

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В дифференциальном и интегральном исчислении функции нескольких переменных используется понятие n -мерного арифметического пространства.

Определение 8.1.1 Множество всех упорядоченных наборов $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ действительных чисел $x_1; x_2; \dots; x_n$ называется n -мерным арифметическим точечным пространством $\mathbf{R}^n$, а его элементы – точками пространства $\mathbf{R}^n$. Числа $x_1; x_2; \dots; x_n$ называются координатами точки $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Определение 8.1.2 Расстоянием ρ между точками $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $P'(x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$ n -мерного пространства называется число

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}. \quad (8.1.1)$$

Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – произвольное множество точек n -мерного арифметического пространства. Если каждой точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое, вполне определённое действительное число $f(P) = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ от n переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$. Множество D называется областью определения, а множество $E = \{u \in \mathbf{R} \mid u = f(P), P \in D\}$ – областью значений функции $u = f(P)$.

В частном случае $n=2$ функция двух переменных $z = f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости трёхмерного геометрического пространства с фиксированной системой координат $Oxyz$. Графиком этой функции называется множество точек $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^n \mid u = f(x, y)\}$.

Определение 8.1.3 Число A называется *пределом функции* $u = f(P)$ при стремлении точки $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ к точке $P_0(a_1; a_2; \dots; a_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

следует

$$|f(x_1; x_2; \dots; x_n) - A| < \varepsilon.$$

При этом записывают

$$A = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Определение 8.1.4 Функция $u = f(P)$ называется *непрерывной* в точке P_0 , если выполняются следующие три условия:

- 1) функция $f(P)$ определена в точке P_0 ;
- 2) существует $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$;
- 3) $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области. Если в точке P_0 хотя бы одно из условий 1) – 3) нарушено, то точка P_0 называется точкой разрыва функции $u = f(P)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и так далее.

Рассмотрим произвольную фиксированную точку $P(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)$ из области определения функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$. Если придать переменной x_i приращение Δx_i , то функция также получит приращение $\Delta_{x_i} u = f(x_1; \dots; x_i + \Delta x_i; \dots; x_n) - f(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)$.

Определение 8.1.5 Частной производной функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$ в произвольно фиксированной точке $P(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)$ по переменной x_i называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x_i} u$ к соответствующему приращению аргумента Δx_i , при стремлении последнего к нулю, то есть

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1; \dots; x_i + \Delta x_i; \dots; x_n) - f(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)}{\Delta x_i}.$$

Обозначение: $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x_1; \dots; x_n)$.

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме переменной x_i , считаются постоянными величинами.

Частными производными второго порядка функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка. Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''_{x_i x_i}(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n).$$

Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Результат многократного дифференцирования по различным переменным не зависит от очерёдности дифференцирования при условии, что возникающие при этом «смешанные» частные производные непрерывны.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$. Частные производные первого и второго порядка от этой функции имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Рассмотрим **применение частных производных**. Пусть дана производственная функция $z = f(x; y)$, показывающая зависимость объёма производства z от факторов производства x и y . Рассмотрим применение частных производных для описания различных экономических показателей.

Предельная производительность факторов производства:

$$p_x = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } p_y = \frac{\partial z}{\partial y},$$

где p_x и p_y – предельные производительности факторов x и y , соответственно.

Предельная норма замещения двух факторов производства:

$$n_{xy} = -\frac{p_y}{p_x} = -\frac{\partial z}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } n_{yx} = -\frac{p_x}{p_y} = -\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y},$$

где n_{xy} – предельная норма замещения фактора производства x фактором производства y ; n_{yx} – предельная норма замещения фактора производства y фактором производства x .

Частный коэффициент эластичности выпуска продукции по определённому фактору:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{z}{x} \text{ и } \varepsilon_y = \frac{\partial z}{\partial y} : \frac{z}{y},$$

где ε_x – эластичность объёма производства относительно фактора x ; ε_y – эластичность объёма производства относительно фактора y . Коэффициент эластичности приближённо показывает, на сколько процентов изменится объём производства при изменении одного фактора на 1 %, если второй фактор остаётся неизменным.

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть уравнение $f(x; y) = 0$, где f – дифференцируемая функция переменных x и y , определяет y как функцию от переменной x . Тогда первая производная этой неявной функции $y = y(x)$ в точке x определяется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x; y)}{f'_y(x; y)} \quad (9.1.1.1)$$

при условии $f'_y(x; y) \neq 0$. Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием формулы (9.1.1.1).

Пусть уравнение $F(x_1; \dots; x_n; u) = 0$, где F – дифференцируемая функция переменных $x_1, \dots, x_n, u$, определяет u как функцию от переменных $x_1, \dots, x_n$. Частные производные этой неявной функции $u = u(x_1; \dots; x_n)$ в точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определяются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{f'_{x_i}(x_1; \dots; x_n; u)}{f'_u(x_1; \dots; x_n; u)} \quad (i = \overline{1; n}) \quad (9.1.1.2)$$

при условии $f'_u(x_1; \dots; x_n; u) \neq 0$. Частные производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием формул (9.1.1.2).

Определение 9.1.1.1 Касательной плоскостью к поверхности в её точке P_0 (точка касания) называется плоскость, содержащая все касательные к кривым, проведённым на поверхности через эту точку.

