $\int \frac{4x+5}{4+\sqrt{3x+4}} dx;$	б) $\int_0^{2\pi} \sin^8 2x dx;$	в) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arccos x dx.$
5.4.1.10	a) $\int \frac{x dx}{4+\sqrt[3]{3x+4}};$	б) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx;$	в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$
5.4.1.11	a) $\int \frac{7x}{5+\sqrt[4]{8x+5}} dx;$	б) $\int_0^{3\pi} \sin^6 \frac{x}{6} dx;$	в) $\int_0^{1/\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx.$
5.4.1.12	a) $\int \frac{x dx}{9+\sqrt[3]{3x-1}};$	б) $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} dx;$	в) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+8}.$
5.4.1.13	a) $\int \frac{3x-2}{6+\sqrt{7x+6}} dx;$	б) $\int_0^{5\pi} \sin^2 \frac{x}{5} \cos^2 \frac{x}{5} dx;$	в) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx.$
5.4.1.14	a) $\int \frac{x dx}{6-\sqrt[3]{6x-9}};$	б) $\int_0^{\pi/6} \sin^4 3x \cos^4 3x dx;$	в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-4\sin^2 x}.$
5.4.1.15	a) $\int \frac{2x+5}{7+\sqrt[4]{5x+2}} dx;$	б) $\int_0^{\pi/4} \cos^8 x dx;$	в) $\int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx.$
5.4.1.16	a) $\int \frac{2x dx}{5-3\sqrt[3]{x+1}};$	б) $\int_0^{14\pi} \sin^2 \frac{x}{7} \cos^4 \frac{x}{7} dx;$	в) $\int_0^3 x^3 \sqrt{9-x^2} dx.$

5.4.1.17	a) $\int \frac{2x-4}{6-\sqrt{9x+2}} dx;$	б) $\int_0^{10\pi} \sin^4 \frac{x}{5} \cos^4 \frac{x}{5} dx;$	в) $\int_0^{\pi/5} x \sin 5x dx.$
5.4.1.18	a) $\int \frac{3x dx}{4-3\sqrt[3]{x+2}};$	б) $\int_0^{4\pi} \sin^6 \frac{x}{4} dx;$	в) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{49+x^2}}.$
5.4.1.19	a) $\int \frac{3x-3}{5+\sqrt[4]{7x+1}} dx;$	б) $\int_0^{8\pi} \cos^6 \frac{x}{4} dx;$	в) $\int_{\pi/8}^{\pi/4} x \cos 4x dx.$
5.4.1.20	a) $\int \frac{dx}{6+2\sqrt[3]{6x+5}};$	б) $\int_0^{10\pi} \sin^2 \frac{x}{5} \cos^4 \frac{x}{5} dx;$	в) $\int x^4 \sqrt{4-x^2} dx.$
5.4.1.21	a) $\int \frac{7x+6}{6+\sqrt{2x+7}} dx;$	б) $\int_{-14\pi}^{-12\pi} \sin^2 \frac{x}{7} \cos^4 \frac{x}{7} dx;$	в) $\int_1^e x^3 \ln x dx.$
5.4.1.22	a) $\int \frac{4x dx}{10+\sqrt[3]{x+1}};$	б) $\int_{\pi}^{4\pi} \sin^6 \frac{x}{8} dx;$	в) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}.$
5.4.1.23	a) $\int \frac{x-1}{9+\sqrt[4]{6x+5}} dx;$	б) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos^6 \frac{x}{8} dx;$	в) $\int_0^{1/4} \arcsin 2x dx.$
5.4.1.24	a) $\int \frac{5x dx}{3-\sqrt[3]{x+1}};$	б) $\int_{-\pi/2}^{3\pi} \sin \frac{x}{2} \cos^{15} \frac{x}{2} dx;$	в) $\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$
5.4.1.25	a) $\int \frac{3x}{8+\sqrt{2x+3}} dx;$	б) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx;$	в) $\int_0^1 \arccos 2x dx.$
5.4.1.26	a) $\int \frac{2x dx}{2+7\sqrt[3]{x+2}};$	б) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 2x \cos^2 2x dx;$	в) $\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$
5.4.1.27	a) $\int \frac{4x-2}{2-\sqrt[4]{3x+4}} dx;$	б) $\int_0^{\pi/12} \cos^8 3x dx;$	в) $\int_{-1}^0 \operatorname{arctg} 4x dx.$
5.4.1.28	a) $\int \frac{dx}{3+\sqrt[3]{9x+1}};$	б) $\int_0^{\pi/16} \sin^8 4x dx;$	в) $\int_8^{27} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}.$
5.4.1.29	a) $\int \frac{2x-1}{3-5\sqrt{4x+1}} dx;$	б) $\int_{9\pi}^{18\pi} \sin^2 \frac{x}{9} \cos^2 \frac{x}{9} dx;$	в) $\int_0^{\ln 3} x^4 e^{2x} dx.$
5.4.1.30	a) $\int \frac{x dx}{4+\sqrt[3]{6x+8}};$	б) $\int_{-36\pi}^{36\pi} \sin^4 \frac{x}{6} \cos^6 \frac{x}{6} dx;$	в) $\int_0^3 \frac{dx}{x^3-27}.$

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$.

