

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

МАТЕМАТИКА

Линейные операторы векторных пространств.

Введение в математический анализ.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Практикум для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)»

ВИТЕБСК
2017

Математика. Линейные операторы векторных пространств. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Практикум для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)».

Витебск, Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2017.

Составители: ст. преп. Коваленко А. В.,
доц., д. т. н. Джежора А. А.,
доц., к. ф.-м. н. Денисов В. С.,
ст. преп. Дмитриев А. П.,
ст. преп. Завацкий Ю. А.,
доц., к. ф.-м. н. Загурский В. Н.

Практикум содержит основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену по пяти разделам курса «Математика» для студентов специальностей 1-36 01 01 и 1-53 01 01-01 и курса «Высшая математика» для студентов специальности 1-40 05 01-01: линейные пространства, комплексные числа, теория пределов, непрерывность функций и дифференциальное исчисление функции одной переменной. Практикум предназначен для проведения практических занятий у студентов первого курса факультета информационных технологий и робототехники.

Одобрено кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ»
29 марта 2017 г., протокол № 8.

Рецензент: доц., к.ф.-м.н. Дунина Е. Б.

Редактор: доц., к.ф.-м.н. Никонова Т. В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ» 28 апреля, протокол № 7.

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е. А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати _____ Формат _____ Уч.-изд. лист. _____

Печать ризографическая. Тираж _____ экз. Заказ № _____

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

210035, Витебск, Московский проспект, 72.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Перечень вопросов учебной программы по курсу «Математика» и «Высшая математика» для специальностей 1-36 01 01, 1-53 01 01-01, 1-40 05 01-01 (первый курс, первый семестр)	5
Практикум по решению задач.....	9
1 Линейные (векторные) пространства (практическое занятие 18).....	9
2 Линейные операторы векторного пространства (практическое занятие 19).....	18
3 Квадратичные формы (практическое занятие 20)	31
4 Комплексные числа (практические занятия 21)	39
5 Числовая последовательность (практическое занятие 22)	44
6 Предел функции (практические занятия 23–24)	52
7 Непрерывность функций (практическое занятие 25)	65
8 Дифференциальное исчисление функции одной переменной (практическое занятие 26)	71
9 Дифференциал функции (практическое занятие 27)	78
10 Правило Лопиталя(практическое занятие 28)	84
11 Формула Тейлора (практическое занятие 29)	91
12 Применение дифференциального исчисления к исследованию функции одной переменной (практические занятия 30–32)	98
13 Дифференциальное исчисление векторных функций (практические занятия 33–34)	112
Литература	120

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплин «Математика» и «Высшая математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих инженеров.

Данные методические материалы предназначены для студентов факультета информационных технологий и робототехники. В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена, содержание и тематика практических занятий по указанным дисциплинам. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Математика» и «Высшая математика» для студентов первого года обучения специальностей: 1-36 01 01, 1-53 01 01-01, 1-40 05 01-01.

В методических указаниях рассмотрены пять разделов дисциплин «Математика» и «Высшая математика»: линейные операторы векторных пространств, комплексные числа, теория пределов числовых последовательностей и функций, непрерывность функций и дифференциальное исчисление функции одной переменной. Согласно учебной программе курсов «Математика» и «Высшая математика» для студентов механико-технологических специальностей все эти разделы студенты должны изучить на 17 аудиторных занятиях. Каждое практическое занятие представляет собой методический материал для его проведения, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия. В начале каждого практического занятия приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнению домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование занятий, а также их структура построены в соответствии с учебной программой указанных дисциплин для студентов механико-технологических специальностей, а также могут применяться на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

Предложенные методические указания также помогут студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена может подразумевать электронный контроль знаний.

**ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ
«МАТЕМАТИКА» И «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 1-36 01 01, 1-53 01 01-01, 1-40 05 01-01
(ПЕРВЫЙ КУРС, ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР)**

1. Высказывания. Логические операции над высказываниями.
2. Булевы функции.
3. Множества. Пустое и универсальное множества. Подмножества.
4. Операции над множествами.
5. Свойства операций над множествами.
6. Векторы и линейные операции над ними.
7. Понятие линейного пространства. Примеры линейных пространств.
8. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов линейного пространства.
9. Линейная зависимость и линейная независимость системы геометрических векторов.
10. Размерность и базис линейного пространства.
11. Проекция геометрического вектора на ось, её свойства.
12. Скалярное произведение векторов и его свойства.
13. Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе.
14. Векторное произведение векторов и его свойства.
15. Вычисление векторного и смешанного произведения в ортонормированном базисе.
16. Смешанное произведение векторов и его свойства.
17. Основные задачи аналитической геометрии (расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, площадь треугольника, объём пирамиды).
18. Уравнение прямой, проходящей через точку, с заданным нормальным вектором. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование.
19. Векторно-параметрическое, параметрическое, каноническое уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две точки, в отрезках. Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом.
20. Отклонение и расстояние точки от прямой. Нормальное уравнение прямой на плоскости.
21. Взаимное расположение прямых на плоскости.
22. Уравнение плоскости, проходящей через точку, с заданным нормальным вектором. Общее уравнение плоскости в пространстве и его исследование.

23. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости в отрезках.
24. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.
25. Отклонение и расстояние точки от плоскости. Нормальное уравнение плоскости в пространстве.
26. Векторно-параметрическое, параметрическое, каноническое уравнение прямой в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
27. Общее уравнение прямой в пространстве. Приведение общего уравнения прямой к каноническому виду.
28. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
29. Матрицы. Линейные операции над матрицами.
30. Определитель n -го порядка. Вычисление определителя второго и третьего порядка.
31. Свойства определителя.
32. Алгебраические дополнения и миноры элементов определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).
33. Обратная матрица. Теоремы существования и единственности обратной матрицы.
34. Общие понятия о системах линейных уравнений. Решение систем методом Гаусса.
35. Решение систем линейных уравнений посредством матричного исчисления и по формулам Крамера.
36. Ранг матрицы, его свойства. Теорема Кронекера – Капелли.
37. Исследование произвольных систем линейных уравнений.
38. Однородные системы линейных уравнений.
39. Евклидово пространство.
40. Матрица перехода от одного базиса к другому базису линейного пространства.
41. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому.
42. Линейный оператор векторного пространства. Матрица линейного оператора. Операции над линейными операторами. Образ и ядро линейного оператора.
43. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
44. Линии второго порядка. Парабола и её характеристики.
45. Эллипс и его характеристики.
46. Гипербола и её характеристики.

47. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.
48. Поверхности второго порядка.
49. Действительные числа. Модуль действительного числа.
50. Комплексные числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа и операции над комплексными числами в данной форме записи.
51. Комплексные числа. Тригонометрическая форма записи комплексного числа и операции над комплексными числами в данной форме записи.
52. Комплексные числа. Показательная форма записи комплексного числа и операции над комплексными числами в данной форме записи.
53. Числовые последовательности. Способы задания числовых последовательностей.
54. Многочлены и уравнения. Основная теорема алгебры.
55. Ограниченные и монотонные числовые последовательности.
56. Предел числовой последовательности и его свойства.
57. Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности и их свойства.
58. Правила предельного перехода для числовых последовательностей.
59. Предел монотонной последовательности. Второй замечательный предел.
60. Предел функции и его свойства.
61. Бесконечно малые функции и их свойства. Бесконечно большие функции и их свойства.
62. Правила предельного перехода для функций.
63. Замечательные пределы функций.
64. Различные определения непрерывности функции в точке. Классификация точек разрыва.
65. Производная функции. Теорема о связи дифференцируемой и непрерывной функции.
66. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали.
67. Производная степенной и показательной функции.
68. Производная тригонометрических функций.
69. Производная обратной функции. Производная обратных тригонометрических функций.
70. Производная обратной функции. Производная логарифмической функции.

71. Производная сложной функции. Производная гиперболических функций.
72. Основные правила дифференцирования.
73. Дифференциал функции. Его геометрический смысл и свойства.
74. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной неявно.
75. Производная функции, заданной параметрическим образом.
76. Производные высшего порядка. Механический смысл первой и второй производной.
77. Теорема Ролля и её геометрический смысл.
78. Теорема Лагранжа и её геометрический смысл.
79. Теоремы Коши и её геометрический смысл.
80. Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределенностей различных типов.
81. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в форме Пеано.
82. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в форме Лагранжа.
83. Монотонные функции. Необходимое и достаточное условие монотонности функции.
84. Локальный экстремум функций одной переменной. Необходимое условие локального экстремума.
85. Локальный экстремум функций одной переменной. Достаточные условия локального экстремума.
86. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
87. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточное условие выпуклости и вогнутости функции.
88. Точки перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условие существования точек перегиба.
89. Асимптоты графика функции. Необходимое и достаточное условие существования асимптот графика функции.
90. Схема полного исследования функции.
91. Вектор-функция скалярного аргумента. Годограф. Предел и непрерывность вектор-функции в точке.
92. Производная вектор-функции скалярного аргумента и ее свойства.
93. Векторное и параметрическое уравнение линии в пространстве. Уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ЛИНЕЙНЫЕ (ВЕКТОРНЫЕ) ПРОСТРАНСТВА (практическое занятие 18)

Содержание: линейное (векторное) пространство; базис и размерность векторного пространства; евклидовы пространства; неравенство Коши-Буняковского; угол между векторами; ортогональность векторов; матрица перехода от одного базиса к другому; преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 1.1.1 *Линейным (или векторным) пространством L* называется множество объектов или элементов произвольной математической природы, с введенными операциями сложения (если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$, то $\vec{x} \oplus \vec{y} \in L$) и умножения на действительное число (если $\forall \vec{x} \in L$ и $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha \odot \vec{x} \in L$), которое удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L, \vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x}$ (условие коммутативности сложения);
- 2) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L, \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}) = (\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z}$ (условие ассоциативности сложения);
- 3) $\forall \vec{x} \in L, \exists \vec{0} \in L, \vec{x} \oplus \vec{0} = \vec{x}$ (условие существования нулевого элемента);
- 4) $\forall \vec{x} \in L, \exists (-\vec{x}) \in L, \vec{x} \oplus (-\vec{x}) = \vec{0}$ (условие существования противоположного элемента);
- 5) $\forall \vec{x} \in L, 1 \odot \vec{x} = \vec{x}$;
- 6) $\forall \vec{x} \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{x} = \alpha \odot (\beta \odot \vec{x})$ (умножение на скаляр ассоциативно);
- 7) $\forall \vec{x} \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, (\alpha + \beta) \odot \vec{x} = \alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{x}$ (умножение дистрибутивно относительно сложения скаляров);
- 8) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L, \forall \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \alpha \odot \vec{x} \oplus \alpha \odot \vec{y}$ (умножение на скаляр дистрибутивно относительно сложения).

Объекты линейного пространства называются *элементами* этого пространства или *векторами*.