Определение 9.1.1.2 Нормалью к поверхности в её точке P_0 называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

Уравнение нормали

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

В случае задания поверхности в явной форме $z = f(x, y)$, уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0), \quad (9.1.1.5)$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (9.1.1.6)$$

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Полным приращением функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ называется разность $\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2; \dots; x_n + \Delta x_n) - f(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Определение 9.1.2.1 Функция $u = f(P)$ называется дифференцируемой в точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$, если всюду в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$, $A_1, A_2, \dots, A_n$ – некоторые действительные числа, не зависящие от приращений аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Определение 9.1.2.2 Полным дифференциалом функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется главная линейная часть полного приращения функции в рассматриваемой точке, которая линейна относительно приращений аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, то есть выражение вида

$$du = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n.$$

Дифференциалы независимых переменных по определению принимаются равными их приращению ($dx_i = \Delta x_i, i = \overline{1; n}$), а значения действительных чисел A_i равны значению частных производных в рассматриваемой точке ($A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$).

Тогда для полного дифференциала функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ справедлива формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot dx_n. \quad (9.1.2.1)$$

Функции u и v подчиняются обычным правилам дифференцирования:

$$d(u + v) = du + dv,$$

$$d(uv) = vdu + u dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Полный дифференциал находит широкое применение в приближённых вычислениях. При достаточно малом значении $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ для дифференцируемой функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ имеет место приближённое равенство $\Delta u \approx du$. Следовательно, справедлива приближённая формула

$$f(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2; \dots; x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1; x_2; \dots; x_n) + df(x_1; x_2; \dots; x_n). \quad (9.1.2.2)$$

Определение 9.1.2.3 Дифференциалом второго порядка d^2u функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется дифференциал от её дифференциала первого порядка, рассматриваемого как функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ при фиксированных значениях $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$: $d^2u = d(du)$.

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка: $d^3u = d(d^2u)$, $d^4u = d(d^3u)$, ..., $d^k u = d(d^{k-1}u)$.

Дифференциал k -го порядка функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые переменные, выражается символической формулой

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k u. \quad (9.1.2.2)$$

Записанная формула формально раскрывается по биномиальному закону.

Например, в случае функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y для дифференциалов второго и третьего порядков справедливы формулы

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2, \quad (9.1.2.3)$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \quad (9.1.2.4)$$

Рассмотрим **применение дифференциала**. Рассмотрим производственную функцию Кобба-Дугласа $S = f(z, v)$, где S — стоимость выпускаемой продукции; z — затраты труда; v — объём произведённых фондов.

Зафиксируем текущее состояние предприятия, то есть объём основных фондов v и затраты трудовых ресурсов z . Тогда соответствующая стоимость

выпуска продукции составит $S = f(z, v)$. Полный дифференциал производственной функции находим по формуле

$$dS = \frac{\partial S}{\partial v} dv + \frac{\partial S}{\partial z} dz = S'_v dv + S'_z dz.$$

Исходя из экономического смысла частных производных, имеем, что S'_v – предельная производительность труда, а S'_z – предельная фондоотдача. Следовательно, $S'_v \Delta v$ – стоимость добавочной продукции, произведённой с использованием добавочного объёма фондов Δv ; $S'_z \Delta z$ – стоимость добавочной продукции, произведённой добавочными затратами труда Δz . При малом изменении затрат труда Δz и малом изменении объёмов фондов Δv изменение выпуска продукции $\Delta S = dS$, то есть $\Delta S = S'_v \Delta v + S'_z \Delta z$.

Предположим, выпуск S является постоянным, тогда полный дифференциал dS производственной функции тождественно равен нулю, то есть $dS = \frac{\partial S}{\partial v} dv + \frac{\partial S}{\partial z} dz = 0$. Следовательно, отношение

$-\frac{dz}{dv} = \frac{\partial S}{\partial z} : \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{p_z}{p_v} = n_{zv}$ является предельной нормой замещения основного капитала трудом. Таким образом, при постоянном выпуске и малых приращениях Δv и Δz получаем приближённое равенство: $n_{zv} = -\frac{dz}{dv} = \frac{\Delta z}{\Delta v}$.

Итак, предельная норма замещения показывает, на сколько единиц увеличатся затраты труда, если затраты основного капитала уменьшатся на одну единицу, при неизменном выпуске продукции.

ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Определение 10.1.1 Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ *локальный максимум (локальный минимум)*, если существует такая окрестность точки P_0 , что для всех точек $P(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(P_0) \geq f(P)$ ($f(P_0) \leq f(P)$).

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*.

Теорема 10.1.1 Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ локальный экстремум, то в этой точке частные производные равны нулю, то есть $\frac{\partial z(P_0)}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z(P_0)}{\partial y} = 0$.

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными*.

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$, причём эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все вторые частные производные непрерывны в точке P_0 . Введём обозначения:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Вычисляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда:

- 1) если $\Delta > 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум, а именно – максимум при значении $A < 0$ ($C < 0$) и минимум при значении $A > 0$ ($C > 0$);
- 2) если $\Delta < 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;
- 3) если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема и ограничена в замкнутой области, она достигает глобального экстремума (наибольшего и наименьшего значения) либо в стационарных точках, принадлежащих области, либо на границе области.

Рассмотрим применение локального экстремума, а именно задачу о прибыли от производства разных видов товаров.

Пусть x и y – количество товаров двух видов, их цены – соответственно p_1 и p_2 . Пусть затраты на производство этих товаров является дифференцируемой функцией издержек $C = C(x, y)$. Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi = \Pi(x, y) = p_1x + p_2y - C(x, y). \quad (10.1.1)$$

Максимум прибыли будем находить как локальный экстремум функции двух переменных $\Pi = \Pi(x, y)$ при значениях $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Найдём стационарные точки, решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = p_1 - \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} = p_2 - \frac{\partial C}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$p_1 = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad (10.1.2)$$

где $\frac{\partial C}{\partial x}$ – предельные издержки на производство x единиц продукции первого вида; $\frac{\partial C}{\partial y}$ – предельные издержки на производство y единиц продукции второго вида. Формулы (10.1.2) реализуют известное правило экономики: *предельная стоимость товара равна предельным затратам на производство этого товара.*