

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Найти область определения функции $y = \arcsin(y/x)$

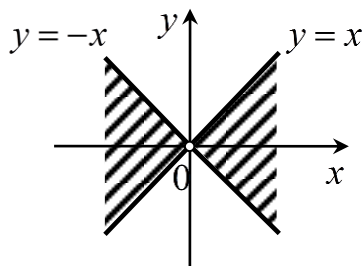


Рисунок 8.2.1 – Область определения функции

Решение: Функция $y = \arcsin(y/x)$

определена при $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$, $x \neq 0$.

Следовательно, $-x \leq y \leq x$ при $x > 0$, и $x \leq y \leq -x$ при $x < 0$.

Область определения функции изображена на рисунке 8.2.1 и содержит границы области, за исключением начала координат.

8.2.2 Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{3}{x^2 + xy}}$

Решение. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{3}{x^2 + xy}} = (1^\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy} \cdot \frac{3xy}{x^2 + xy}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{3y}{x+y}} = e^3$.

8.2.3 Найти точки разрыва функции $u = \frac{x + y + z}{3x + 2y - z - 4}$.

Решение. Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Поэтому она имеет поверхность разрыва – плоскость $3x + 2y - z - 4 = 0$.

8.2.4 Найти частные производные первого и второго порядков от функции $z = x^5 + y^5 - x^3 y^3$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:
 $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^5 + y^5 - x^3 y^3)'_x = 5x^4 - 3x^2 y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^5 + y^5 - x^3 y^3)'_y = 5y^4 - 3x^3 y^2$. Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (5x^4 - 3x^2 y^3)'_x = 20x^3 - 6xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (5x^4 - 3x^2 y^3)'_y = -9x^2 y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (5y^4 - 3x^3 y^2)'_y = 20y^3 - 6x^3 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (5y^4 - 3x^3 y^2)'_x = -9x^2 y^2.$$

8.2.5 Имеется производственная функция $z = 6x^3 - x^2 y^2 + 5y^3$, где x – затраты живого труда, а y – затраты овеществлённого труда. Найти частные коэффициенты эластичности выпуска продукции по заданным факторам при значениях $x=1$, $y=2$.

Решение. Находим частные производные от производственной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2 - 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 15y^2 - 2x^2y. \text{ Тогда частные коэффициенты эластичности}$$

выпуска продукции по заданным факторам равны: $\varepsilon_x = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{18x^3 - 2x^2y^2}{6x^3 - x^2y^2 + 5y^3},$

$$\varepsilon_y = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{15y^3 - 2x^2y^2}{6x^3 - x^2y^2 + 5y^3}. \text{ Найдём значения коэффициентов при } x=1, y=2:$$

$\varepsilon_x(1;2) \approx 0,24, \quad \varepsilon_y(1;2) \approx 2,67.$ Таким образом, с увеличением затрат живого труда на 1 % объём производства возрастет на 0,24 %, а с увеличением затрат овеществлённого труда на 1 % объём производства увеличится на 2,67 %.

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Найти области определения функций двух переменных.

$$\mathbf{8.3.1.1} \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \quad \mathbf{8.3.1.2} \quad z = \arccos(x/y). \quad \mathbf{8.3.1.3} \quad z = \ln(x - y).$$

8.3.2 Вычислить пределы

$$\mathbf{8.3.2.1} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + y^2)^{\frac{4x^2 + x}{xy^2}}. \quad \mathbf{8.3.2.2} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}. \quad \mathbf{8.3.2.3} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy^2 - 4x}{x}.$$

8.3.3 Найти частные производные первого и второго порядков функций, заданных в задачах 8.3.3.1 – 8.3.3.6. В задаче 8.3.3.1 найти значения частных производных в точке $M_0(3;2)$.

$$\mathbf{8.3.3.1} \quad z = x^4 + 2y^4 - x^5y^5. \quad \mathbf{8.3.3.2} \quad z = xy - \frac{y}{x}. \quad \mathbf{8.3.3.3} \quad z = e^{2x} \cos 5x.$$

$$\mathbf{8.3.3.4} \quad z = \ln(x^2 + y^2) \quad \mathbf{8.3.3.5} \quad z = \cos(x^2y^2) \quad \mathbf{8.3.3.6} \quad z = x^y$$

8.3.4 Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = x \sin(ax + by)$.

8.3.5 Показать, что $y \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(x^2 + y^2)$.