Определение 1.1.2 Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ линейного пространства L называется *линейно-зависимой*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, по крайней мере, одно из которых отлично от нуля ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$), что линейная комбинация этих векторов равна нулю $\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$. Если равенство нулю линейной комбинации выполняется только при нулевых коэффициентах ($\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$), то система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ называется *линейно-независимой*.

Вопрос о линейной независимости системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ решается с помощью *определителя Вронского (вронскиана)*:

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Теорема 1.1.1 Для того чтобы система функций была линейно независимой на интервале $(a; b)$, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля на этом интервале.

Определение 1.1.3 *Базисом* линейного пространства L , размерности n называется любая упорядоченная совокупность n линейно-независимых векторов этого пространства.

Определение 1.1.4. Число $n = \dim L$ называется *размерностью* линейного пространства L , если в этом пространстве существует система n линейно-независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ векторов является линейно-зависимой системой векторов.

Линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем определена операция скалярного произведения.

Примером евклидова пространства является линейное пространство геометрических векторов V^3 . В этом линейном пространстве хорошо известно определение скалярного произведения двух векторов, как произведения длин векторов на косинус угла между ними. В произвольном линейном пространстве операция скалярного произведения определяется аксиоматически.

Евклидово пространство размерности n обозначается E^n .

Определение 1.1.5 В евклидовом пространстве E скалярным произведением двух векторов называется соответствие, по которому каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E$ сопоставляется действительное число $(\vec{x}, \vec{y})$ или $\vec{x} \cdot \vec{y}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- 1⁰. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$.
- 2⁰. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall \alpha \in R, (\alpha \vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$.
- 3⁰. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E, (\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$.
- 4⁰. $\forall \vec{x} \in E, (\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^2 \geq 0; (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \leftrightarrow \vec{x} = 0$.

Рассмотрим $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ и $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ — два различных базиса L . Каждый из векторов базиса B' разложим по базису B : $\vec{e}'_k = t_{1k}\vec{e}_1 + \dots + t_{nk}\vec{e}_n$.

Определение 1.1.6 Матрицей перехода $T = T_{B \rightarrow B'}$ от базиса B к базису B' называется матрица, столбцы которой представляют координаты новых базисных векторов в старом базисе:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Основным свойством матрицы перехода является её не вырожденность.

Если $\vec{x}$ – любой вектор из линейного пространства L , а X X' – столбцы его координат в базисах B и B' соответственно, то имеет место равенство

$$X' = T^{-1} \cdot X. \quad (1.1.2)$$

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Рассмотрим множество R^n , элементы которого представляют упорядоченную совокупность n действительных чисел $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, то есть множество R^n имеет вид: $\{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid x_i \in R \wedge i = \overline{1; n}\}$. Над элементами множества R^n определены операции сложения векторов $\vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n)$ и умножения на действительное число $\alpha \odot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} = (\alpha \cdot x_1; \alpha \cdot x_2; \dots; \alpha \cdot x_n)$. Доказать, что пространство R^n является линейным пространством.

Решение. Операции сложения и умножения вектора на действительное число определены, так как $\vec{x} \oplus \vec{y} \in R^n$ и $\alpha \odot \vec{x} = (\alpha x_1; \alpha x_2; \dots; \alpha x_n) \in R^n$. Проверим выполнение аксиом векторного пространства.

$$1) \vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n) = (y_1 + x_1; y_2 + x_2; \dots; y_n + x_n) = \vec{y} \oplus \vec{x}.$$

$$2) \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}) = (x_1; x_2; \dots; x_n) \oplus (y_1 + z_1; y_2 + z_2; \dots; y_n + z_n) = (x_1 + (y_1 + z_1); x_2 + (y_2 + z_2); \dots; x_n + (y_n + z_n)) = ((x_1 + y_1) + z_1; \dots; (x_n + y_n) + z_n) = (\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z}.$$

3) в качестве нейтрального элемента выбираем нулевой вектор

$$\vec{0} = (0; 0; \dots; 0): \vec{x} \oplus \vec{0} = (x_1; \dots; x_n) + (0; \dots; 0) = (x_1 + 0; \dots; x_n + 0) = (x_1; \dots; x_n) = \vec{x}.$$

4) противоположным элементом к $\vec{x}$ является вектор $-\vec{x} = (-x_1; \dots; -x_n)$, так как $\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = (x_1; \dots; x_n) \oplus (-x_1; \dots; -x_n) = (x_1 - x_1; \dots; x_n - x_n) = (0; \dots; 0) = \vec{0}.$

$$5) 1 \odot \vec{x} = (1 \cdot x_1; 1 \cdot x_2; \dots; 1 \cdot x_n) = (x_1; x_2; \dots; x_n) = \vec{x}.$$

$$6) (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{x} = (\alpha \cdot \beta) \odot (x_1; \dots; x_n) = ((\alpha \cdot \beta) x_1; \dots; (\alpha \cdot \beta) x_n) = (\alpha \cdot (\beta \cdot x_1); \dots; \alpha \cdot (\beta \cdot x_n)) = \alpha \cdot (\beta x_1; \dots; \beta x_n) = \alpha \cdot (\beta \odot (x_1; \dots; x_n)) = \alpha \cdot (\beta \odot \vec{x})$$

$$7) (\alpha \oplus \beta) \odot \vec{x} = (\alpha + \beta) \odot (x_1; \dots; x_n) = ((\alpha + \beta) \cdot x_1; \dots; (\alpha + \beta) \cdot x_n) = (\alpha \cdot x_1; \dots; \alpha \cdot x_n) + (\beta \cdot x_1; \dots; \beta \cdot x_n) = \alpha \odot (x_1; \dots; x_n) + \beta \odot (x_1; \dots; x_n) = \alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{x}$$

$$8) \alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \alpha \odot (x_1 + y_1; \dots; x_n + y_n) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha y_1; \dots; \alpha \cdot x_n + \alpha y_n) = \alpha \cdot (x_1; \dots; x_n) + \alpha \cdot (y_1; \dots; y_n) = \alpha \cdot \vec{x} \oplus \alpha \cdot \vec{y}.$$

Все аксиомы векторного пространства выполнены. Следовательно, заданное множество $R^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid x_i \in R \wedge i = \overline{1; n}\}$ является векторным или линейным пространством.

1.2.2 На множестве положительных действительных чисел $R^+ = \{\bar{x} \mid \bar{x} = x \wedge x \in R \wedge x > 0\}$ определены операции сложения и умножения на действительное число: $\bar{x} \oplus \bar{y} = x \cdot y$, $\alpha \odot \bar{x} = x^\alpha$. Образуется ли векторное пространство заданное множество?

Решение. Операции сложения и умножения вектора на действительное число определены, так как $\bar{x} \oplus \bar{y} = x \cdot y > 0$ и $\alpha \odot \bar{x} = x^\alpha > 0$, то есть $\bar{x} \oplus \bar{y} \in R^+$, $\alpha \odot \bar{x} \in R^+$. Проверим выполнение аксиом векторного пространства.

$$1) \bar{x} \oplus \bar{y} = x \cdot y = y \cdot x = \bar{y} \oplus \bar{x};$$

$$2) \bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z}) = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = (\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z};$$

$$3) \text{ в качестве нейтрального элемента выбираем нулевой вектор } \bar{o} = 1: \\ \bar{x} \oplus \bar{o} = x \cdot 1 = x = \bar{x};$$

$$4) \text{ противоположным элементом к вектору } \bar{x} \text{ является вектор } -\bar{x} = x^{-1}, \\ \text{ так как } \bar{x} \oplus (-\bar{x}) = x \cdot x^{-1} = 1 = \bar{o};$$

$$5) 1 \odot \bar{x} = x^1 = x = \bar{x};$$

$$6) (\alpha \cdot \beta) \odot \bar{x} = x^{\alpha \cdot \beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \odot (\beta \odot \bar{x});$$

$$7) (\alpha \oplus \beta) \odot \bar{x} = (\alpha + \beta) \odot \bar{x} = x^{\alpha + \beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = \alpha \odot \bar{x} \oplus \beta \odot \bar{x};$$

$$8) \alpha \odot (\bar{x} \oplus \bar{y}) = (x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha = \alpha \odot \bar{x} \oplus \alpha \odot \bar{y}.$$

Все аксиомы векторного пространства выполнены. Следовательно, заданное множество $R^+ = \{\bar{x} \mid \bar{x} = x \wedge x \in R \wedge x > 0\}$ является векторным или линейным пространством.

1.2.3 Исследовать на линейную зависимость систему векторов e^x , $\text{sh } x$, $\text{ch } x$ на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.1.1) нахождения вронскиана:

$$W(x) = W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & \text{sh } x & \text{ch } x \\ e^x & \text{ch } x & \text{sh } x \\ e^x & \text{sh } x & \text{ch } x \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель равен нулю, так как первая и третья строки совпадают. По теореме 1.1.1 заданная система функций является линейно зависимой.

1.2.4 Доказать, что векторы $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{e}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = -2\vec{i} + \vec{k}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{x} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ в новом базисе.

Решение. Для доказательства того, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ образуют базис необходимо показать, что смешанное произведение этих векторов отлично от нуля.

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 10 + 18 = 5 \neq 0.$$

Смешанное произведение векторов отлично от нуля, то есть векторы линейно независимы, а, следовательно, образуют базис. Тогда вектор $\vec{x}$ выражается через новые базисные векторы. Для определения координат вектора воспользуемся формулой (1.1.2). Запишем матрицу перехода $T = T_{B \rightarrow B'}$ от базиса $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ к базису $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, столбцы которой представляют координаты новых базисных векторов в первоначальном базисе:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу для матрицы перехода. Так как определители транспонированной матрицы и самой матрицы равны, то $|T| = \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = 5$. Находим алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned} T_{11} &= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & T_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, & T_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \\ T_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2, & T_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5, & T_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \\ T_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, & T_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, & T_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5. \end{aligned}$$

Обратная матрица T^{-1} к матрице перехода имеет вид

$$T^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ -2 & -5 & -4 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения координат вектора воспользуемся формулой (1.1.2).

$$X' = T^{-1} \cdot X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ -2 & -5 & -4 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\vec{x} = (-1; 0; 1) = -\vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

1.2.5 Доказать, что система функций $y_1 = 1, y_2 = \sin x, y_3 = \cos x$ образует базис линейного пространства L^3 . Найти координаты функции $y = 4 \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ в этом базисе.

Решение. Воспользуемся формулой (1.1.1) нахождения вронскиана:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

По теореме 1.1.1 заданная система функций является линейно независимой, а, следовательно, образует базис линейного пространства. Найдём координаты функции $y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ в заданном базисе, для этого разложим заданную функцию по базисным векторам:

$$\begin{aligned} 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5 &= 2 \cdot \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1\right) - 5 = 2 \cdot \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) - 3 = \\ &= -3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) = -3 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $y = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 5$ в базисе $B = \{1; \sin x; \cos x\}$

имеет координаты $\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Из предположения, что на заданном множестве задана сумма $\vec{x} + \vec{y}$ двух элементов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а также произведение $\alpha \cdot \vec{x}$ произвольного элемента $\vec{x}$ этого множества на любое действительное число α , определить, образует ли данное пространство векторное (линейное) пространство.