Решение. $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - 0)$. Данный

предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

6.2.2 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \Big|_a^1 = -\lim_{a \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = -1$. Следовательно,

несобственный интеграл сходится.

6.2.3 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$.

Решение. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = 2 \operatorname{arctg} b - 0 = \pi$.

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

6.2.4 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Решение. $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln |x| \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln |\varepsilon|) = +\infty$. Следовательно,

несобственный интеграл расходится.

6.2.5 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin \frac{2-\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

6.2.6 Сменная производительность труда рабочего описывается функцией $p(t) = 2,5t - 0,3125t^2$, где t – время, причём $0 \leq t \leq 7$. Определить объём выпуска продукции в течение месяца (за 20 рабочих дней июня 2013 года) бригадой, состоящей из 10 человек.

Решение. Воспользуемся формулой (6.1.2.1). Количество продукции v_1 , производимой одним рабочим за один рабочий день, равно

$$v = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_0^7 (2,5t - 0,3125t^2) dt = \left(\frac{5}{4}t^2 - \frac{5}{48}t^3 \right) \Big|_0^7 \approx 25,52 (y. e.).$$

Объём продукции v , выпущенной за месяц бригадой, состоящей из 10 человек, равен $v = 25,52 \cdot 20 \cdot 10 = 5104$ условных единиц.

6.2.7 Найти объём произведённой за 10 лет продукции, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $p(t) = (1+t)e^t$.

Решение. Объём произведённой продукции определим по формуле (6.1.2.1).

$$\begin{aligned} v &= \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_0^{10} (1+t)e^t dt = \left[\begin{array}{ll} u = 1+t & du = dt \\ dv = e^t & v = e^t \end{array} \right] = (1+t)e^t \Big|_0^{10} - \int_0^{10} e^t dt = \\ &= (1+t)e^t \Big|_0^{10} - \int_0^{10} e^t dt = 11e^{10} - 1 - e^t \Big|_0^{10} = 11e^{10} - 1 - e^{10} + 1 = 10e^{10} \approx 220265. \end{aligned}$$

Таким образом, объём произведённой за 10 лет продукции составит 220265 условных единиц.

6.2.8 Найти среднее значение затрат на производстве и реализацию продукции, имеющих вид $Z(v) = 2v + 2$, где v – объём продукции, если объём продукции изменяется от 4 до 6 условных единиц. Найти объём продукции, при котором издержки производства принимают среднее значение.

Решение. Воспользуемся формулой (6.1.2.4).

$$Z_{cp} = \frac{1}{6-4} \int_4^6 (2v+2) dv = \frac{1}{2} (v^2 + 2v) \Big|_4^6 = \frac{1}{2} (48 - 8) = 20.$$

Таким образом, средние издержки составляют 20 денежных единиц. Для того чтобы определить объём продукции, который соответствует средним издержкам, решаем уравнение $Z(v) = Z_{cp}$, которое имеет вид $2v + 2 = 20$. Следовательно, издержки производства принимают среднее значение при объёме производства, равном 9 условным единицам.

6.2.9 Определить дисконтированный доход за 4 года при процентной ставке 5 %, если базовые капиталовложения составляют 10 миллионов денежных единиц и ожидается ежегодное увеличение капиталовложений на 1 миллион денежных единиц.

Решение. Для определения дисконтированного дохода воспользуемся формулой (6.1.2.3). Функция капиталовложений имеет вид: $D(t) = 10 + t$. Удельная норма процента равна $i = \frac{p}{100} = \frac{5}{100} = 0,05$.

Следовательно, дисконтированный доход K равен:

$$K = \int_0^5 (10 + t)e^{-0,05t} dt = \left[\begin{array}{l} u = 10 + t \quad du = dt \\ dv = e^{-0,05t} dt \quad v = -20e^{-0,05t} \end{array} \right] = -(200 + 20t)e^{-0,05t} \Big|_0^5 + 20 \int_0^5 e^{-0,05t} dt = -300e^{-0,25} + 200 - 400e^{-0,05t} \Big|_0^5 = -300e^{-0,25} + 200 - 400e^{-0,25} + 400 = 600 - 700e^{-0,25} \approx 54,8$$

Таким образом, дисконтированный доход равен 54,8 миллионов денежных единиц.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

$$6.3.1.1 \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$6.3.1.2 \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{9+x^2}.$$

$$6.3.1.3 \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

6.3.2 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

$$6.3.2.1 \quad \int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$6.3.2.2 \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

$$6.3.2.3 \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

6.3.3 Дневная производительность труда (7 рабочих часов) рабочего приборостроительного завода описывается функцией $p(t) = 40,36 + 1,12t - 0,36t^2$, где t – время, которое измеряется в часах, $p(t)$ – количество продукции. Какое количество продукции производит рабочий за 262 рабочих дня в год?