8.3.6 Имеется производственная функция $z = 3x^4 - x^3y^2 + 5y^2$, где x – затраты живого труда, а y – затраты овеществлённого труда. Найдите частные коэффициенты эластичности выпуска продукции по заданным факторам при значениях $x = 2$, $y = 3$. Дайте экономическую интерпретацию полученных результатов.

8.3.7 Для производственной функции Кобба-Дугласа $z = 1,4x^{0,36}y^{0,02}$ определите коэффициенты эластичности. Дайте экономическую интерпретацию полученных результатов.

8.3.8 Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа $z = 6000\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$. Найдите среднюю и предельную производительности труда, среднюю и предельную фондоотдачи, эластичности по труду и фондам.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Найти частные производные первого и второго порядков для функции $z = f(x, y)$. Пусть функция $z = f(x, y)$ является производственной функцией от затрат живого труда x и затрат овеществлённого труда y . Найти частные коэффициенты эластичности выпуска продукции при значениях $x = 2$, $y = 3$.

- | | | | | | |
|-----------------|----------------------------|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------|
| 8.4.1.1 | $z = x^5 - x^3y^4 + y^6$. | 8.4.1.2 | $z = x - x^3y^4 + y^6$. | 8.4.1.3 | $z = x^5 - xy^4$. |
| 8.4.1.4 | $z = x^6 + x^7y^5 - y^4$. | 8.4.1.5 | $z = x^5 + x^2y^3 - y$. | 8.4.1.6 | $z = x^9 - x^3y$. |
| 8.4.1.7 | $z = x^4 - x^3y^2 + y^3$. | 8.4.1.8 | $z = x + x^4y^3 + y^7$. | 8.4.1.9 | $z = x^6 + x^3y$. |
| 8.4.1.10 | $z = x^4 + x^6y^5 - y^2$. | 8.4.1.11 | $z = x - xy^5 + y^4$. | 8.4.1.12 | $z = xy^3 + y^4$. |
| 8.4.1.13 | $z = x^3 - x^2y^3 + y^4$. | 8.4.1.14 | $z = x^7 - x^3y^2 - y$. | 8.4.1.15 | $z = x^5 - x^3y$. |
| 8.4.1.16 | $z = x^6 + x^5y^2 + y^5$. | 8.4.1.17 | $z = x - x^2y^3 + y^5$. | 8.4.1.18 | $z = x^2y + y^3$. |
| 8.4.1.19 | $z = x^2 - x^2y^3 + y^4$. | 8.4.1.20 | $z = x^4 + x^5y^2 + y$. | 8.4.1.21 | $z = xy^5 - y^3$. |
| 8.4.1.22 | $z = x^4 + x^6y^3 - y^4$. | 8.4.1.23 | $z = x - x^3y^4 + y^5$. | 8.4.1.24 | $z = x^2 + xy^7$. |
| 8.4.1.25 | $z = x^4 - x^5y^5 + y^4$. | 8.4.1.26 | $z = x^4 + x^5y^2 - y$. | 8.4.1.27 | $z = 4x^4 + y^5$. |
| 8.4.1.28 | $z = x^6 + x^5y^5 + y^2$. | 8.4.1.29 | $z = x + x^5y^6 + y^4$. | 8.4.1.30 | $z = xy^3 + y^2$. |

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через функцию $f(x, y)$. Тогда

$$f'_x(x, y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}, \quad f'_y(x, y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}.$$

По формуле (9.1.1.2) получаем $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}$.

Дифференцируем вторично, учитывая, что y есть функция от переменной x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{y - x\left(-\frac{y}{x}\right)}{x^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

9.2.2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + 3z^3 - 4xyz - 3 = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через функцию $F(x, y, z)$.

Тогда $F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 4yz$, $F'_y(x, y, z) = 6y^2 - 4xz$, $F'_z(x, y, z) = 9z^2 - 4xy$.

По формуле (9.1.1.2) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{4yz - 3x^2}{9z^2 - 4xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{4xz - 6y^2}{9z^2 - 4xy}.$$

9.2.3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, 2, 5)$.

Решение. Находим частные функции в заданной точке $M_0(1, 2, 5)$: $z'_x(1, 2) = 2x|_{x=1} = 2$, $z'_y(1, 2) = 2y|_{y=2} = 4$. По формуле (9.1.1.5) уравнение

касательной плоскости имеет вид $z - 5 = 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2)$ или $2x + 4y - z - 5 = 0$

. По формуле (9.1.1.6) находим уравнение нормали: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

9.2.4 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке $M_0(2, 3, 6)$.