1.3.1.1 Множество всех отрицательных действительных чисел: сумма равна $-|x| \cdot |y|$, произведение равно $-|x|^\alpha$.

1.3.1.2 Множество $Q_n(x)$ всех многочленов $q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ степени n с естественным образом введёнными операциями сложения и умножения их на действительное число.

1.3.1.3 Множество $P_n(x)$ всех многочленов $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ степени $\leq n$ с естественным образом введёнными операциями сложения и умножения их на действительное число.

1.3.2 Доказать, что три геометрических вектора $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ в этом базисе.

1.3.3 Доказать, что система многочленов $t^3 + t^2 + t + 1$, $t^2 + t + 1$, $t + 1$, 1 пространства P_4 линейно независима.

1.3.4 Доказать, что система многочленов $t^2 + 1$, $-t^2 + 2t$, $t^2 - t$ образует базис в пространстве P_3 . Найти координаты многочлена $-2t^2 + t - 1$ в этом базисе.

1.3.5 Найти координаты многочлена $t^2 - t + 2$ в базисе 1 , $t - 1$, $(t - 1)^2$.

1.3.6 Доказать, что система функций $\sin 2x$, $\cos 2x$, 1 образует базис трёхмерного пространства. Найти в этом базисе столбец координат функции $4\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Из предположения, что на заданном множестве задана сумма $\vec{x} + \vec{y}$ двух элементов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а также произведение $\alpha \cdot \vec{x}$ произвольного элемента $\vec{x}$ этого множества на любое действительное число α , определить, образует ли данное пространство векторное (линейное) пространство.

1.4.1.1 Множество целых чисел: сумма $x + y$, произведение $[\alpha \cdot x]$.

1.4.1.2 Множество геометрических векторов на плоскости, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.3 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной единице, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.4 Множество геометрических векторов на плоскости, являющихся линейной комбинацией двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.5 Множество симметрических матриц, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.6 Множество всех действительных чисел: сумма $x + y$, произведение $\alpha \cdot x$.

1.4.1.7 Множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.8 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной двум, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.9 Множество матриц размерности 2×2 , для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.10 Множество всех действительных чисел: сумма $x \cdot y$, произведение x^α .

1.4.1.11 Множество геометрических векторов на плоскости, лежащих на одной оси, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.12 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной трём, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.13 Множество всех непрерывных функций, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.14 Множество матриц размерности 3×3 , для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.15 Множество всех действительных отрицательных чисел: сумма $-|x \cdot y|$, произведение $-|x|^\alpha$.

1.4.1.16 Множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, лежащих на одной оси, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.17 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной четырём, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.18 Множество всех линейных функций, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.19 Множество невырожденных матриц, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.20 Множество всех действительных положительных чисел: сумма $x \cdot y$, произведение x^α .

1.4.1.21 Множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, лежащих в одной плоскости, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.22 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной натуральному числу $n-1$, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.23 Множество диагональных матриц, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.24 Множество всех чётных функций, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.25 Множество рациональных чисел: сумма $x + y$, произведение $[\alpha \cdot x]$.

1.4.1.26 Множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, являющихся линейной комбинацией трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.27 Множество всех многочленов одной переменной степени меньшей или равной натуральному числу n , для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.28 Множество всех нечётных функций, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.29 Множество всех квадратичных функций, для которых естественным образом определены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.1.30 Множество прямоугольных матриц, для которых естественным образом введены операции сложения и умножения на действительное число.

1.4.2 Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

1.4.2.1 $\cos x, \sin x, \sin 2x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **1.4.2.2** e^x, e^{2x}, e^{3x} на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.3 $\cos x, \sin x, 1$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **1.4.2.4** $1, x, \sin x$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.5 $\cos 2x, 1, \sin 2x$ на $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. **1.4.2.6** $x, x^2, (1+x)^2$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.7 $1, \cos 3x, \sin 3x$ на $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$. **1.4.2.8** e^x, e^{-x}, e^{2x} на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.9 $\cos 4x, 1, \sin 4x$ на $\left(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right)$. **1.4.2.10** $1, e^x, \operatorname{sh} x$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.11 $\sin 2x, \cos x, \sin x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **1.4.2.12** $\frac{1}{x}, x, 1$ на $(0; 1)$.

1.4.2.13 $1, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ на $(-\infty; \infty)$. **1.4.2.14** $x, (1+x)^2, 1+x$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.15 $4, \operatorname{sh} 5x, \operatorname{ch} 4x$ на $(-\infty; \infty)$. **1.4.2.16** e^{4x}, e^{3x}, e^{2x} на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.17 $\cos x, \sin 2x, \sin x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **1.4.2.18** $1, x, x^2$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.19 $\cos x, 2, \sin x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **1.4.2.20** e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x} на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.21 $\sin 2x, \cos 2x, 4$ на $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. **1.4.2.22** $1, x^2, x^3$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.23 $\cos 3x, 4, \sin 3x$ на $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$. **1.4.2.24** e^{2x}, e^{4x}, e^{-x} на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.25 $2, \cos 4x, \sin 4x$ на $\left(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right)$. **1.4.2.26** x, x^2, x^3 на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.27 $1, \operatorname{sh} 2x, \operatorname{ch} 2x$ на $(-\infty; \infty)$. **1.4.2.28** $2e^x, 3e^{2x}, -e^{-x}$ на $(-\infty; \infty)$.

1.4.2.29 $1, \operatorname{ch} 3x, \operatorname{sh} 3x$ на $(-\infty; \infty)$. **1.4.2.30** $\cos x, \sin x, 5$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА (практическое занятие 19)

Содержание: линейный оператор векторного пространства; матрица линейного оператора; образ и ядро линейного оператора; матрица линейного оператора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому базису; собственные векторы и собственные значения матрицы линейного оператора.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 2.1.1 *Линейным оператором* $\hat{A}$ в линейном векторном пространстве L называется всякое отображение $\hat{A}: L \rightarrow L$ в себя, обладающее свойствами

$$\hat{A}(\alpha \vec{x}) = \alpha \cdot \hat{A}(\vec{x}) \text{ и } \hat{A}(\vec{x} + \vec{z}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{z}$$

для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{z}$ из линейного пространства L .

Образом или *областью значений* линейного оператора $\hat{A}$ называется множество $\text{Im } \hat{A}$ всех векторов $\vec{y} \in L$, для которых $\hat{A}\vec{x} = \vec{y}$:

$$\text{Im } \hat{A} = \{ \vec{y} | \vec{y} = \hat{A}\vec{x}, \forall \vec{x} \in L \}.$$

Ядром линейного оператора $\hat{A}$ называется множество $\text{Ker } \hat{A}$ всех векторов $\vec{x} \in L$, для которых $\hat{A}\vec{x} = \vec{0}$:

$$\text{Ker } \hat{A} = \{ \vec{x} | \hat{A}\vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{x} \in L \}.$$

Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор в конечномерном пространстве L и $B = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}$ – некоторый фиксированный базис. Разложим вектор $\hat{A}\vec{e}_k$

$$(k = \overline{1; n}) \text{ по базису } B: \hat{A}\vec{e}_k = a_{1k}\vec{e}_1 + \dots + a_{nk}\vec{e}_n. \text{ Тогда матрица } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе B . Таким образом, чтобы найти матрицу линейного оператора в фиксированном базисе, необходимо подействовать оператором на базисные векторы, и записать координаты полученных векторов в столбец матрицы.

Задание матрицы линейного оператора $\hat{A}$ определяется однозначно, а именно: если $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$, то $Y = AX$, где X , Y – столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и A – матрица оператора $\hat{A}$ в базисе B .

Пусть A и A' – матрицы линейного оператора $\hat{A}$ в базисах B и B' , $T = T_{B \rightarrow B'}$ – матрица перехода от базиса B к базису B' . Тогда формула преобразования матрицы линейного оператора $\hat{A}$ при переходе от одного базиса к другому имеет вид

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T. \quad (2.1.1)$$

Множество $\text{Im } \hat{A}$ всех векторов $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$, $\vec{x} \in L$ называется *образом* линейного оператора $\hat{A}$, а множество $\text{Ker } \hat{A}$ всех векторов $\vec{x} \in L$, для которых $\hat{A}\vec{x} = \vec{0}$, называется *ядром* линейного оператора $\hat{A}$. Матрица линейного оператора $\hat{A}$ полностью определяет его образ $\text{Im } \hat{A} = \{\vec{y} | A\vec{x} = \vec{y}\}$. Решение однородной системы линейных алгебраических уравнений $A\vec{x} = \vec{0}$ определяет ядро линейного оператора $\hat{A}$.

Определение 2.1.2 Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* матрицы A , если выполняется равенство $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, при этом число λ называется *собственным значением* матрицы A .

Для определения собственных значений матрицы необходимо решить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$. Для каждого полученного собственного значения определяем собственные векторы из решения однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda E) \cdot X = 0$.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Пусть задан вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$ в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$. Исследовать на линейность указанные преобразования:

$$\hat{A}\vec{x} = (x_1^2 + 3x_2; x_2 + x_3; x_3 - x_1);$$

$$\hat{B}\vec{x} = (x_2 - x_3; x_3 - x_1; x_1 - 2);$$

$$\hat{C}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3).$$

В случае линейности найти матрицу линейного оператора.

Решение. Для доказательства линейности отображения воспользуемся определением 2.1.1.

$$\hat{A}(\alpha\vec{x}) = (\alpha^2 x_1^2 + 3\alpha x_2; \alpha x_2 + \alpha x_3; \alpha x_3 - \alpha x_1) = \alpha \cdot (\alpha x_1^2 + 3x_2; x_2 + x_3; x_3 - x_1) \neq \alpha \cdot \hat{A}\vec{x}.$$

Так как не выполняется условие определения линейного оператора, то преобразование не является линейным оператором.

$$\hat{B}(\alpha\vec{x}) = (\alpha x_2 - \alpha x_3; \alpha x_3 - \alpha x_1; \alpha x_1 - 2) = \alpha \cdot (x_2 - x_3; x_3 - x_1; x_1 - 2/\alpha) \neq \alpha \cdot \hat{B}\vec{x}.$$

Данное преобразование не является линейным оператором.

$$\begin{aligned} \hat{C}(\alpha\vec{x}) &= (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - 3\alpha x_3; 2\alpha x_1 - 3\alpha x_2 + 4\alpha x_3; 3\alpha x_1 + 4\alpha x_2 - 5\alpha x_3) = \\ &= \alpha \cdot (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3) = \alpha \cdot \hat{C}\vec{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}(\vec{x} + \vec{y}) &= ((x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3); 2(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) + 4(x_3 + y_3); \\ &3(x_1 + y_1) + 4(x_2 + y_2) - 5(x_3 + y_3)) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3) + \\ &+ (y_1 + 2y_2 - 3y_3; 2y_1 - 3y_2 + 4y_3; 3y_1 + 4y_2 - 5y_3) = \hat{C}\vec{x} + \hat{C}\vec{y}. \end{aligned}$$

Все условия линейности отображения выполнены, а, следовательно, данное преобразование является линейным оператором. Найдём матрицу линейного оператора, для чего подействуем оператором на базисные векторы $\vec{i} (1; 0; 0)$,

$\vec{j}(0; 1; 0)$ и $\vec{k}(0; 0; 1)$. Координаты новых векторов, записанные в столбец, будут образовывать матрицу линейного оператора $\hat{C}$.

$$\hat{C}\vec{i} = (1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0; 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0; 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0) = (1; 2; 3);$$

$$\hat{C}\vec{j} = (0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0; 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0; 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = (2; -3; 4);$$

$$\hat{C}\vec{k} = (0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1; 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1; 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1) = (-3; 4; -5).$$

Матрица линейного оператора $\hat{C}$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Доказать, что в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ оператор ортогонального проектирования $\hat{P}_\pi$ на плоскость $\pi: x + y + z = 1$ является линейным. Найти матрицу, образ и ядро линейного оператора. Определить матрицу линейного оператора проектирования $\hat{P}_\pi$ в базисе $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, если известно разложение новых базисных векторов базиса B' в базисе B : $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - 2\vec{k}$.