6.3.4 Найти среднее значение издержек на производство, описываемой функцией, имеющих вид $Z(v) = 3v^2 + 4v + 1$, где v – объём продукции, и объём продукции изменяется от 0 до 3 условных единиц. Найти объём продукции, при котором издержки производства принимают среднее значение.

6.3.5 Найти объём произведённой за 10 лет продукции, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $p(t) = (2+t)e^{2t}$.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

$$6.4.1.1 \quad \text{а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1}. \quad 6.4.1.2 \quad \text{а) } \int_{-\infty}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2+x^2}; \quad \text{б) } \int_5^6 \frac{dx}{\sqrt{x-5}}.$$

6.4.1.3	a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{2x-1};$	б) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx.$	6.4.1.4	a) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2};$	б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}.$
6.4.1.5	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{4+64x^2};$	б) $\int_{\sqrt{8}}^3 \frac{dx}{x^2-9}.$	6.4.1.6	a) $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{4+x^2};$	б) $\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt{x-6}}.$
6.4.1.7	a) $\int_3^{\infty} \frac{xdx}{x-1};$	б) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} dx.$	6.4.1.8	a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3};$	б) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}.$
6.4.1.9	a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2};$	б) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-16}.$	6.4.1.10	a) $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{9+x^2};$	б) $\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-6}}.$
6.4.1.11	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{3x-1};$	б) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx.$	6.4.1.12	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^3};$	б) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}.$
6.4.1.13	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{9+25x^2};$	б) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2-1}.$	6.4.1.14	a) $\int_{-\infty}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2};$	б) $\int_7^8 \frac{dx}{\sqrt{x-7}}.$
6.4.1.15	a) $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{x^2-1};$	б) $\int_{\pi/4}^{\pi} \operatorname{ctg} dx.$	6.4.1.16	a) $\int_5^{\infty} \frac{dx}{x^5};$	б) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{6-x}}.$
6.4.1.17	a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{16+x^2};$	б) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-9}.$	6.4.1.18	a) $\int_{-\infty}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{5+x^2};$	б) $\int_9^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-9}}.$
6.4.1.19	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{3x-1};$	б) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \operatorname{tg} x dx.$	6.4.1.20	a) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^6};$	б) $\int_5^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}.$
6.4.1.21	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{9+64x^2};$	б) $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x^2-4}.$	6.4.1.22	a) $\int_{-\infty}^{\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7}dx}{7+x^2};$	б) $\int_8^9 \frac{dx}{\sqrt{x-8}}.$
6.4.1.23	a) $\int_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{5x+2};$	б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{ctg} dx.$	6.4.1.24	a) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^7};$	б) $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{8-x}}.$
6.4.1.25	a) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{1+9x^2};$	б) $\int_3^6 \frac{dx}{x^2-36}.$	6.4.1.26	a) $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{4+x^2};$	б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$
6.4.1.27	a) $\int_6^{\infty} \frac{dx}{5x-1};$	б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx.$	6.4.1.28	a) $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^7};$	б) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}.$
6.4.1.29	a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{64+x^2};$	б) $\int_1^7 \frac{dx}{x^2-49}.$	6.4.1.30	a) $\int_{-\infty}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{5+x^2};$	б) $\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-6}}.$

6.4.2 При заданной функции Кобба-Дугласа $p(t) = (k+t)e^{0,2kt}$ найдите объём произведённой продукции за требуемый период m . В условии задачи значение k равно номеру варианта, а значение параметра $m = 0,1 \cdot k$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Вычислить площадь фигуры $\Phi 1$, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x=1$, $x=e$, $y=0$.

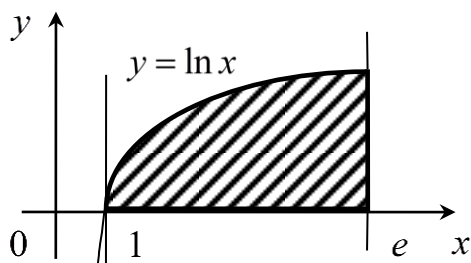


Рисунок 7.2.1 – Фигура $\Phi 1$

Решение. Находим площадь фигуры $\Phi 1$, которая является криволинейной трапецией (рисунок 7.2.1), по формуле (7.1.1.1).

$$S = \int_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - 0 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1 \text{ (кв. ед).}$$

7.2.2 Вычислить площадь фигуры $\Phi 2$, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.