Решение. Обозначим через $F(x, y, z)$ левую часть уравнения сферы. Находим значения частных производных функции $F(x, y, z)$ в точке $M_0(2, 3, 6)$:

$$F'_x(M_0) = 2x|_{x=2, y=3, z=6} = 4, \quad F'_y(M_0) = 2y|_{x=2, y=3, z=6} = 6, \quad F'_z(M_0) = 2z|_{x=2, y=3, z=6} = 12.$$

По формуле (9.1.1.3) уравнение касательной плоскости имеет вид $4 \cdot (x - 2) + 6 \cdot (y - 3) + 12 \cdot (z - 6) = 0$ или $2x + 3y + 6z - 49 = 0$. По формуле (9.1.1.4)

находим уравнение нормали: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-6}{6}$.

9.2.5 Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = y^3 e^{2x}$.

Решение. Найдём частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^3 e^{2x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4y^3 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y^2 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y e^{2x}.$$

По формулам (9.1.2.1) и (9.1.2.3) имеем

$$dz = 2y^3 e^{2x} dx + 3y^2 e^{2x} dy, \quad d^2 z = 4y^3 e^{2x} dx^2 + 12y^2 e^{2x} dx dy + 6y e^{2x} dy^2.$$

9.2.6 Вычислить приближённо $\sqrt{(3,97)^2 + (3,02)^2}$.

Решение. Заданное число будем рассматривать как значение функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, при значениях $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, если $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = -0,03$, $\Delta y = 0,02$. Имеем

$$f(4,3) = 5, \quad \Delta f(x, y) \approx df(x, y) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \Delta f(x_0, y_0) = \frac{-4 \cdot 0,03 + 3 \cdot 0,02}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -0,012$$

Следовательно, $\sqrt{(3,97)^2 + (3,02)^2} \approx 5 - 0,012 = 4,988$.

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2 y}{dx^2}$, если $x + y - e^{y-x} = 0$.

9.3.2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^4 - 3y^2 + 2z^3 - 5xyz + 7 = 0$.

9.3.3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin x \cos y$ в точке $M_0(\pi/4, \pi/4, 1/2)$.

9.3.4 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсоиду $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$ в точке $M_0(3, 2, 3\sqrt{2}/2)$.

9.3.5 Найти дифференциалы первого и второго порядков для заданных функций:

а) $z = y^3 - 2x^2 y^4 + x^4$; б) $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$; в) $z = x \ln \frac{y}{x}$.

9.3.6 Используя понятие полного дифференциала, вычислить приближённо значения числовых выражений: а) $\sqrt{(1,05)^3 + (1,96)^3}$; б) $\sin 32^\circ \cos 59^\circ$.

9.3.7 При изменении цены на продукцию с 20 до 18 денежных единиц и уменьшении объёмов продаж с 50 до 46 единиц продукции найдите изменение выручки предприятия при условии, что выручка предприятия вычисляется по формуле $Y = p^2 v^3$, где p – цена единицы продукции, v – объём продаж.

9.3.8 Производственная деятельность предприятия описывается производственной функцией Кобба-Дугласа $z = 5\sqrt{x}\sqrt{y}$. Определите, как изменится объём производства z , если производственные факторы возрастут на 15 % по сравнению с начальными значениями $x_0 = 4$, $y_0 = 64$. Найти первоначальный и планируемый объём производства.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Используя понятие полного дифференциала вычислить приближённое значение заданного числового выражения. Найти дифференциалы первого и второго порядка для функции $z = f(x, y)$, которую надо составить для вычисления значения данного числового выражения. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$, которая была выбрана для вычисления значения функции, в точке $P_0(x_0, y_0)$.