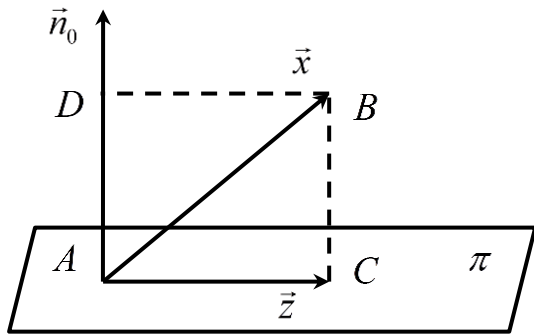


Рисунок 2.2.1 – Проекция вектор на плоскость

Решение. Оператор проектирования на плоскость π определяется равенством $\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{z}$, где вектор $\vec{z} = \overrightarrow{AC}$ – ортогональная проекция вектора $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ на заданную плоскость $\pi: x + y + z = 1$ (рисунок 2.2.1). Выразим вектор $\vec{z}$ через заданный вектор $\vec{x}$ и единичный нор-

мальный вектор $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(1; 1; 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ плоскости π .

$$\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{z} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \vec{x} - \overrightarrow{pr}_{\vec{n}_0} \vec{x} = \vec{x} - np_{\vec{n}_0} \vec{x} \cdot \vec{n}_0 = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0.$$

Таким образом, формула нахождения оператора проектирования $\hat{P}_\pi$ вектора $\vec{x}$ на плоскость π имеет вид

$$\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0.$$

Докажем линейность преобразования проектирования на плоскость.

$$\hat{P}_\pi(\alpha \vec{x}) = \alpha \vec{x} - (\alpha \vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0 = \alpha \cdot (\vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0) = \alpha \cdot \hat{P}_\pi \vec{x}.$$

$$\hat{P}_\pi(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{x} + \vec{y}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0 = (\vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0) + (\vec{y} - (\vec{y}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0) = \hat{P}_\pi \vec{x} + \hat{P}_\pi \vec{y}.$$

Все условия линейности отображения выполнены (определение 2.1.1), а, следовательно, данное преобразование проектирования на плоскость линейным оператором. Найдём матрицу линейного оператора, для чего подействуем оператором на базисные векторы $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$ и $\vec{k}(0; 0; 1)$. Координаты новых векторов, записанные в столбец, будут образовывать матрицу P_π линейного оператора проектирования $\hat{P}_\pi$ на плоскость π .

$$\begin{aligned}\hat{P}_\pi \vec{i} &= \vec{i} - (\vec{i}, \vec{n}_0) \vec{n}_0 = (1; 0; 0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (1; 0; 0) - \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right). \\ \hat{P}_\pi \vec{j} &= \vec{j} - (\vec{j}, \vec{n}_0) \vec{n}_0 = (0; 1; 0) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (0; 1; 0) - \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right). \\ \hat{P}_\pi \vec{k} &= \vec{k} - (\vec{k}, \vec{n}_0) \vec{n}_0 = (0; 0; 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = (0; 0; 1) - \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right).\end{aligned}$$

Матрица линейного оператора P_π имеет вид

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Найдём образ линейного оператора. Так как матрица P_π линейного оператора $\hat{P}_\pi$ полностью определяет образ $\text{Im } \hat{P}_\pi$ оператора проектирования на плоскость $\pi: x + y + z = 1$, то вектор $\vec{z} \in \text{Im } \hat{P}_\pi$ будет иметь координаты

$$\vec{z} = P_\pi \vec{x} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix}, \text{ где } x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}.$$

$$\text{Im } P_\pi = \left\{ \vec{z} \mid \vec{z} = \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3; -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3; -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \right), \vec{z} \in \pi \right\}$$

Определим ядро линейного оператора $\text{Ker } \hat{P}_\pi$ из системы $P_\pi \cdot X = 0$.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель матрицы системы $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, то система име-

ет бесконечное множество решений. В качестве базисного минора выбираем минор $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Переменные x_1, x_2 являются базисными переменными, а переменная $x_3 = c$ – свободная. Переходим к равносильной системе и решим её по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = c, \\ -x_1 + 2x_2 = c, \end{cases} \quad \Delta = 3, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c & -1 \\ c & 2 \end{vmatrix} = 3c, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & c \\ -1 & c \end{vmatrix} = 3c,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = c, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = c, \quad X = (c \quad c \quad c)^T, \text{ где } c \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, ядро линейного оператора $\hat{P}_\pi$ представляет собой множество векторов $\text{Ker} \hat{P}_\pi = \{ \vec{x} | \vec{x} = (c; c; c), c \in \mathbf{R} \}$.

Этот же результат можно получить из геометрических соображений. По определению ядра линейного оператора проектирования на плоскость, геометрический вектор отображается в нулевой вектор, а, следовательно, вектор перпендикулярен плоскости или коллинеарен нормальному вектору. Но коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, то есть $\vec{x} = (c; c; c)$, где $c \in \mathbf{R}$.

Найдём матрицу P'_π линейного оператора $\hat{P}_\pi$ в базисе $B' = \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \}$, если матрица P_π в базисе $B = \{ \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \}$ найдена выше и известно разложение базисных векторов базиса B' по векторам базиса B : $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - 2\vec{k}$.

Используя формулу (2.1.1), получаем формулу нахождения матрицы линейного оператора проектирования на плоскость в новом базисе:

$$P'_\pi = T^{-1} \cdot P_\pi \cdot T,$$

где T – матрица перехода от базиса B к базису B' .

Запишем матрицу перехода $T = T_{B \rightarrow B'}$ от базиса $B = \{ \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \}$ к базису $B' = \{ \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3 \}$, столбцы которой представляют координаты новых базисных векторов в первоначальном базисе:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу для матрицы перехода, для чего вычисляем её определитель $|T| = 2$ и алгебраические дополнения.

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2, & T_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, & T_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \\
T_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, & T_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, & T_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \\
T_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & T_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, & T_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

Обратная матрица T^{-1} к матрице перехода имеет вид

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
P'_\pi &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 \\ -12 & -6 & 4 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/6 \\ -2 & -1 & 2/3 \\ -3/2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица линейного оператора в новом базисе имеет вид

$$P'_\pi = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/6 \\ -2 & -1 & 2/3 \\ -3/2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ линейного оператора } \hat{A}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $|A - \lambda \cdot E| = 0$, решения которого являются собственными значениями матрицы A линейного оператора $\hat{A}$.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 0-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В результате получаем уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0$, решая которое, находим собственные значения линейного оператора $\hat{A}$: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 1$.

Для каждого собственного значения λ находим собственные векторы из системы:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $\lambda_1 = 3$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = -3 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

Таким образом, $\text{rang} A = 2$. При этом переменные x_1 и x_3 – базисные, так как они входят в базисный минор M_{12}^{13} , а $x_2 = c$ – свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -3c, \\ 3x_1 + x_3 = 3c. \end{cases}$$

Пусть $c = 1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{13} = -6, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-6} = 0$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_1 = 3$, имеет координаты:

$$E_1 = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } c \in R, \quad c \neq 0.$$

Пусть $\lambda_2 = -3$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = 3 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

Таким образом, $\text{rang} A = 2$. При этом переменные x_1 и x_2 – базисные, так как они входят в базисный минор M_{13}^{12} , а $x_3 = d$ – свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -d, \\ -2x_1 + 2x_2 = -4d. \end{cases}$$

Пусть $d = 1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 = -4. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{13}^{12} = 12, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -14.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{12} = -\frac{7}{6}$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_2 = -3$, имеет координаты:

$$E_2 = d \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5d}{6} \\ -\frac{7d}{6} \\ d \end{pmatrix}, \text{ где } d \in R, \quad d \neq 0.$$

Пусть $\lambda_3 = 1$. Тогда систему линейных уравнений в матричном виде можно записать

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ или } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Определим ранг основной матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ системы.

$$M_1^1 = -1 \neq 0, \quad M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Таким образом, $\text{rang} A = 2$. При этом переменные x_1 и x_2 – базисные, так как они входят в базисный минор M_{12}^{12} , а $x_3 = m$ – свободная неизвестная.

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -m, \\ 3x_1 - x_2 = -m. \end{cases}$$

Пусть $m=1$. Получаем систему линейных уравнений, которую решим методом Крамера.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -1, \\ 3x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\Delta = M_{12}^{12} = -8, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Соответственно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$. Тогда собственный вектор, который соответствует собственному значению $\lambda_3 = 1$, имеет координаты:

$$E_3 = m \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m/2 \\ -m/2 \\ m \end{pmatrix}, \text{ где } m \in R, \quad m \neq 0.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Доказать, что в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ зеркальное отображение $\hat{Z}_\pi$ относительно плоскости $\pi: 2x + 3y - 6z - 1 = 0$ является линейным оператором. Найти матрицу, образ и ядро линейного оператора $\hat{Z}_\pi$.

2.3.2 Доказать, что в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ ортогональное проектирование $\hat{P}_l$ на ось l с заданным единичным вектором $\vec{e}^0(3/13; -4/13; 12/13)$ является линейным оператором. Найти матрицу, образ и ядро линейного оператора $\hat{P}_l$.

2.3.3 Установить, какие из заданных отображений $\hat{A}$ пространства арифметических векторов R^3 с базисом $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ являются линейными операторами. В случае линейности найти матрицу, область значений и ядро линейного оператора.

2.3.3.1 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 + x_2; 4x_2 + 5x_3)$.

2.3.3.2 $\hat{A}\vec{x} = (3x_1 - x_2 + x_3; 2x_1 + 3x_2 - 1; x_2^3 + 7x_3)$.