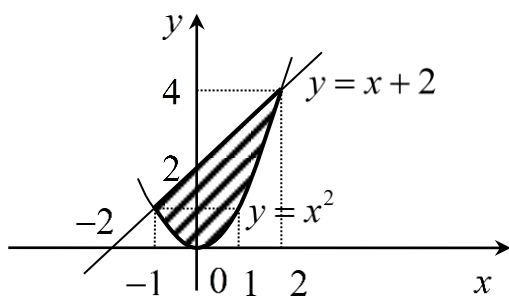


Рисунок 7.2.2 – Фигура $\Phi 2$

Решение. Находим точки пересечения данных линий и строим искомую фигуру $\Phi 2$ (рисунок 7.2.2):

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 2, \\ x^2 = x + 2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Следовательно, согласно формуле (7.1.1.2), имеем

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + 2x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (кв. ед).}$$

7.2.3 Вычислить площадь фигуры $\Phi 3$, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox , где $a > 0$.

Решение. Поскольку все арки циклоиды одинаковы, рассмотрим первую её арку, вдоль которой параметр t изменяется от 0 до 2π (рисунок 7.2.3).

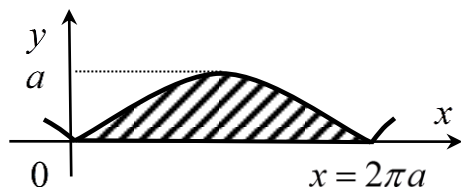


Рисунок 7.2.3 – Фигура $\Phi 3$

Для определения площади фигуры $\Phi 3$, ограниченной первой аркой циклоиды и осью Ox , воспользуемся формулой (7.1.1.3). Следовательно,

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) (a(t - \cos t))' dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \text{ (кв. ед)}.
\end{aligned}$$

7.2.4 Вычислить площадь фигуры $\Phi 4$, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, где $a > 0$.

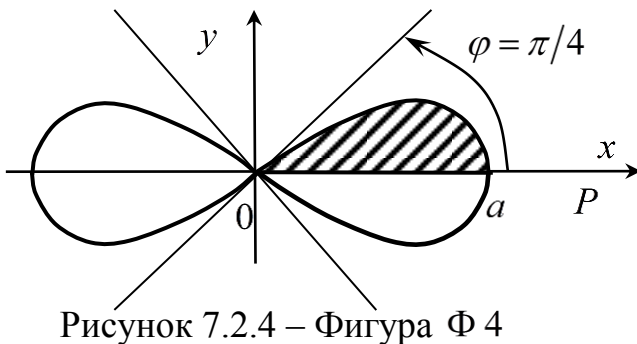


Рисунок 7.2.4 – Фигура $\Phi 4$

Решение. Так как в уравнении лемнискаты Бернулли переменные x и y имеют чётную степень, то кривая, ограничивающая заданную фигуру $\Phi 4$, симметрична относительно осей координат. Следовательно, для нахождения площади всей фигуры $\Phi 4$, достаточно вычислить площадь четвертой части этой фигуры,

расположенной, например, в первой четверти, и полученный результат увеличить в четыре раза.

Запишем уравнение лемнискаты Бернулли в полярной системе координат, используя формулы перехода от декартовой системы координат к полярной системе координат: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда уравнение данной кривой примет вид: $(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) \rightarrow r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ или $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Первой четверти декартовой системы координат соответствует изменение полярного угла φ от 0 до $\pi/4$ (рисунок 7.2.4). Используя формулу (7.1.1.4), находим площадь фигуры, ограниченной лемниской Бернулли.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = a^2 \text{ (кв. ед)}.$$

7.2.5 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсечённой прямой $x=1$.

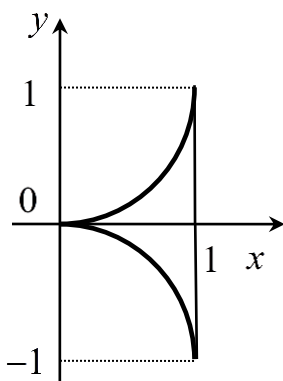


Рисунок 7.2.5 – Линия $L 1$

Решение. Линия $L 1$, длину которой необходимо найти, изображена на рисунке 7.2.5. Найдём производную функции $y = f(x)$, заданной неявно соотношением $y^2 = x^3$, имеем $2yy' = 3x^2$, откуда $(y')^2 = \frac{9}{4}x$. В силу симметрии кривой относительно оси абсцисс достаточно вычислить длину дуги расположенной в первой четверти, и удвоить полученный результат. По формуле (7.1.2.1) получаем длину дуги заданной кривой

$$l = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \int_0^1 \sqrt{4 + 9x} dx =$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^1 \sqrt{4 + 9x} d(4 + 9x) = \frac{2}{27} \sqrt{(4 + 9x)^3} \Big|_0^1 = \frac{26}{27} \sqrt{13} - \frac{16}{27} = \frac{26\sqrt{13} - 16}{27} \approx 2,9 \text{ (лин. ед)}.$$

7.2.6 Вычислить длину астроида $y = a \sin^3 t$, $x = a \cos^3 t$, где $a > 0$.

