

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a;b]$ на n элементарных частичных отрезков системой точек $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Длина частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, где $i = \overline{1, n}$, равна $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Обозначим длину наибольшего частичного отрезка разбиения через $\lambda_n = \max_i \{\Delta x_i\}$ и назовём *мелкостью разбиения*. На каждом элементарном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбираем точки ξ_i и вычисляем значения функции в них, то есть $f(\xi_i)$.

Определение 5.1.2.1 *Интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, соответствующей данному разбиению отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_i , называется алгебраическая сумма произведений значения функции, вычисленной в точке ξ_i на длину частичного отрезка, которому принадлежит эта точка, то есть сумма вида

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n. \quad (5.1.2.1)$$

Определение 5.1.2.2 *Определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм вида (5.1.2.1) при мелкости разбиения стремящегося к нулю, если этот предел существует и конечен.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (5.1.2.2)$$

Если указанный предел существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* (или интегрируемой на отрезке $[a;b]$). При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, a и b – *нижним и верхним пределами интегрирования*, соответственно.

Теорема 5.1.2.1 Если $\int_a^b f(x) dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Теорема 5.1.2.2 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, то есть определённый интеграл существует, в смысле существования предела интегральных сумм.

Теорема 5.1.2.3 Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нём всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

Приведём основные свойства определённого интеграла:

$$1) \quad \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$2) \quad \int_a^b dx = b - a;$$

$$3) \quad \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$$

$$4) \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx;$$

5) если на отрезке $[a; b]$ заданы непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, причём для каждой точки этого отрезка выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$;

6) если на отрезке $[a; b]$ непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$;

$$7) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$8) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

9) если $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$, $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ и $a < b$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a);$$

10) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на отрезке найдётся такая точка $c \in [a; b]$, что $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$.

Определённый интеграл вычисляется по **формуле Ньютона-Лейбница**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Данная формула устанавливает связь определённого и неопределённого интегралов. Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Рассмотрим основные методы интегрирования определённого интеграла.

Метод непосредственного интегрирования определённого интеграла

Данный метод основан на применении свойств определённого интеграла, таблицы неопределённых интегралов и формулы Ньютона-Лейбница.

Метод замены (подстановки) переменной в определённом интеграле

Применение замены переменной в определённом интеграле основывается на следующей теореме.

Теорема 5.1.2.4 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt . \quad (5.1.2.3)$$

Формула (5.1.2.3) называется *формулой замены переменной в определённом интеграле*. Для вычисления определённого интеграла по этой формуле необходимо выполнить замену $x = \varphi(t)$, вычислить $dx = \varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, найти пределы интегрирования по переменной t , решая уравнения $\varphi(t) = a$ и $\varphi(t) = b$.

Необходимо отметить, что при вычислении определённого интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения будут изменяться пределы интегрирования.

Метод интегрирования по частям в определённом интеграле

Данный метод основан на следующей теореме.

Теорема 5.1.2.5 Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du . \quad (5.1.2.4)$$

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При введении понятия определённого интеграла как предела интегральных сумм предполагалось, что пределы интегрирования являются конечными, а подынтегральная функция непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода. При выполнении этих условий интегралы называются *собственными*. Если хотя бы одно из указанных условий нарушается, то интегралы называются *несобственными интегралами*.

Определим несобственные интегралы первого рода или интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Определение 6.1.1.1 *Несобственным интегралом первого рода с бесконечным верхним пределом интегрирования* от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ называется предел $f(b)$ при значении $b \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.1.1.1)$$

Определение 6.1.1.2 *Несобственным интегралом первого рода с бесконечным нижним пределом интегрирования* от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty; b]$ называется предел $f(a)$ при значении $a \rightarrow -\infty$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.1.1.2)$$

Если пределы в правых частях формул (6.1.1.1) и (6.1.1.2) существуют и конечны, то несобственные интегралы первого рода называются *сходящимися*, если пределы не существуют или бесконечны, то интегралы называются *расходящимися*.

Несобственный интеграл первого рода с двумя бесконечными пределами интегрирования вычисляется по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx, \quad (6.1.1.3)$$

где $-\infty < c < +\infty$.

Определим несобственные интегралы второго рода или интегралы от неограниченных подынтегральных функций.