- | | | | | | |
|-----------------|---|-----------------|--|-----------------|---|
| 9.4.1.1 | $\sqrt{(2,9)^2 + (4,1)^2}$. | 9.4.1.2 | $\sin 28^\circ \cos 59^\circ$. | 9.4.1.3 | $\sqrt{(1,1)^3 + (1,9)^3}$. |
| 9.4.1.4 | $3,01^{4,98}$. | 9.4.1.5 | $\ln(1,02 \cdot 0,98)$. | 9.4.1.6 | $e^{1,03^2 + 2,99^2}$. |
| 9.4.1.7 | $\cos 58^\circ \sin 29^\circ$. | 9.4.1.8 | $\operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{ctg} 47^\circ$. | 9.4.1.9 | $(2,03)^3 (3,98)^2$. |
| 9.4.1.10 | $(3,05)^3 + (6,98)^2$. | 9.4.1.11 | $\sqrt[3]{(0,9)^3 + (2,2)^3}$. | 9.4.1.12 | $(5,05)^3 - (1,9)^4$. |
| 9.4.1.13 | $\operatorname{arctg}(0,96 \cdot 1,02)$. | 9.4.1.14 | $4,99^{-3,02}$. | 9.4.1.15 | $\operatorname{ch} 0,1 \cdot \operatorname{sh} 0,2$. |
| 9.4.1.16 | $\sqrt{(6,1)^2 + (7,9)^2}$. | 9.4.1.17 | $\sin 32^\circ \cos 55^\circ$. | 9.4.1.18 | $\sqrt{(0,8)^3 + (1,8)^3}$. |
| 9.4.1.19 | $1,96^{5,04}$. | 9.4.1.20 | $\ln(1,03 \cdot 0,97)$. | 9.4.1.21 | $e^{1,04^2 + 2,96^2}$. |
| 9.4.1.22 | $\cos 56^\circ \sin 31^\circ$. | 9.4.1.23 | $\operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{ctg} 46^\circ$. | 9.4.1.24 | $(3,04)^3 (5,97)^2$. |
| 9.4.1.25 | $(4,03)^3 + (2,95)^2$. | 9.4.1.26 | $\sqrt[3]{(0,8)^3 + (2,1)^3}$. | 9.4.1.27 | $(6,2)^4 - (2,9)^4$. |
| 9.4.1.28 | $\operatorname{arctg}(0,98 \cdot 1,01)$. | 9.4.1.29 | $3,95^{-3,03}$. | 9.4.1.30 | $\operatorname{ch} 0,2 \cdot \operatorname{sh} 0,1$. |

ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Находим частные производные первого порядка и составляем систему $z'_x = 3x^2 - 3y = 0$, $z'_y = 3y^2 - 3x = 0$. Решая полученную систему, находим две стационарные точки $M_0(0,0)$ и $M_1(1,1)$. Найдём частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{yy} = 6y$. Составляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \text{ для каждой стационарной точки.}$$

Для точки $M_0(0,0)$ определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$, следовательно, в этой точке экстремума нет. Для точки $M_1(1,1)$ определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$, следовательно, в этой точке экстремум есть. Так как, $A = 6 > 0$, то в точке M_1 функция достигает минимума, причём $z_{\min} = z(1,1) = -1$.

10.2.2 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны 6 и 9 условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описываются функцией $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При каких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия.

Решение. Согласно формуле (10.1.1) прибыль предприятия будет выражаться функцией $\Pi(x, y) = 6x + 9y - x^2 - xy - y^2$. Так как в данном случае частные производные от функции прибыли всегда существуют, то для нахождения стационарных точек получаем систему уравнений: $\Pi'_x = 6 - 2x - y = 0$, $\Pi'_y = 9 - x - 2y = 0$. Решением этой системы является точка $P_0(1; 4)$.

Находим частные производные второго порядка от функции прибыли в стационарной точке: $A = \Pi''_{xx}(1, 4) = -2$, $B = \Pi''_{xy}(1, 4) = -1$, $C = \Pi''_{yy}(1, 4) = -2$.

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ и $A = -2 < 0$, то найденная точка $P_0(1; 4)$ является точкой максимума функции прибыли $\Pi(x, y)$, а максимальная прибыль предприятия равна $\Pi_{\max} = \Pi(1, 4) = 6 \cdot 1 + 9 \cdot 4 - 1^2 - 1 \cdot 4 - 4^2 = 21 \text{ у. е.}$

10.2.3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в замкнутой области G , ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Решение. Находим стационарные точки, которые принадлежат области G , из системы: $z'_x = 2x + 2y - 4 = 0$, $z'_y = 2y + 8 = 0$. Стационарная точка $P_0(6, -4) \notin G$. Исследуем функцию на границе области.