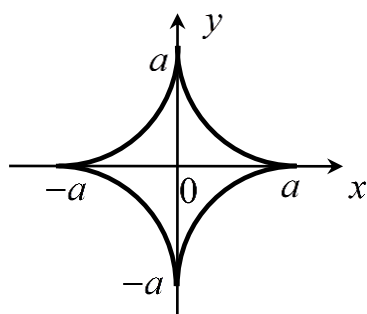


Рисунок 7.2.6 – Астроида

Решение. Ввиду симметрии астроида (рисунок 7.2.6) относительно осей координат достаточно вычислить длину её части, расположенной в первой четверти плоскости, а затем полученный результат умножить на четыре. Имеем $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t$, $y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$. Тогда, согласно формуле (7.1.2.2), имеем

$$l = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= 12a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -3a \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = 6a \text{ (лин. ед)}.$$

7.2.7 Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 - \cos \varphi)$, где $a > 0$.

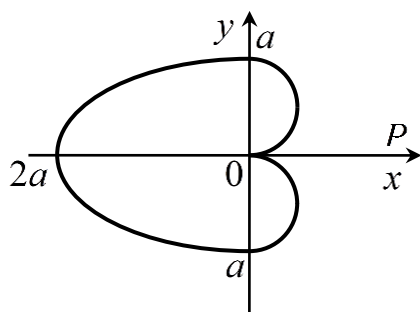


Рисунок 7.2.7 – Кардиоида

Решение. В силу симметрии кардиоиды (рисунок 7.2.7) относительно полярной оси OR достаточно вычислить длину дуги, расположенной выше оси, а затем полученный результат увеличить в два раза. Имеем $r'_\varphi = a \sin \varphi$. Используя формулу (7.1.2.4), находим длину дуги кардиоиды.

$$l = 2 \int_0^\pi \sqrt{a^2 (1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^\pi \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} d\varphi = 2a^2 \int_0^\pi 2 \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -8a \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 0 + 8a = 8a \text{ (лин. ед)}.$$

7.2.8 Вычислить объём тела T_1 , образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

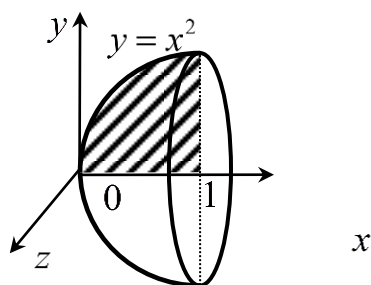


Рисунок 7.2.8 – Тело T_1

Решение. Находим точку пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $x = 1$: $M(1; 0)$ (рисунок 7.2.8).

Воспользуемся формулой (7.1.3.2).

$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \approx 0,628 \text{ (куб. ед)}.$$

7.2.9 Вычислить площадь поверхности Π_1 , образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin 2x$ от точки $x = 0$ до точки $x = \pi/2$.

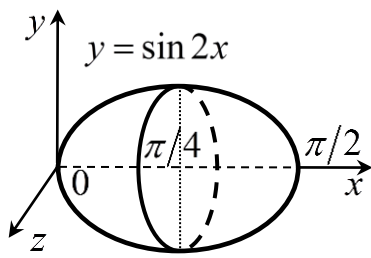


Рисунок 7.2.9 – Поверхность Π_1

Решение. Как видно из рисунка 7.2.9 и формулы 7.1.4.2 искомая площадь поверхности вращения

$$Q_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1 + 4\cos^2 2x} dx =$$

$$= -\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4\cos^2 2x} d \cos 2x =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = 2 \cos 2x \quad x = 0 \rightarrow t = 2 \\ d \cos 2x = \frac{dt}{2} \quad x = \pi/2 \rightarrow t = -2 \end{array} \right] = -\frac{\pi}{2} \int_2^{-2} \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1 + t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{\ln |t + \sqrt{1+t^2}|}{2} \right) \Bigg|_{-2}^2 = \frac{\pi}{2} (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})) \approx 9,29 \text{ (кв. ед).}$$

Для нахождения интеграла $\int \sqrt{1+t^2} dt$ воспользовались заменой $t = \operatorname{tg} z$, основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и формулой интегрирования по частям.

7.2.10 Найти путь пройденный телом.

1. Скорость движения тела задана уравнением $v = (3t^2 + 2t - 1)$ (в м/с). Найти путь, пройденный телом за 10 с от начала движения.