Определение 6.1.1.3 *Несобственным интегралом второго рода* от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $[a; b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ при значении $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (6.1.1.4)$$

Определение 6.1.1.4 *Несобственным интегралом второго рода* от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a; b]$ и имеющей бесконечный

разрыв в точке $x=a$ называется предел интеграла $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ при значении $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (6.1.1.5)$$

Если пределы в правых частях формул (6.1.1.4) и (6.1.1.5) существуют и конечны, то несобственные интегралы второго рода называются *сходящимися*, если пределы не существуют или бесконечны, то интегралы называются *расходящимися*.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой точке $c \in [a; b]$, то данный интеграл необходимо представить в виде суммы двух несобственных интегралов второго рода

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \quad (6.1.1.6)$$

Экономические приложения определённого интеграла

Объём v произведённой продукции за время $t \in [t_1; t_2]$ при производительности труда $p(t)$ вычисляется по формуле

$$v = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt. \quad (6.1.2.1)$$

Если считать затраты труда линейно зависимыми от времени, а затраты труда не изменяются, то функция Кобба-Дугласа имеет вид $p(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Следовательно, объём произведённой продукции v за время T равен

$$v = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}dt. \quad (6.1.2.2)$$

По формуле (6.1.2.1) будет вычисляться *количество товара v* , которое поступает на склад в промежуток времени $t \in [t_1; t_2]$, если $p(t)$ – количество товара, поступающего на склад за единицу времени. Если же $p(t)$ – расход электроэнергии в единицу времени, то *расход электроэнергии* за время $t \in [t_1; t_2]$ определяется по той же формуле (6.1.2.1).

Дисконтирование. Процесс определения первоначальной суммы по известному её конечному значению, полученному через какое-либо время t при определённой процентной ставке p , называется *дисконтированием*.

Предположим, что доход изменяется со временем t и описывается функциональной зависимостью $D(t)$, а удельная норма процента равна

$i = \frac{p}{100}$ и процент начисляется непрерывно. Тогда *дисконтированный доход* K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T D(t)e^{-it} dt. \quad (6.1.2.3)$$

Вычисление средних экономических величин. В экономике часто приходится находить среднее значение затрат на производство за определённый промежуток времени, среднюю производительность труда за определённый промежуток времени и т. д. Такого вида задачи решаются с помощью *теоремы о среднем* (свойство 10 определённого интеграла). Тогда *среднее значение* $f(c)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ равно

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.1.2.4)$$

Процессы роста. Пусть некоторая экономическая величина $y = f(t) > 0$, при заданном начальном условии $f(0) = y_0$, характеризуется следующими свойствами:

- абсолютный прирост в интервале времени $[0; t]$ пропорционален длине интервала и начальному значению;
- норма прироста $\frac{f'(t)}{f(t)} = \gamma$ постоянна.

Тогда средняя норма прироста в интервале времени $[0; t]$ рассчитывается по формуле $\bar{\gamma} = \frac{1}{t} \int_0^t \gamma(z) dz$.

Общая прибыль. Если $i(x)$ – предельные издержки за x единиц количества, а $v(x)$ – предельные выручки за x единиц количества, общая прибыль равна $P(x) = \int_0^x (v(x) - i(x)) dx$.

Определённый интеграл имеет и другие экономические приложения.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

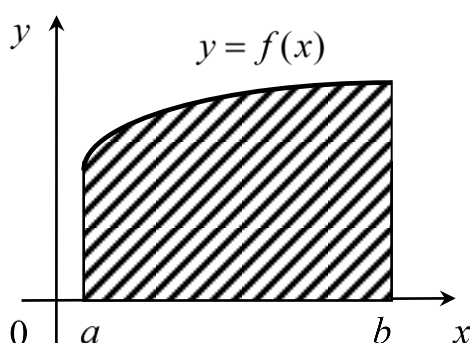


Рисунок 7.1.1.1 – Криволинейная трапеция

Используя понятие определённого интеграла, можно вычислять площади плоских фигур, находить длины дуг плоских кривых, вычислять объёмы и площади поверхностей пространственных тел.

Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(x) \geq 0$. *Криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, а также осью Ox (рисунок 7.1.1.1).

Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (7.1.1.1)$$

Рассмотрим плоскую фигуру Φ , которая ограничена графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, а также двумя прямыми $x = a$, $x = b$. Пусть для каждой точки x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $f_1(x) \leq f_2(x)$ (рисунок 7.1.1.2).