На границе области G , заданной прямой $x = 0$, функция z принимает вид $z = 8y$, причём $y \in [0, 6]$. $z' = 8 \neq 0$, $z(0, 6) = 8 \cdot 6 = 48$, $z(0, 0) = 8 \cdot 0 = 0$.

На границе области G , заданной прямой $y = 0$, функция z принимает вид $z = x^2 - 4x$, причём $x \in [0, 6]$. $z' = 2x - 4 = 0$, $x = 2 \in [0, 6]$, $z(2, 0) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$, $z(0, 0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$, $z(6, 0) = 6^2 - 4 \cdot 6 = 12$.

На границе области G , заданной прямой $y = 6 - x$, функция z принимает вид $z = -x^2 + 48$, причём $x \in [0, 6]$. $z' = -2x = 0$, $x = 0 \in [0, 6]$, $z(0, 6) = -0^2 + 48 = 48$, $z(6, 0) = -6^2 + 48 = 12$.

Среди полученных значений функции z выбираем наибольшее и наименьшее значения: $\max_G z = z(0, 6) = 48$, $\min_G z = z(2, 0) = -4$.

10.2.4 Найти условные экстремумы функции $z = 5 - 3x - 4y$, при уравнении связи $x^2 + y^2 = 25$.

Решение: на первом шаге нужно представить уравнение связи в виде $\varphi(x, y) = 0$ и составить **функцию Лагранжа**:

$L = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$, где λ – так называемый множитель Лагранжа.

В нашем случае $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0$ и:

$$L = 5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

Алгоритм нахождения условных экстремумов весьма похож на схему отыскания «обычных» **экстремумов**. Найдём **частные производные** функции Лагранжа, при этом с «лямбдой» следует обращаться, как с константой:

$$L'_x = (5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25))'_x = 0 - 3 - 0 + \lambda(2x + 0 - 0) = -3 + 2\lambda x$$

$$L'_y = (5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25))'_y = 0 - 0 - 4 + \lambda(0 + 2y - 0) = -4 + 2\lambda y$$

Составим и решим следующую систему:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + 2\lambda x = 0 \\ -4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

Клубок распутывается стандартно:

из первого уравнения выразим $2\lambda x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2\lambda}$;

из второго уравнения выразим $2\lambda y = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{\lambda}$.

Подставим $x = \frac{3}{2\lambda}, y = \frac{2}{\lambda}$ в уравнение связи и проведём упрощения:

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 25 = 0$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 25$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{16}{4\lambda^2} = 25$$

$$\frac{25}{4\lambda^2} = 25$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}$$

В результате получаем две стационарные точки. Если $\lambda = -\frac{1}{2}$, то:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -3 \\ y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 \end{cases} \Rightarrow M_1(-3, -4)$$

если $\lambda = \frac{1}{2}$, то:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3 \\ y = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \end{cases} \Rightarrow M_2(3, 4)$$

Проверим выполнение достаточного условия экстремума для найденных стационарных точек.

Найдём **частные производные второго порядка**:

$$L''_{xx} = (-3 + 2\lambda x)'_x = 2\lambda, \quad L''_{xy} = (-3 + 2\lambda x)'_y = 0, \quad L''_{yy} = (-4 + 2\lambda y)'_y = 2\lambda$$

Продифференцируем по «икс» и по «игрек» уравнение связи:

$$\phi'_x = (x^2 + y^2 - 25)'_x = 2x$$

$$\phi'_y = (x^2 + y^2 - 25)'_y = 2y$$

и составим следующую **симметричную матрицу**:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \phi'_x & \phi'_y \\ \phi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \phi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Если в стационарной точке $|A| < 0$, то функция достигает там минимума, если $|A| > 0$ – то максимума.

Запишем матрицу для значения $\lambda = -\frac{1}{2}$ и соответствующей точки $M_1(-3, -4)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -8 \\ -6 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислим её **определитель**:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -8 \\ -6 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -8 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -8(0-8) - (0-36) = 64 + 36 = 100 > 0, \text{ таким образом,}$$

функция имеет максимум в точке $M_1(-3; -4)$.

Аналогично для значения $\lambda = \frac{1}{2}$ и точки $M_2(3; 4)$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 8(0-8) + (0-36) = -64 - 36 = -100 < 0, \text{ таким образом, функция}$$

имеет минимум в точке $M_2(3; 4)$.