2.3.4 В базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ задан линейный оператор $\hat{A}$, матрица которого равна $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу линейного оператора в новом базисе

$B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, если $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

2.3.5 Написать матрицу линейного оператора проектирования $\hat{P}_\pi \vec{x} = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0$ на плоскость $\pi: 2x - 3z + 2 = 0$ в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$. Найти матрицу заданного оператора в базисе $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, если $\vec{e}_1 = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{k}$.

2.3.6 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы A линейного оператора $\hat{A}$.

2.3.6.1 $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

2.3.6.2 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Проверить линейность, найти матрицу, образ и ядро отображения в пространства арифметических векторов $\mathbf{R}^3$ в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$.

2.4.1.1 Проектирования на плоскость $2x - 3y + 6z - 2 = 0$.

2.4.1.2 Проектирования на ось Oz .

2.4.1.3 Зеркального отображения относительно плоскости $3x + 4y = 1$.

2.4.1.4 Проектирования на плоскость $6x - 3y + 2z - 1 = 0$.

2.4.1.5 Проектирования на плоскость $3x + 4z - 5 = 0$.

2.4.1.6 Проектирования на ось Ox .

2.4.1.7 Зеркального отображения относительно плоскости $3x - 6y - 2z = 2$.

2.4.1.8 Проектирования на плоскость Oxz .

2.4.1.9 Проектирования на плоскость $2x + 6y + 3z - 5 = 0$.

2.4.1.10 Зеркального отображения относительно плоскости $3x + 6y - 2z = 2$.

2.4.1.11 Проектирования на ось Oy .

2.4.1.12 Проектирования на плоскость $12x - 4y + 3z - 9 = 0$.

2.4.1.13 Проектирования на плоскость $4x - 12y + 3z - 1 = 0$.

2.4.1.14 Зеркального отображения относительно плоскости $6x + 2y - 3z = 7$.

2.4.1.15 Проектирования на плоскость $4x + 12y + 3z - 6 = 0$.

2.4.1.16 Проектирования на плоскость Oyz .

2.4.1.17 Зеркального отображения относительно плоскости $2x + 6y - 3z = 8$.

- 2.4.1.18 Проектирования на ось l , с направляющим вектором $\vec{e}^0(0; 4; -3)$.
- 2.4.1.19 Проектирования на плоскость $3x + 4y + 12z - 1 = 0$.
- 2.4.1.20 Зеркального отображения относительно плоскости $3x + 4z = 2$.
- 2.4.1.21 Проектирования на плоскость $2x + 3y + 6z - 10 = 0$.
- 2.4.1.22 Проектирования на ось l , с направляющим вектором $\vec{e}^0(-3; 12; 4)$.
- 2.4.1.23 Зеркального отображения относительно плоскости $3y + 4z = 2$.
- 2.4.1.24 Проектирования на плоскость $4x + 3y + 12z - 11 = 0$.
- 2.4.1.25 Проектирования на ось l , с направляющим вектором $\vec{e}^0(3; 2; -6)$.
- 2.4.1.26 Зеркального отображения относительно плоскости $3y - 4z = 4$.
- 2.4.1.27 Проектирования на плоскость $-3x + 12y + 4z - 13 = 0$.
- 2.4.1.28 Проектирования на плоскость Oxy .
- 2.4.1.29 Зеркального отображения относительно плоскости $-3x + 4y = 7$.
- 2.4.1.30 Проектирования на ось l , с направляющим вектором $\vec{e}^0(8; 0; -6)$.

2.4.2 В базисе $B = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ задано отображение $\hat{A}$. Доказать, что отображение является линейным оператором и записать его матрицу в заданном базисе. Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $B' = \{\vec{e}'_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3\}$, если известны координаты базисных векторов базиса B' в базисе B . Определить координаты вектора $\vec{x}$ в базисе B' , если известны его координаты в базисе B .

- 2.4.2.1 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 6x_3; x_1 - 7x_2 + 6x_3; x_1 + 5x_2 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3; \vec{x} = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$
- 2.4.2.2 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 + 4x_2 - 3x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; 7x_1 + 8x_2 + 5x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$
- 2.4.2.3 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 + x_2 - x_3; x_1 + 3x_2 - x_3; 4x_1 + x_2 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 8\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$
- 2.4.2.4 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; x_1 - x_2 + 4x_3; x_1 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3.$
- 2.4.2.5 $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 5x_2 - 4x_3; x_1 - x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 3x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$
- 2.4.2.6 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3; x_1 + x_2 - 2x_3; x_1 + x_2 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = 11\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3.$
- 2.4.2.7 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3; 3x_1 + x_2 - 3x_3; 2x_1 + 7x_2 - 9x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = \vec{e}_1 + 16\vec{e}_2.$
- 2.4.2.8 $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 6x_3; x_1 - 7x_2 + 6x_3; x_1 + 5x_2 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3; \vec{x} = 4\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$

- 2.4.2.9** $\hat{A}\vec{x} = (2x_3 - x_2 - 4x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + 7x_2 - 3x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$
- 2.4.2.10** $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - x_2 - 2x_3; 3x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3; \vec{x} = 13\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$
- 2.4.2.11** $\hat{A}\vec{x} = (9x_1 - 7x_2 - 8x_3; x_1 + 9x_2 + 3x_3; x_1 + x_2 - 5x_3);$
 $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3; \vec{x} = 7\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$
- 2.4.2.12** $\hat{A}\vec{x} = (3x_1 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + x_3; x_1 + 5x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3; \vec{x} = 4\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3.$
- 2.4.2.13** $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 3x_2; x_1 + 5x_2; 6x_1 - 7x_2 + 2x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 4\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$
- 2.4.2.14** $\hat{A}\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - 3x_3; x_1 - 5x_2 + 4x_3; x_1 - 7x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = -2\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2.$
- 2.4.2.15** $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 12x_2 - 5x_3; x_1 - 3x_2 + 3x_3; x_1 + 4x_2 - 3x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 7\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$
- 2.4.2.16** $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 - x_3; x_1 + 5x_2 - 2x_3; x_1 + 4x_2 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = 10\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3.$
- 2.4.2.17** $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 - 4x_3; 4x_1 - 5x_2 + x_3; x_1 - x_2 + x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 6\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2.$
- 2.4.2.18** $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 13x_2 - 16x_3; x_1 - 17x_2 + 16x_3; x_1 + 15x_2 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3; \vec{x} = 11\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$
- 2.4.2.19** $\hat{A}\vec{x} = (x_1 + 4x_2 - 3x_3; x_1 - 3x_2 + 2x_3; x_1 - 5x_2 + 6x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3; \vec{x} = 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3.$
- 2.4.2.20** $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - 2x_3);$
 $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3; \vec{x} = 6\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$
- 2.4.2.21** $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 + 5x_2 - 3x_3; 2x_1 - 2x_2 + 9x_3; x_1 - 2x_2 + 5x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3; \vec{x} = 7\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$
- 2.4.2.22** $\hat{A}\vec{x} = (3x_1 + x_2 - 2x_3; x_1 + 3x_2 - 2x_3; 4x_1 + 2x_2 - x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 8\vec{e}_3.$
- 2.4.2.23** $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 - 3x_3; 4x_1 - 3x_2 + x_3; 2x_1 - x_2);$
 $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 9\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3.$
- 2.4.2.24** $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - x_2 - 3x_3; x_1 - 2x_2 + 6x_3; x_1 + 7x_2 - 3x_3);$
 $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \vec{x} = 3\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 + 13\vec{e}_3.$
- 2.4.2.25** $\hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 - 4x_3; 5x_1 + x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3);$
 $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3; \vec{x} = 21\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 15\vec{e}_3.$

$$2.4.2.26 \quad \hat{A}\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - 3x_3; 4x_1 - 3x_2 + 6x_3; x_1 - 2x_2 + 5x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3; \vec{x} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

$$2.4.2.27 \quad \hat{A}\vec{x} = (2x_1 - 2x_2 - 4x_3; 2x_1 - 2x_2; x_1 - x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \vec{x} = 11\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

$$2.4.2.28 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_2; 4x_1 + x_2; 2x_1 + x_2 - 9x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2; \vec{x} = 13\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 16\vec{e}_3.$$

$$2.4.2.29 \quad \hat{A}\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - 2x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2; \vec{x} = 3\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3.$$

$$2.4.2.30 \quad \hat{A}\vec{x} = ((x_1 - 5x_2 + 2x_3; x_1 + 3x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 4x_3);$$

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{e}'_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{x} = 8\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3.$$

2.4.3 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы A линейного оператора $\hat{A}$.

$$2.4.3.1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.2 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.3 \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.4 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.5 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.6 \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.7 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.8 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 11 \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.9 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.10 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.11 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.12 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.13 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.14 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.15 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.17 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.19 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.21 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.23 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.25 \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.27 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.29 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.16 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.18 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.20 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.22 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.24 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.26 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.28 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.4.3.30 \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

3 КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ (практическое занятие 20)

Содержание: квадратичные формы; приведение квадратичных форм к каноническому виду; приведение к каноническому виду уравнений линий второго порядка.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 3.1.1 *Квадратичной формой* от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется выражение вида

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (3.1.1)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – действительные числа, которые называются *коэффициентами квадратичной формы*.

Для записи квадратичной формы в матричном виде будем использовать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.1.2)$$

которая называется *матрицей квадратичной части* и является в силу равенства $a_{ij} = a_{ji}, i = \overline{1; n}, j = \overline{1; n}$ симметрической матрицей.

Например, для квадратичной формы матрица квадратичной формы $A(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 6 \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.1.1 В пространстве L^n существует ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, в котором для каждого вектора $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ значение квадратичной формы $A(x, x)$ может быть определено по формуле

$$A(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \lambda_1 \cdot x'^2_1 + \lambda_2 \cdot x'^2_2 + \dots + \lambda_n \cdot x'^2_n, \quad (3.1.3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы квадратичной части.

Выражение (3.1.3) называется *каноническим видом* квадратичной формы (3.1.1). Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются *каноническими коэффициентами* квадратичной формы (3.1.1). Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются *главными осями* квадратичной формы, а канонические коэффициенты совпадают с собственными значениями матрицы этой квадратичной формы. Главные оси квадратичной формы совпадают с собственными векторами этой матрицы.

Таким образом, квадратичная форма полностью определяется своей матрицей, и, наоборот, любая квадратичная форма определяет однозначно симметричную матрицу.

Пусть на плоскости в декартовой системе координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ задана линия второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (3.1.4)$$

Рассмотрим алгоритм приведения линии, заданной уравнением (3.1.4), к каноническому виду.

1. Рассматриваем квадратичную форму $A(x; y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ и её матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, причём $a_{12} = a_{21}$.

2. Находим собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы A , решая характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ или $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$, при этом, если:

а) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то получим кривую эллиптического типа;

б) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то получим кривую гиперболического типа;

в) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, то получим кривую параболического типа.

3. Для каждого собственного значения λ_1 и λ_2 определяем собственные векторы $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ и нормируем их: $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 / |\vec{u}_1| = (\alpha_1 \ \beta_1)^T$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 / |\vec{u}_2| = (\alpha_2 \ \beta_2)^T$.