Решение. В условии задачи дано: $t_1 = 0$, $t_2 = 10$, $f(t) = 3t^2 + 2t - 1$. По формуле (1) получим:

$$S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t - 1) dt = (t^3 + t^2 - t) \Big|_0^{10} = 1090 \text{ м.}$$

2. Скорость движения тела в момент времени t задается формулой $v = 15 - 3t$, где v — скорость (в м/с), t — время (в с). Какой путь пройдет тело от начала отсчета времени до остановки?

Решение. Так как в момент остановки тела скорость его равна 0, то нам нужно определить путь, пройденный телом от момента времени $t_1 = 0$ до $t_2 = 5$. Согласно формуле (1) получим:

$$S = \int_0^5 (15 - 3t) dt = \left(15t - \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^5 = 37,5 \text{ м.}$$

3. Два тела начали двигаться в один и тот же момент из одной точки в одном направлении по прямой. Одно тело двигалось со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, другое — со скоростью $v = (4t + 5)$ м/с. На каком расстоянии они будут друг от друга через 5 с?

Решение. По формуле (1) вычислим пути, пройденные первым и вторым телом:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t) dt = (2t^3 + t^2) \Big|_0^5 = 275 \text{ м,}$$

$$s_2 = \int_0^5 (4t + 5) dt = (2t^2 + 5t) \Big|_0^5 = 75 \text{ м},$$

$$s_1 - s_2 = 200 \text{ м}.$$

4. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v = (39,2 - 9,8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение. Тело достигает наибольшей высоты подъема в момент времени t , когда $v = 0$, т. е. $39,2 - 9,8t = 0$, откуда $t = 4$ с. По формуле (1) находим:

$$s = \int_0^4 (39,2 - 9,8t) dt = (39,2t - 4,9t^2) \Big|_0^4 = 78,4 \text{ м}.$$

7.2.11 Вычислить работа силы.

1. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы в 60 Н. Какую работу она производит, растягивая ее на 0,12 м?

Решение. При $F = 60$ Н $x = 0,02$ м. По формуле $F = kx$ (закон Гука для пружины) найдем k : $60 = k \cdot 0,02$, откуда $k = \frac{60}{0,02} = 3000$ Н/м.

Подставив найденное значение k в формулу $F = kx$, получим $F = 3000x$, т. е. $f(x) = 3000x$.

По формуле (2), взяв пределы интегрирования от 0 до 0,12, вычислим работу:

$$A = \int_0^{0,12} 3000x dx = 3000 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,12} = 21,6 \text{ Дж}.$$

2. Материальная точка M движется по координатной прямой под действием силы, величина которой меняется пропорционально расстоянию точки до начала координат O . Известно, что направление силы совпадает с направлением оси и что она равнялась 1 Н, когда расстояние MO было 3 м. Вычислить работу этой силы по переносу точки на расстояние 15 м от начала координат.

Решение. Из условия задачи следует, что сила $F(x)$, действующая на точку, меняется по закону $F(x) = kx$, где коэффициент пропорциональности k находится из уравнения $1 = k \cdot 3$, $k = \frac{1}{3}$.

Таким образом, $F(x) = \frac{x}{3}$ и работа силы на пройденном пути согласно (2) равна:

$$A = \int_0^{15} \frac{x}{3} dx = \frac{x^2}{6} \Big|_0^{15} = 37,5 \text{ Дж}.$$

3. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 80 Дж?

Решение. По длине растяжения пружины на 0,04 м и совершенной работе 20 Дж по формуле (2) найдем k :

$$20 = \int_0^{0,04} kx dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,04} = 0,0008k,$$

откуда $k = \frac{20}{0,0008} = 25\,000$ Н/м.

Теперь по k и A найдем x : $A = \int_0^{x_1} kx dx$, где x_1 — длина, на которую растянута пружина при совершенной работе в 80 Дж:

$$80 = \int_0^{x_1} 25\,000x dx = 25\,000 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} = 12\,500x_1^2,$$

откуда $x_1^2 = \frac{80}{12\,500} = \frac{16}{2500}$, $x_1 = \frac{4}{50} = 0,08$ м.

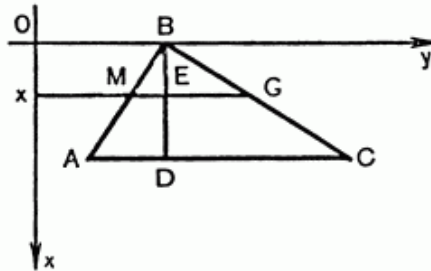
7.2.12 Найти силу давления жидкости.

Вычислить силу давления воды на вертикально погруженную треугольную пластину ABC с основанием $AC=9$ м и высотой $BD=2$ м, если вершина B лежит на свободной поверхности жидкости, а AC — параллельно ей.

Решение. Пусть MG — поперечное сечение пластины на уровне $BE=x$. Найдем зависимость длины MG от x . Из подобия треугольников MBG и ABC имеем $MG:AC=BE:BD$, или $MG:9=x:2$, откуда $MG=f(x)=4,5x$. На основании формулы (3) получим:

$$P=\rho g \int_0^2 4,5x^2 dx = 4,5\rho g \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = 12\rho g \approx 1,2 \cdot 10^5 \text{ Н},$$

так как плотность воды 1000 кг/м^3 и $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$.