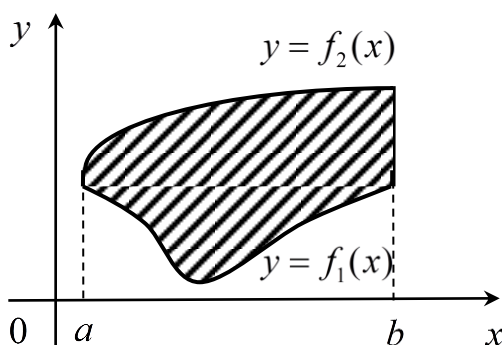


Рисунок 7.1.1.2 – Плоская фигура Φ

Площадь этой плоской фигуры находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (7.1.1.2)$$

Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox , то её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt, \quad (7.1.1.3)$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений $x(t_1) = a$, $y(t_2) = b$ ($y(t) \geq 0$ на отрезке $[t_1; t_2]$).

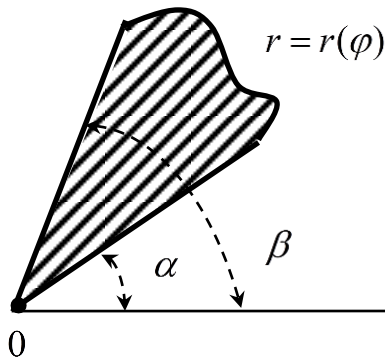


Рисунок 7.1.1.3 – Криволинейный сектор

Пусть фигура ограничена непрерывной функцией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, где φ и r – полярные координаты. Полученная фигура называется **криволинейным сектором**, ограниченным дугой графика функции $r = r(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (рисунок 7.1.1.3).

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi) d\varphi. \quad (7.1.1.4)$$

Вычисление длин дуг плоских и пространственных кривых

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$, дуга AB – график этой функции (рисунок 7.1.2.1).

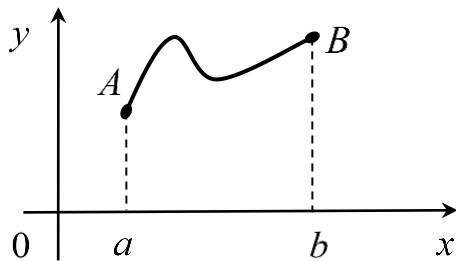


Рисунок 7.1.2.1 – Плоская дуга

Длина l плоской гладкой дуги AB , уравнение которой задано в аналитическом виде, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (7.1.2.1)$$

Предположим, что плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $t \in [t_1; t_2]$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причём $x'(t) \neq 0$ для любого значения $t \in [t_1; t_2]$, а t_1 и t_2 – значения параметра t , которые соответствуют концам дуги, то есть точкам A и B соответственно (рисунок 7.1.2.1).

Длина l плоской гладкой дуги AB , уравнение которой задано параметрическими уравнениями, вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (7.1.2.2)$$

Рассмотрим пространственную кривую L , заданную параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и $t \in [t_1; t_2]$.

Функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причём $x'(t) \neq 0$ для любого значения $t \in [t_1; t_2]$, а t_1 и t_2 – значения параметра t , которые соответствуют концам кривой L .

Длина l пространственной гладкой дуги L , уравнение которой задано параметрическими уравнениями, вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt. \quad (7.1.2.3)$$

Пусть плоская гладкая кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, а α и β – значения полярного угла φ , которые соответствуют концам кривой L . Если функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha; \beta]$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (7.1.2.4)$$

Вычисление объёмов пространственных тел

Пусть задано некоторое пространственное тело, ограниченное поверхностью, и известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной некоторой прямой, например, к оси абсцисс. Эти сечения называются *поперечными*. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox . Если площадь $S(x)$ поперечного сечения является непрерывной функцией на отрезке $[a; b]$, то объём тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (7.1.3.1)$$

Предположим, что пространственное тело получено путём вращения дуги L вокруг оси Ox , заданной на отрезке $[a; b]$ функцией $y = f(x)$. Тогда в сечении получаем круг, площадь которого равна $S(x) = \pi f^2(x)$. Следовательно, объём тела вращения такого тела можно определить по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (7.1.3.2)$$

Если же эта дуга будет вращаться вокруг оси Oy , то объём полученного тела можно вычислить по формуле

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx. \quad (7.1.3.3)$$

Пусть пространственное тело получено путём вращения дуги L вокруг оси Oy , заданной на отрезке $[c; d]$ функцией $x = f(y)$. Тогда в сечении получаем круг, площадь которого равна $S(y) = \pi \varphi^2(y)$. Следовательно, объём тела вращения такого тела можно определить по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (7.1.3.4)$$