4. Составляем матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ от базиса $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ к базису $\{O; \vec{v}_1; \vec{v}_2\}$ и переходим от системы координат Oxy к новой системе координат $Ox'y'$ с новыми базисными векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y'; \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y'. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Преобразование системы (3.1.5) осуществляет поворот осей координат.

5. Переменные x и y из системы (3.1.5) подставляем в уравнение (3.1.4), при этом в нём исчезает член с произведением xy , а квадратичная часть имеет вид: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$.

6. В полученном новом уравнении $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2ax' + 2by' + c = 0$ выделяем полные квадраты и вводим новые переменные $x'' = x' - A$, $y'' = y' - B$, что фактически осуществляет параллельный перенос системы координат $Ox'y'$ в новое начало координат $O_1(-A \cdot \alpha_1 - B \cdot \alpha_2; -A \cdot \beta_1 - B \cdot \beta_2)$ системы координат $O_1 x'' y''$. При этом уравнение (3.1.4) в системе координат $O_1 x'' y''$ принимает канонический вид.

Строим все системы координат Oxy , $Ox'y'$, $O_1 x'' y''$ и в последней системе координат – искомую кривую.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму $A(x_1; x_2; x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ к каноническому виду.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы квадратичной части, решая характеристическое уравнение $|A - \lambda \cdot E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0,$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

Тогда квадратичная форма $A(x_1; x_2; x_3)$ в канонической форме имеет вид

$$A(x'_1; x'_2; x'_3) = 4x_1'^2 + x_2'^2 - 2x_3'^2.$$

Для определения формул перехода от переменных x_1, x_2, x_3 к переменным x'_1, x'_2, x'_3 находим собственные векторы для каждого собственного значения из системы линейных однородных алгебраических уравнений $(A - \lambda \cdot E) \cdot X = 0$.

Единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 4$, имеет координаты $\vec{e}_1 = (2/3; -2/3; 1/3)$.

Единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 1$, имеет координаты $\vec{e}_2 = (2/3; 1/3; -2/3)$.

Единичный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -2$, имеет координаты $\vec{e}_3 = (1/3; 2/3; 2/3)$.

Тогда матрица перехода к новому базису $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (1.1.2), записываем преобразования, дающие выражения новых координат через старые координаты.

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \\ x'_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3, \\ x'_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

3.2.2 Написать каноническое уравнение линии второго порядка

$$108x^2 - 312xy + 17y^2 - 840x + 380y - 100 = 0.$$

Определить тип кривой и найти каноническую систему координат, в которой линия имеет канонический вид. Записать результирующее преобразование. Построить линию второго порядка.

Решение. Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна $\begin{pmatrix} 108 & -156 \\ -156 & 17 \end{pmatrix}$. Её собственные числа: $\lambda_1 = 225$ и $\lambda_2 = -100$; соответствующие нормированные векторы: $\vec{e}_1 = (4/5; -3/5)$ и $\vec{e}_2 = (3/5; 4/5)$. Используя формулу (1.1.2), записываем преобразования, дающие выражения координат $(x; y)$ через новые координаты $(x'; y')$.

$$x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y', \quad y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'.$$

Данные преобразования соответствуют повороту системы координат Ox с базисом $B = \{\vec{i}; \vec{j}\}$ и переходу к системе координат $Ox'y'$ с базисом $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$. Выполняя указанные преобразования, получаем уравнение линии второго порядка в новой системе координат:

$$9x'^2 - 4y'^2 - 36x' - 8y' - 4 = 0.$$

Группируя слагаемые с одинаковыми переменными и выделяя полные квадраты, приходим к уравнению

$$9 \cdot (x' - 2)^2 - 4 \cdot (y' + 1)^2 = 36.$$

Заменой переменных

$$x'' = x' - 2, \quad y'' = y' + 1,$$

которая соответствует сдвигу по каждой из координатных осей, получим

$$9x''^2 - 4y''^2 = 36, \text{ или } \frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Последнее уравнение есть каноническое уравнение гиперболы. Результирующее преобразование координат имеет вид

$$x = \frac{4}{5}x'' + \frac{3}{5}y'' + 1,$$

$$y = -\frac{3}{5}x'' + \frac{4}{5}y'' - 2,$$

а каноническая система координат $O_1x''y''$ имеет базис $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$, где $O_1(1; -2)$,

$$\vec{e}_1 = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}, \quad \vec{e}_2 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}.$$

Построим гиперболу (рисунок 3.2.1).

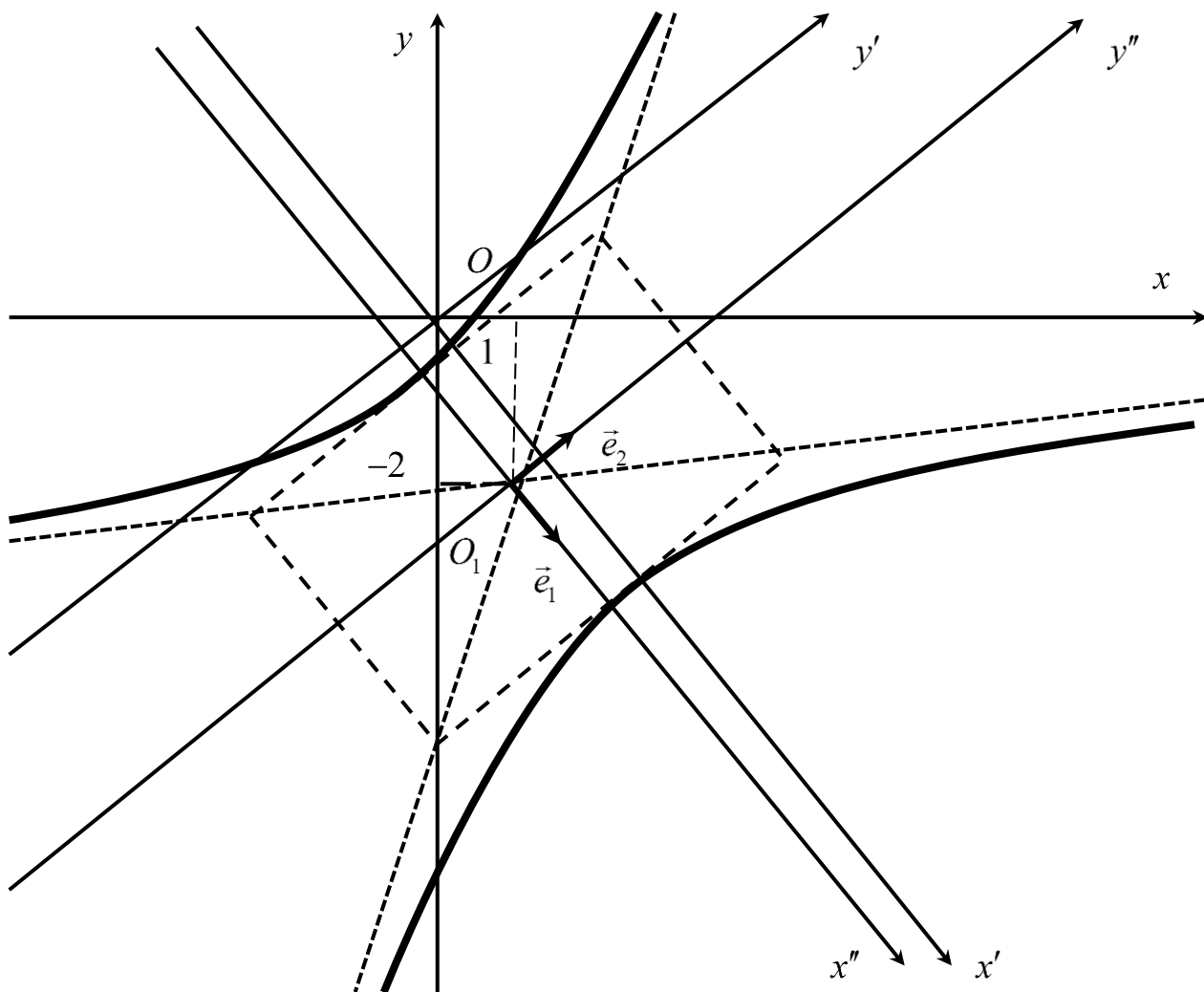


Рисунок 3.2.1 – Гипербола

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Составить матрицу квадратичной формы $A(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 6 \cdot x_1 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2 \cdot x_3$. Найти канонический вид квадратичной формы.

3.3.2 Найти квадратичную форму, которая соответствует матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму $A(x_1; x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$ к каноническому виду.

3.3.4 Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму $A(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2$ к каноническому виду.

3.3.5 Написать канонические уравнения линий второго порядка, определить их тип и найти каноническую систему координат. Записать результирующее преобразование. Построить линии второго порядка.

3.3.5.1 $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 58x + 22y + 37 = 0$.

3.3.5.2 $-3x^2 - 8xy + 3y^2 - 28x - 4y - 57 = 0$.

3.3.5.3 $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6\sqrt{13}x + 30\sqrt{13}y - 39 = 0$.

3.3.5.4 $x^2 + 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y - 10 = 0$.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму F к каноническому виду.

3.4.1.1 $F = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.

3.4.1.2 $F = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

3.4.1.3 $F = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

3.4.1.4 $F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

3.4.1.5 $F = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

3.4.1.6 $F = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

3.4.1.7 $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

3.4.1.8 $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

3.4.1.9 $F = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

3.4.1.10 $F = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2$.

3.4.1.11 $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

3.4.1.12 $F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

3.4.1.13 $F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

3.4.1.14 $F = -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

3.4.1.15 $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

3.4.1.16 $F = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$.

3.4.1.17 $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

3.4.1.18 $F = 3x_1^2 - 9x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

3.4.1.19 $F = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

3.4.1.20 $F = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

3.4.1.21 $F = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_2x_3$.