Ответ: при условии $x^2 + y^2 = 25$:

$$z_{\min} = z(3; 4) = -20, \quad z_{\max} = z(-3; -4) = 30$$

10.2.5 Каковы должны быть размеры консервной банки цилиндрической формы, чтобы на её изготовление пошло наименьшее количество материала, если объём банки равен 500 см^3 .

Решение: рассмотрим переменный радиус основания r , переменную высоту h и составим функцию площади полной поверхности банки:

$$s(r; h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (\text{площадь двух крышек} + \text{площадь боковой поверхности})$$

Требуется найти минимум этой функции, при условии, что объём банки равен $V = \pi r^2 h = 500$. Таким образом, функция Лагранжа получается прямо из словесной формулировки задачи!

$$L = 2\pi r^2 + 2\pi r h + \lambda(\pi r^2 h - 500)$$

Найдём частные производные по «эр» и по «аш»:

$$L'_r = (2\pi r^2 + 2\pi r h + \lambda(\pi r^2 h - 500))'_r = 2\pi \cdot 2r + 2\pi h + \lambda(\pi \cdot 2rh - 0) = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi \lambda r h$$

$$L'_h = (2\pi r^2 + 2\pi r h + \lambda(\pi r^2 h - 500))'_h = 0 + 2\pi r + \lambda(\pi r^2 - 0) = 2\pi r + \lambda \pi r^2$$

Составим и решим стандартную систему, при этом первое уравнение сразу сокращаем на 2π , а второе – на «пи»:

$$\begin{cases} L'_r = 0 \\ L'_h = 0 \\ V(r; h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4r + 2h + \lambda r h = 0 \\ 2r + \lambda r^2 = 0 \\ \pi r^2 h - 500 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r + h + \lambda r h = 0 \\ 2r + \lambda r^2 = 0 \\ \pi r^2 h - 500 = 0 \end{cases}$$

Удобнее начать со второго уравнения:

$$r \cdot (2 + \lambda r) = 0$$

Нулевой радиус $r = 0$ не удовлетворяет геометрическому смыслу задачи и поэтому для исследования остаётся 2-й множитель, из которого выражаем:

$$\lambda r = -2 \Rightarrow r = -\frac{2}{\lambda} \text{ – подставим в 1-е уравнение:}$$

$$2r + h + \lambda \cdot \left(-\frac{2}{\lambda}\right) \cdot h = 0$$

$$2r + h - 2h = 0$$

$$2r - h = 0$$

$$2r - h = 0$$

В результате получаем, что высота оптимальной банки должна быть в 2 раза больше радиуса основания:

$$h = 2r$$

Подставим $h = 2r$ в уравнение связи:

$$\pi r^2 \cdot 2r = 500$$

$$r^3 = \frac{250}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \text{ см}$$

$$h = 2r = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \text{ см}$$

Проверим выполнение достаточного условия экстремума для найденных стационарных точек.

$$L''_{rr} = (4\pi r + 2\pi h + 2\pi r h)'_r = 4\pi + 0 + 2\pi h = 4\pi + 2\pi h$$

$$L''_{rk} = (4\pi r + 2\pi h + 2\pi r h)'_k = 0 + 2\pi + 2\pi r = 2\pi + 2\pi r$$

$$L''_{kk} = (2\pi r + \lambda \pi r^2)'_k = 0 + 0 = 0$$

Продифференцируем по «икс» и по «игрек» уравнение связи:

$$\varphi'_r = (\pi r^2 h - 500)'_r = 2\pi r h$$

$$\varphi'_k = (\pi r^2 h - 500)'_k = \pi r^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_r & \varphi'_k \\ \varphi'_r & L''_{rr} & L''_{rk} \\ \varphi'_k & L''_{rk} & L''_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi r h & \pi r^2 \\ 2\pi r h & 4\pi + 2\pi h & 2\pi + 2\pi r \\ \pi r^2 & 2\pi + 2\pi r & 0 \end{pmatrix}$$

$$h = 2r, \lambda = -\frac{2}{r}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4\pi r^2 & \pi r^2 \\ 4\pi r^2 & -4\pi & -2\pi \\ \pi r^2 & -2\pi & 0 \end{vmatrix} = -12\pi^3 r^4 < 0,$$

$s(r; h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ достигает минимума в точке $M\left(5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}; 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right)$ (при заданном объеме консервной банки).

Ответ: радиус основания оптимальной банки: $r = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \text{ см} \approx 4,3 \text{ см}$, её высота:

$$h = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \text{ см} \approx 8,6 \text{ см}$$

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 111x - 36y$.