Если дуга L , заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $t \in [t_1; t_2]$, вращается вокруг оси Ox или Oy , то объёмы тел вращения вычисляются по формулам:

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt, \quad (7.1.3.5)$$

$$V_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) |y(t)| x'(t) dt. \quad (7.1.3.6)$$

Предположим, что криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси. Тогда объём тела вращения находится по формуле

$$V_{OP} = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (7.1.3.7)$$

Вычисление площадей поверхности тел вращения

Рассмотрим дугу L , которая вращается вокруг произвольной оси l . Предположим, что известны расстояние ρ от произвольной точки дуги до оси вращения l и дифференциал дуги dl , которые выражаются через переменную интегрирования, а также пределы интегрирования A и B , соответствующих концов дуги L . Тогда площадь поверхности вращения будет выражаться следующим интегралом

$$Q_l = 2\pi \int_A^B \rho dl. \quad 7.1.4.1)$$

На основании интеграла (7.1.4.1) приведём формулы площадей Q_x поверхностей вращения вокруг оси Ox , в зависимости от формулы задания дуги.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, где $x \in [a; b]$, вычисляется по формуле

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (7.1.4.2)$$

Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, то

$$Q_x = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (7.1.4.3)$$

Если дуга задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то

$$Q_x = 2\pi \int_a^b r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (7.1.4.4)$$

МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Масса тела переменной плотности

Рассмотрим тело, имеющее форму кругового цилиндра радиуса r , плотность материала которого изменяется по закону $\rho = \rho(x)$, где x – расстояние до одного из торцов. Определим массу данного тела. Предполагается плавное изменение плотности, что означает непрерывность функции $\rho = \rho(x)$ и приближенное совпадение плотности близлежащих участков. Делаем разбивку цилиндра на достаточно малые участки, такие, что в пределах каждого из них плотность считаем постоянной и равной $\rho(\xi_i)$, где ξ_i – точка участка. Вычисляем массы участков по формуле $\pi r^2 \cdot \rho(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ и суммируем результаты. Таким образом, получаем приближенное значение массы тела. При уменьшении участков точность вычисления повышается и легко себе представить, что в пределе при $n \rightarrow \infty$ и $\Delta x_i \rightarrow 0$ получится точное значение массы

$$M = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \cdot \pi r^2 \cdot \Delta x_i = \pi r^2 \int_0^H \rho(x) dx ;$$

где H – высота цилиндра.

Приведенный пример показывает характерные моменты образования интегральной суммы и получения определенного интеграла в физических задачах.

Статическим моментом материальной точки массой m относительно оси e называют величину md_e , где d_e – расстояние до оси e . статический момент системы материальных точек получается суммированием статистических моментов каждой точки. Через статистические моменты определяется важное физическое понятие – центр масс системы материальных точек. Координаты центра масс находят по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M},$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

где ; – статистические моменты системы

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

относительно осей Ox и Oy , – масса системы.

В случае, если масса непрерывно распределена вдоль дуги кривой $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) путем деления на участки приближенно представляем ее системой материальных точек массами

$$\rho \Delta S_i = \rho \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \rho \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i,$$

имеющими координаты ξ_i и $f(\xi_i)$. Точные значения статических моментов массы, непрерывно распределенной вдоль дуги кривой, получаются в пределе статистических моментов системы материальных точек. В итоге приходим к выражениям

$$M_x = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \rho f(\xi_i) \cdot \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \rho \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad ; (18)$$

$$M_y = \rho \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Масса дуги кривой находится умножением ее длины на линейную плотность ρ :

$$M = \rho \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Определение статических моментов массы пластины, имеющей форму криволинейной трапеции, также сводится к вычислению определенных интегралов, которые получаются по аналогичному принципу. Формулы расчета статических моментов пластины имеют вид

$$M_x = \frac{\rho_1}{2} \cdot \int_a^b f^2(x) dx ;$$

$$M_y = \rho_1 \cdot \int_a^b x \cdot f(x) dx ;$$

где $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$) – уравнение границы криволинейной трапеции.

При плотности ρ_1 (масса единицы площади пластины) масса пластины определяется умножением ее площади на плотность и имеем формулу

$$M = \rho_1 \cdot \int_a^b f(x) dx.$$