3.4.1.22 $F = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

3.4.1.23 $F = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.

$$3.4.1.24 \quad F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 10x_1x_2.$$

$$3.4.1.25 \quad F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

$$3.4.1.26 \quad F = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

$$3.4.1.27 \quad F = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2.$$

$$3.4.1.28 \quad F = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2.$$

$$3.4.1.29 \quad F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 18x_1x_2.$$

$$3.4.1.30 \quad F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_3^2 + 36x_1x_2.$$

3.4.2 Написать каноническое уравнение линий второго порядка, определить их тип и найти каноническую систему координат. Записать результирующее преобразование. Построить линии второго порядка.

$$3.4.2.1 \quad x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 5 = 0.$$

$$3.4.2.2 \quad 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x + 16y + 3 = 0.$$

$$3.4.2.3 \quad 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 6y - 3 = 0.$$

$$3.4.2.4 \quad 4x^2 - 2xy + 4y^2 - 10x + 10y - 1 = 0.$$

$$3.4.2.5 \quad 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

$$3.4.2.6 \quad 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

$$3.4.2.7 \quad 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0.$$

$$3.4.2.8 \quad x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0.$$

$$3.4.2.9 \quad 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

$$3.4.2.10 \quad x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 9 = 0.$$

$$3.4.2.11 \quad 19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0.$$

$$3.4.2.12 \quad 4xy - 8x - 8y - 1 = 0.$$

$$3.4.2.13 \quad 25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0.$$

$$3.4.2.14 \quad 5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

$$3.4.2.15 \quad 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$$

$$3.4.2.16 \quad 2xy + 2x + 2y - 3 = 0.$$

$$3.4.2.17 \quad 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0.$$

$$3.4.2.18 \quad x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0.$$

$$3.4.2.19 \quad 7x^2 - 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$$

$$3.4.2.20 \quad 4xy + 4x - 4y - 6 = 0.$$

$$3.4.2.21 \quad 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

$$3.4.2.22 \quad 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 2x - y + 1 = 0.$$

$$3.4.2.23 \quad 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

$$3.4.2.24 \quad x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

$$3.4.2.25 \quad 4x^2 + 17xy + 4y^2 - x - 4y - 3 = 0.$$

$$3.4.2.26 \quad 7x^2 - 50xy + 7y^2 + x - 2y + 7 = 0.$$

$$3.4.2.27 \quad x^2 + 6xy + 9y^2 - 3x + 2y - 1 = 0.$$

$$3.4.2.28 \quad 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 6y + 2 = 0.$$

$$3.4.2.29 \quad 9x^2 + 6xy + y^2 - x + 2y - 4 = 0.$$

$$3.4.2.30 \quad x^2 - 5xy + 6y^2 - x + y + 1 = 0$$

4 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (практическое занятие 21)

Содержание: комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной форме записи, основная теорема алгебры.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Существуют задачи, для решения которых множества действительных чисел недостаточно. Например, квадратное уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней на множестве действительных чисел, так как не существует действительного числа, квадрат которого равнялся бы -1 : $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$. Поэтому возникла необходимость расширения множества действительных чисел.

Комплексными числами называются всевозможные упорядоченные пары $z = (x; y)$ действительных чисел, для которых введены операции сложения и умножения по следующим правилам:

$$(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2), \quad (4.1.1)$$

$$(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1). \quad (4.1.2)$$

Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbf{C}$.

Действительные числа x и y называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа $z = (x; y)$ и обозначаются символами $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, то есть $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Отношение неравенства на множестве комплексных не определено.

Из определений (4.1.1) и (4.1.2) следует, что любое комплексное число $z = (x; y)$ может быть записано в виде

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; 1) \cdot (y; 0). \quad (4.1.3)$$

Установим взаимно однозначное соответствие $(x; 0) \leftrightarrow x$ между множеством $\{(x; 0) | x \in \mathbf{R}\}$ и множеством действительных чисел $\mathbf{R}$. Из формул (4.1.1) и (4.1.2) следует, что это соответствие «сохраняет операции:

$$(x_1; 0) + (x_2; 0) = (x_1 + x_2; 0) \leftrightarrow x_1 + x_2,$$

$$(x_1; 0) \cdot (x_2; 0) = (x_1 x_2; 0) \leftrightarrow x_1 x_2.$$

Комплексное число $(0; 1)$ обозначается символом i и называется мнимой единицей (мнимая единица может обозначаться символом j), причём $i^2 = -1$.

Комплексным числом в алгебраической форме называется число вида $z = x + iy$, где $x, y \in R$, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, причём $i^2 = -1$. Число $x = \operatorname{Re} z$ называется *действительной частью* комплексного числа $z = x + iy$, а число $y = \operatorname{Im} z$ – *мнимой частью* этого числа. Множество комплексных чисел обозначается буквой C . На комплексной плоскости по оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа, а по оси ординат – мнимая часть этого числа. Так, например, на комплексной плоскости мнимой единице будет соответствовать точка с координатами $(0, 1)$.

Два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части. Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряжёнными. Если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа, то арифметические операции над ними выполняются по следующим правилам:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Пусть дано комплексное число $z = x + iy$ в алгебраической форме. На комплексной плоскости ему будет соответствовать точка $M(x, y)$ с радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, где точка O – начало координат.

Число $r = |z| = |\overrightarrow{OM}|$ называется *модулем комплексного числа* $z = x + iy$.

Угол φ , образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси абсцисс, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Для любого комплексного числа справедливы формулы:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = x/r, \quad \sin \varphi = y/r, \quad (4.1.4)$$

где *главное значение аргумента* $\varphi = \arg z$ удовлетворяет следующим условиям: $0 \leq \arg z < 2\pi$ или $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Любое комплексное число $z = x + iy$ может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4.1.5)$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, комплексное число может быть представлено в показательной форме

$$z = r e^{i\varphi}. \quad (4.1.6)$$

Если $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$, то справедливы формулы

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (4.1.7)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (4.1.8)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (4.1.9)$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = \overline{0; n-1}. \quad (4.1.10)$$

Формула (4.1.9) называется *формулой Муавра*. Для нахождения корня n -ой степени из комплексного числа используется формула (4.1.10), дающая n значений этого корня, при этом под корнем $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметический корень.

Многочленом n -ой степени называется функция вида

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (4.1.11)$$

где $z \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n$ – коэффициенты многочлена, вообще говоря, комплексные, $n \in \mathbb{N}$. Уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, a_0 \neq 0 \quad (4.1.12)$$

называется алгебраическим уравнением n -ой степени. Число z_0 , для которого $P_n(z_0) = 0$, называется *корнем* многочлена (4.1.11) или уравнения (4.1.12).

Теорема Гаусса (основная теорема алгебры). Всякий многочлен ненулевой степени имеет, по крайней мере, один корень (вообще говоря, комплексный).

Если учесть кратность корней, основная теорема алгебры может быть уточнена следующим образом: *многочлен n -ой степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = 2 + 5i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_2^2 , z_1^3 , $\bar{z}_1/z_2$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$$z_1 + z_2 = (4 - 3i) + (2 + 5i) = (4 + 2) + (-3 + 5)i = 6 + 2i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 3i) \cdot (2 + 5i) = 8 - 6i + 20i - 15i^2 = 8 + 14i + 15 = 23 + 14i,$$

$$z_2^2 = (2 + 5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i,$$

$$z_1^3 = (4 - 3i)^3 = 64 - 144i + 108i^2 - 27i^3 = 64 - 144i - 108 + 27i = -44 - 117i,$$

$$\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{4 + 3i}{2 + 5i} = \frac{(4 + 3i) \cdot (2 - 5i)}{(2 + 5i) \cdot (2 - 5i)} = \frac{8 + 6i - 20i - 15i^2}{4 - 25i^2} = \frac{23 - 14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i.$$

4.2.2 Данные числа $z_1 = \sqrt{3} - i$ и $z_2 = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ представить в тригонометрической и показательной форме записи комплексных чисел. Выполнить указанные действия над ними: $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , z_1^{10} , $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение. Представим указанные числа в тригонометрической и показательной форме записи. Для числа $z_1 = \sqrt{3} - i$, по формулам (4.1.4), находим модуль и аргумент комплексного числа. Модуль числа равен $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, а аргумент определяем из системы: $\cos \varphi_1 = \sqrt{3}/2$, $\sin \varphi_1 = -1/2$, то есть $\varphi_1 = 11\pi/6$. По формулам (4.1.5) и (4.1.6) получаем необходимые записи числа $z_1 = \sqrt{3} - i$: $z_1 = 2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}$. Аналогично, $z_2 = 6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = 6e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Для нахождения $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , z_1^{10} , $\sqrt[3]{z_2}$ воспользуемся формулами (4.1.7) – (4.1.10):

$$z_1 z_2 = 2 \cdot 6 \cdot \left(\cos \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \right) \right) = 12 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = 12e^{\frac{7\pi}{12}i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{6} \cdot \left(\cos \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right) = \frac{1}{3}e^{\frac{13\pi}{12}i},$$

$$z_1^{10} = 2^{10} \cdot \left(\cos \left(10 \cdot \frac{11\pi}{6} \right) + i \sin \left(10 \cdot \frac{11\pi}{6} \right) \right) = 1024 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1024e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

$$\omega_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}i}, k = 0, 1, 2.$$

В частном случае, если значение $k = 0$, то $\omega_0 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Если же значение $k = 1$, то $\omega_1 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{11\pi}{12}i}$. Если $k = 2$, то

$$\omega_2 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{6}e^{\frac{19\pi}{12}i}.$$

4.2.3 Решить уравнение $z^2 + 6z + 13 = 0$.

Решение. $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 = 16i^2$, $z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$.

4.2.4 Найти корни многочлена $z^6 + 2z^3 + 1$ и разложить его на множители.

Решение. Так как $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$, то корнями этого многочлена являются корни третьей степени из числа $-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$: $\omega_1 = -1$,

$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$. При этом каждый корень имеет кратность $k = 2$. Разложение многочлена на линейные множители имеет вид: $z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2$.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме: а) $(2-4i) \cdot (5+3i) + 7i$; б) $(6+i) \cdot (3-7i) - 2i$; в) $(3-2i)^2 + (1+i)^2$; г) $(3-i)^3 + (3+i)^3$; д) $(i-3i^2)^2 + (4i^3+i^2)^2$; е) $\frac{2-i}{3+i}$; ж) $\frac{1}{5-i} + \frac{1}{1+5i}$; з) $\left(\frac{i^7+3}{i^{19}+2} \right)^2$.

4.3.2 Найти действительные решения уравнения:

$$12((2x+1) \cdot (1+i) + (x+y) \cdot (3-2i)) = 17 + 6i.$$

4.3.3 Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} (3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 1+3i, \\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 7. \end{cases}$$

4.3.4 Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной форме и изобразить точками на комплексной плоскости:

а) $-i$; б) $\sqrt{3}-i$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$; г) $2-2\sqrt{3}i$; д) $\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$; е) $-\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$.

4.3.5 Найти $z_1 \cdot z_2$, z_2/z_1 , z_1^8 , $\sqrt[4]{z_2}$, если $z_1 = 2(\cos \pi/12 + i \sin \pi/12)$, $z_2 = 16(\cos 23\pi/12 + i \sin 23\pi/12)$.

4.3.6 Найти $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 , z_1^{12} , $\sqrt[5]{z_2}$, если $z_1 = 4e^{\frac{5\pi}{12}i}$, $z_2 = 32e^{\frac{\pi}{3}i}$.

4.3.7 Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 2-й, 3-й и 4-й степени из единицы.