10.3.2 Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - x\sqrt{y} - 9x + y + 5$.

10.3.3 Исследовать на экстремум функцию $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ($x > 0$,

$y > 0$).

10.3.4 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны 140 и 200 условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описывается функцией $C(x, y) = 3x^2 + 4xy + 4y^2$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При каких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия.

10.3.5 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в замкнутой области G , ограниченной прямыми $x = 3$, $y = 0$, $y - x = 1$.

10.3.6 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области G , ограниченной прямой $y = 2$ и параболой $2y = x^2$.

10.3.7 Найти условный экстремум функции $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

10.3.8 Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при условии $x + y + 3 = 0$.

10.3.9 При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?

10.3.10 При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна S , имеет наибольшую вместимость?

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны m и n условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описываются функцией $C(x, y)$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При каких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = C(x, y)$ в замкнутой области G , ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $mx + ny = mn$.

10.4.1.1 $C(x, y) = x^2 - 5xy + 9y^2$, $m = 10$, $n = 30$.

10.4.1.2 $C(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2$, $m = 50$, $n = 80$.

10.4.1.3 $C(x, y) = 4x^2 - 2xy + 2y^2$, $m = 20$, $n = 100$.

10.4.1.4 $C(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$, $m = 220$, $n = 110$.

10.4.1.5 $C(x, y) = x^2 - 3xy + 7y^2$, $m = 50$, $n = 20$.

10.4.1.6 $C(x, y) = 6x^2 + 2xy + y^2$, $m = 220$, $n = 120$.

- 10.4.1.7** $C(x, y) = 2x^2 - 5xy + 13y^2, m = 250, n = 10.$
- 10.4.1.8** $C(x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2, m = 32, n = 38.$
- 10.4.1.9** $C(x, y) = 9x^2 - 5xy + 4y^2, m = 34, n = 17.$
- 10.4.1.10** $C(x, y) = x^2 + 2xy + y^2, m = 28, n = 46.$
- 10.4.1.11** $C(x, y) = 8x^2 - 3xy + 5y^2, m = 18, n = 64.$
- 10.4.1.12** $C(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2, m = 16, n = 28.$
- 10.4.1.13** $C(x, y) = 7x^2 - 3xy + 4y^2, m = 60, n = 46.$
- 10.4.1.14** $C(x, y) = 8x^2 + 2xy + 2y^2, m = 40, n = 20.$
- 10.4.1.15** $C(x, y) = 2x^2 - 7xy + 9y^2, m = 2, n = 6.$
- 10.4.1.16** $C(x, y) = 6x^2 + 5xy + 3y^2, m = 170, n = 110.$
- 10.4.1.17** $C(x, y) = 4x^2 - 3xy + 9y^2, m = 12, n = 126.$
- 10.4.1.18** $C(x, y) = 3x^2 + xy + 3y^2, m = 130, n = 80.$
- 10.4.1.19** $C(x, y) = 5x^2 - 5xy + 3y^2, m = 5, n = 22.$
- 10.4.1.20** $C(x, y) = 4x^2 + 2xy + 7y^2, m = 180, n = 180.$
- 10.4.1.21** $C(x, y) = 9x^2 - 4xy + 2y^2, m = 32, n = 4.$
- 10.4.1.22** $C(x, y) = 8x^2 + 6xy + 3y^2, m = 440, n = 240.$
- 10.4.1.23** $C(x, y) = 2x^2 - 7xy + 8y^2, m = 10, n = 20.$
- 10.4.1.24** $C(x, y) = 6x^2 + 2xy + 5y^2, m = 380, n = 160.$
- 10.4.1.25** $C(x, y) = 3x^2 - 6xy + 7y^2, m = 6, n = 26.$
- 10.4.1.26** $C(x, y) = 7x^2 + 4xy + 5y^2, m = 74, n = 92.$
- 10.4.1.27** $C(x, y) = x^2 - 3xy + 8y^2, m = 4, n = 17.$
- 10.4.1.28** $C(x, y) = 3x^2 + xy + y^2, m = 75, n = 40.$
- 10.4.1.29** $C(x, y) = 4x^2 - xy + 8y^2, m = 30, n = 155.$
- 10.4.1.30** $C(x, y) = x^2 + xy + y^2, m = 110, n = 130.$