7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Вычислить площади фигур, ограниченными линиями, указанными в задачах 7.3.1.1 – 7.3.1.6.

7.3.1.1 $y = x^2 + 2x, y = x + 2$.

7.3.1.2 $y = \frac{27}{x^2 + 9}, y = \frac{x^2}{6}$.

7.3.1.3 $y = e^x - 1, y = e^{2x} - 3, x = 0$.

7.3.1.4 $y = \ln(x + 2), y = 2\ln x, y = 0$.

7.3.1.5 $y = 2(1 - \cos t), x = 2(t - \sin t), y = 0$.

7.3.1.6 $r = a(1 + \sin \varphi), a > 0$.

7.3.2 Вычислить длины дуг кривых.

7.3.2.1 $y = \ln \sin x$ от $x = \pi/3$ до $x = \pi/2$.

7.3.2.2 $y = \operatorname{ch} x$ от $x = 0$ до $x = 1$.

7.3.2.3 $y = e^t \sin t, x = e^t \cos t$ от $t = 0$ до $t = \ln \pi$.

7.3.2.4 $r = \varphi^2$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

7.3.3 Вычислить объёмы тел, образованных вращением вокруг оси Ox , фигур, ограниченными линиями, указанными в задачах 7.3.3.1 – 7.3.3.2.

7.3.3.1 $2y = x^2, y = -x + 3/2$.

7.3.3.2 $y = e^{-2x} - 1, y = e^{-x} + 1, x = 0$.

7.3.4 Вычислить площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси Ox , дуг кривых, которые указаны в задачах 7.3.4.1 – 7.3.4.2.

7.3.4.1 $y = \operatorname{ch} x$ от $x = 0$ до $x = \ln 2$.

7.3.4.2 $y = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$.

7.3.5 Скорость движения тела задана уравнение $v = 6t^2 + 4$ (м/с). Найти путь, пройденный за пять секунд от начала движения.

7.3.6 Скорость движения тела задана уравнение $v = 9t^2 - 8t$ (м/с). Найти его путь за четвёртую секунду.

7.3.7 Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

7.3.8 Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает ее на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от длины 0,22 м до длины 0,32 м?

7.3.9 Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса R , диаметр которого находится на поверхности воды.

7.3.10 Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой равно 10 метров, верхнее 6 метров и высота 5 м, если уровень погружения нижнего основания 20 м.

7.3.11 Найти момент инерции и статический момент однородного шара радиуса R и массы m относительно его диаметра.

7.3.12 Определить центр тяжести однородного полушара радиуса R .

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Заданы функции $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = g(x)$, $y = p(x)$, а также числа a и b . Вычислить:

- а) площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$;
- б) длину дуги кривой $y = g(x)$ от точки $x_1 = a$ до точки $x_2 = b$;
- в) объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = p(x)$ и прямыми $x = a$, $y = b$ (в случае неоднозначности фигуры, ограниченной линиями, считать, что $x \geq a$);
- г) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox , дуги кривой $y = g(x)$ от точки $x_1 = a$ до точки $x_2 = b$.

7.4.1.1 $f(x) = x^2 + x$, $\varphi(x) = 4x - 2$, $g(x) = x^2$, $p(x) = x^3$, $a = 1$, $b = 2$.

7.4.1.2 $f(x) = x^2 + 5x$, $\varphi(x) = x - 3$, $g(x) = \operatorname{ch} x$, $p(x) = 1 - x^2$, $a = 1/2$, $b = 3/4$.

7.4.1.3 $f(x) = x^2 + 2x$, $\varphi(x) = 7x - 4$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $p(x) = x^3$, $a = 0$, $b = 1/4$.

7.4.1.4 $f(x) = x^2 - x$, $\varphi(x) = x + 8$, $g(x) = 2^x / \ln 2$, $p(x) = 2^x$, $a = 3$, $b = \log_2 15$.

7.4.1.5 $f(x) = x^2 + 4x$, $\varphi(x) = 11x - 6$, $g(x) = 2\sqrt{x}$, $p(x) = \ln x$, $a = 1/8$, $b = 1/3$.

- 7.4.1.6 $f(x) = x^2 - x$, $\varphi(x) = 4x - 6$, $g(x) = e^x$, $p(x) = e^{2x}$, $a = \ln \sqrt{3}$, $b = \ln \sqrt{8}$.
- 7.4.1.7 $f(x) = x^2 - 4x$, $\varphi(x) = 2x - 8$, $g(x) = x^{3/2}$, $p(x) = x^3 + 1$, $a = 1$, $b = 4$.
- 7.4.1.8 $f(x) = x^2 - 6x$, $\varphi(x) = x - 10$, $g(x) = 2x^2$, $p(x) = x^3 - x$, $a = 1$, $b = 2$.
- 7.4.1.9 $f(x) = x^2 - 3x$, $\varphi(x) = 5x - 6$, $g(x) = \operatorname{ch} 2x/2$, $p(x) = -x^3$, $a = 0$, $b = \ln 3$.
- 7.4.1.10 $f(x) = x^2 - 2x$, $\varphi(x) = 7x - 14$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $p(x) = x^5$, $a = 1$, $b = \sqrt{3}$.
- 7.4.1.11 $f(x) = x^2 - 3x$, $\varphi(x) = 16 + 3x$, $g(x) = 3^x / \ln 3$, $p(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$.
- 7.4.1.12 $f(x) = x^2 + 5x$, $\varphi(x) = 12 + 6x$, $g(x) = 3\sqrt{x}$, $p(x) = x^3 - 2$, $a = 4$, $b = 9$.
- 7.4.1.13 $f(x) = x^2 + 4x$, $\varphi(x) = 15 + 2x$, $g(x) = e^{2x}$, $p(x) = x^4 - 2$, $a = 0$, $b = \ln 2$.
- 7.4.1.14 $f(x) = x^2 + 6x$, $\varphi(x) = 18 + 3x$, $g(x) = 4x^{3/2}$, $p(x) = x^5 + 1$, $a = 1$, $b = 4$.
- 7.4.1.15 $f(x) = x^2 + 4x$, $\varphi(x) = 21 + 8x$, $g(x) = 3x^2$, $p(x) = x^2 + 3x$, $a = 2$, $b = 5$.
- 7.4.1.16 $f(x) = x^2 + x$, $\varphi(x) = 3x + 3$, $g(x) = \operatorname{ch} 3x/3$, $p(x) = x^2 - 5$, $a = 1$, $b = 4$.
- 7.4.1.17 $f(x) = x^2 + 8x$, $\varphi(x) = x - 12$, $g(x) = \sqrt{x^3}$, $p(x) = x^3$, $a = 1$, $b = 9$.
- 7.4.1.18 $f(x) = x^2 + 6x$, $\varphi(x) = x - 4$, $g(x) = 4^x / \ln 4$, $p(x) = 1 - x^3$, $a = 0$, $b = 2$.
- 7.4.1.19 $f(x) = x^2 + 2x$, $\varphi(x) = x + 20$, $g(x) = 4\sqrt{x}$, $p(x) = -x^3$, $a = 9$, $b = 16$.
- 7.4.1.20 $f(x) = x^2 - x$, $\varphi(x) = x + 48$, $g(x) = e^{3x}/3$, $p(x) = x^4$, $a = 0$, $b = \ln 4$.
- 7.4.1.21 $f(x) = x^2 - 7x$, $\varphi(x) = 112 + 2x$, $g(x) = 9x^{3/2}$, $p(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = 1$.
- 7.4.1.22 $f(x) = x^2 + 3x$, $\varphi(x) = 7x - 3$, $g(x) = 4x^2$, $p(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = 1/2$.
- 7.4.1.23 $f(x) = x^2 - 5$, $\varphi(x) = x - 3$, $g(x) = \operatorname{ch} 4x$, $p(x) = e^x$, $a = 0$, $b = \ln 5$.
- 7.4.1.24 $f(x) = 2x^2 + 2$, $\varphi(x) = 5x$, $g(x) = 4\sqrt{x^3}$, $p(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$, $b = 16$.
- 7.4.1.25 $f(x) = 3x^2 + 3$, $\varphi(x) = 10x$, $g(x) = 5^x / \ln 5$, $p(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $b = 1$.
- 7.4.1.26 $f(x) = 4x^2 + 4$, $\varphi(x) = 17x$, $g(x) = 5\sqrt{x}$, $p(x) = \operatorname{ctg} x$, $a = 4$, $b = 16$.
- 7.4.1.27 $f(x) = 2x^2 + 2$, $\varphi(x) = -5x$, $g(x) = e^{4x}/4$, $p(x) = \sin 2x$, $a = 0$, $b = 1$.
- 7.4.1.28 $f(x) = 3x^2 + 3$, $\varphi(x) = -10x$, $g(x) = 16x^{3/2}$, $p(x) = \cos 2x$, $a = 0$, $b = 1/2$.
- 7.4.1.29 $f(x) = 4x^2 + 4$, $\varphi(x) = -17x$, $g(x) = \operatorname{ch} 5x/5$, $p(x) = -x^3$, $a = 0$, $b = 1/5$.
- 7.4.1.30 $f(x) = x^2 + 9x$, $\varphi(x) = 11 - x$, $g(x) = e^{5x}/5$, $p(x) = 4 - x^2$, $a = 1$, $b = 2$.