4.3.8 Найти решения уравнений: а) $z^2 - 2z + 5 = 0$; б) $4z^2 + 2z + 1 = 0$; в) $z^2 + (5-2i)z + 5-5i = 0$; г) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$; д) $z^3 + 64 = 0$; е) $z^6 + 729 = 0$.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Заданы два комплексных числа $z_1 = \sin \alpha + i \cos \alpha$ и $z_2 = \sin \beta - i \cos \beta$, где $\alpha = n\pi/6$, $\beta = m\pi/4$, n – номер варианта, причём $\alpha, \beta \in (0; 2\pi]$. Если значения углов α , β превышают угол 2π , то из полученных значений α и β исключить угол, кратный 2π , и принять полученные значения за значения углов α и β . Представить полученные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. При записи комплексных чисел в алгебраической фор-

ме найти $z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^3, z_2^2$. При записи комплексных чисел в тригонометрической форме найти $z_1 z_2^2, \frac{z_1^3}{z_2}, z_1^{10}, z_2^8$. При записи комплексных чисел в показательной форме найти $z_1^2 z_2, \frac{z_1}{z_2^2}, z_1^7, z_2^9$. Решить квадратное уравнение $z^2 - 2nz + (n^2 + 1) = 0$. Решить кубическое уравнение $\omega^3 + (-1)^n z_1 = 0$.

5 ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ (практическое занятие 22)

Содержание: числовая последовательность, её монотонность и ограниченность, предел и свойства предела сходящейся числовой последовательности, правила предельного перехода для числовых последовательностей, второй замечательный предел для числовых последовательностей.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Одной из важных областей курса «Высшая математика» является раздел «Введение в математический анализ», на основе которого в основном будут строиться все остальные разделы математики. Изучение этого раздела начнём с темы «Предел числовой последовательности».

Определение 5.1.1 Числовой последовательностью называется функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, областью определения которой является множество натуральных чисел, множеством значений – некоторое подмножество действительных чисел.

Число $f(n)$ называется n -м членом последовательности и обозначается символом x_n , а формула $x_n = f(n)$ называется формулой общего члена последовательности (x_n) .

Определение 5.1.2 Числовая последовательность (x_n) называется *возрастающей (убывающей)*, если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$).

Определение 5.1.3 Числовая последовательность (x_n) называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$).

Определение 5.1.4 Числовая последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что для любого натурального n выполняется неравенство $x_n \leq M$.

Определение 5.1.5 Числовая последовательность (x_n) называется *ограниченной снизу*, если существует число m такое, что для любого натурального n выполняется неравенство $x_n \geq m$.

Определение 5.1.6 Числовая последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, то есть если существуют числа M и m такие, что для любого натурального n выполняется неравенство $m \leq x_n \leq M$.

Теорема 5.1.1 Числовая последовательность (x_n) является ограниченной тогда и только тогда, когда существует число L такое, что для любого натурального n выполняется неравенство $|x_n| \leq L$.

Определение 5.1.7 Число a называется пределом числовой последовательности (x_n) , если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое натуральное число n_0 , зависящее от ε , что для всех натуральных чисел n больших n_0 все члены последовательности будут попадать в ε -окрестность точки a .

Используя символы математической логики, определение предела числовой последовательности записывается в виде

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}), (\forall n > n_0) \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \quad (5.1.1)$$

Определение 5.1.8 Числовая последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Свойства сходящихся последовательностей:

- 1) сходящаяся последовательность имеет единственный предел;
- 2) если последовательность сходится, то она ограничена;
- 3) любая ограниченная монотонная последовательность сходится;
- 4) любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу;
- 5) если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, то, начиная с некоторого номера N , все члены последовательности сохраняют знак числа a ;
- 6) если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и $a < b$, то, начиная с некоторого номера N , выполняется неравенство $x_n < y_n$;
- 7) если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и начиная с некоторого номера N , $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$;
- 8) если для всех членов последовательностей (x_n) , (y_n) и (z_n) выполняется неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Определение 5.1.9 Числовая последовательность (α_n) называется *бесконечно малой числовой* последовательностью, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Числовая последовательность (x_n) называется *бесконечно большой* числовой последовательностью, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Теорема 5.1.2 Если числовая последовательность (α_n) является бесконечно малой числовой последовательностью, то последовательность $(1/\alpha_n)$ является бесконечно большой числовой последовательностью.

Теорема 5.1.3 Если числовая последовательность (x_n) является бесконечно большой числовой последовательностью, то последовательность $(1/x_n)$ является бесконечно малой числовой последовательностью.

Теорема 5.1.4 Для того чтобы числовая последовательность (x_n) сходилась, необходимо и достаточно, чтобы её можно представить в виде некоторого числа и бесконечно малой числовой последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \leftrightarrow x_n = a + \alpha_n.$$

Определение 5.1.10 Суммой, разностью, произведением и частным последовательностей (x_n) и (y_n) называются последовательности $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, (x_n/y_n) соответственно (при частном предполагается, что все члены последовательности (y_n) отличны от нуля). Произведением последовательности (x_n) на число α называется числовая последовательность $(\alpha \cdot x_n)$, полученная путём умножения на α каждого члена последовательности (x_n) .

Теорема 5.1.5 Если числовые последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \cdot a$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right] = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}$.

В теореме 5.1.5 пункты 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей. При вычислении пределов условия теоремы могут не выполняться, то есть возникают неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, $\left(\frac{0}{0} \right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (0^0) , (∞^0) . Раскрыть неопределённость – означает найти предел.

Приведём признаки сходимости числовых последовательностей.

Теорема 5.1.6 Если числовая последовательность не убывает и ограничена сверху, то она сходится.

Теорема 5.1.7 Если числовая последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она сходится.

Данные признаки применяются для доказательства *второго замечательного предела*.

Второй замечательный предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, где $e = 2,71828182845\dots$

Второй замечательный предел используется при раскрытии неопределённости типа (1^∞) .

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Написать первые четыре члена числовой последовательности, общий член которой задан формулой $x_n = (-1)^{n-1} \cdot n^2$.

Решение. Полагая в данной формуле $n = 1, 2, 3, 4$, находим первые четыре члена числовой последовательности: $x_1 = (-1)^{1-1} \cdot 1^2 = 1$, $x_2 = (-1)^{2-1} \cdot 2^2 = -4$, $x_3 = (-1)^{3-1} \cdot 3^2 = 9$, $x_4 = (-1)^{4-1} \cdot 4^2 = -16$.

5.2.2 Написать формулу общего члена последовательности: $2, \frac{4}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{2}{81}, \frac{4}{243}, \dots$

Решение. Каждый член последовательности представляет собой дробь, числитель которой равен двойке для членов с нечётными номерами и четырём для членов с чётными номерами, а знаменатель – соответствующей степени числа три. Следовательно, числитель можно представить формулой $3 + (-1)^n$, а знаменатель – формулой 3^{n-1} , поэтому формула общего члена числовой последовательности имеет вид: $a_n = \frac{3 + (-1)^n}{3^{n-1}}$.

5.2.3 Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n-1}{n}$ является возрастающей.

Решение. Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Таким образом, при любом натуральном n справедливо неравенство $x_{n+1} > x_n$, и, следовательно, последовательность является возрастающей.

5.2.4 Доказать, что последовательность $x_n = -(n+1)$ является убывающей.

Решение. Рассмотрим частное x_{n+1}/x_n . Имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{-(1+(n+1))}{-(n+1)} = \frac{-n-2}{-n-1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1.$$

Так как все члены последовательности отрицательны, то при любом натуральном n из неравенства $x_{n+1}/x_n > 1$ получаем, что $x_{n+1} < x_n$.

Следовательно, заданная последовательность является убывающей.

5.2.5 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n-2}{n+1}$ является ограниченной.

Решение. Так как $x_n = \frac{n-2}{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1} < 1$, то есть при любом натуральном n последовательность ограничена сверху.

Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n-2}{n+1} - \frac{n-1}{n+2} = \frac{-3}{(n+1) \cdot (n+2)} < 0,$$

то есть при любом натуральном n справедливо неравенство $x_n < x_{n+1}$. Поэтому $x_1 = -1/2$ — наименьший член этой последовательности. Таким образом, для любого натурального n справедливо неравенство $x_n \geq -1/2$, то есть последовательность (x_n) ограничена снизу. Итак, последовательность (x_n) ограничена сверху и ограничена снизу, поэтому она является ограниченной последовательностью.

5.2.6 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = n^2$ не является ограниченной.

Решение. Предположим, что данная последовательность является ограниченной сверху, то есть пусть существует такое число M , что для любого n справедливо неравенство $n^2 \leq M$. Из последнего неравенства следует, что $M > 0$. Рассмотрим целое число k , большее, чем число $\sqrt{M}$; положим, например, $k = [\sqrt{M}] + 1$. Тогда $k^2 = ([\sqrt{M}] + 1)^2 > (\sqrt{M})^2 = M$. Итак, получено противоречие: при предположении, что существует такое число M , что для любого натурального n справедливо неравенство $n^2 \leq M$, в то же время оказалось, что существует номер $k = [\sqrt{M}] + 1$ такой, что $a_k = k^2 = ([\sqrt{M}] + 1)^2 > M$. Следовательно, последовательность с общим членом $x_n = n^2$ не является ограниченной сверху, и тем самым доказано, что она не является ограниченной.

5.2.7 Доказать, что число 2 является пределом числовой последовательности с общим членом $x_n = \frac{2n-1}{n+3}$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2$.

Решение. Надо доказать, что для любого положительного числа ε найдётся номер N такой, что для любого натурального $n > N$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Так как $\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| = \left| \frac{-4}{n+3} \right| = \frac{4}{n+3}$, то неравенство $\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\frac{4}{n+3} < \varepsilon$, то есть неравенству $n > \frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon}$. Если взять некоторое натуральное число N , больше числа $\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon}$, например число $\left[\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1$, то для каждого натурального числа n , большего этого числа N , выполнено неравенство

$$\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| = \frac{4}{n+3} < \frac{4}{N+3} = \frac{4}{\left[\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1} < \frac{4}{4/\varepsilon} = \varepsilon,$$

а это означает, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ нашёлся номер $N(\varepsilon) = \left[\frac{4-3\varepsilon}{\varepsilon} \right] + 1$ такой, что для любого $n > N$ справедливо неравенство $\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$. Следовательно, число 2 является пределом заданной последовательности, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2$.

5.2.8 Вычислить предел числовой последовательности $x_n = \frac{4n^3 + 5n + 1}{7n^3 + n^2 - 2}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 5n + 1}{7n^3 + n^2 - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{разделим числитель и} \\ \text{знаменатель на их старшую} \\ \text{степень переменной } n \end{array} \right] =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{7 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}} = \frac{4 + 0 + 0}{7 + 0 - 0} = \frac{4}{7}.$$

5.2.9 Вычислить предел числовой последовательности $y_n = \frac{5n^4 - 3n^2 + 3}{8n^7 + n^3 + 9}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 3n^2 + 3}{8n^7 + n^3 + 9} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n^3} - \frac{3}{n^5} + \frac{3}{n^7}}{8 + \frac{1}{n^4} + \frac{9}{n^7}} = \frac{0}{8} = 0.$

5.2.10 Вычислить предел числовой последовательности $z_n = \frac{2 - 3n^4 - 4n^3}{6n^2 + 5}$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3n^4 - 4n^3}{6n^2 + 5} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^4} - 3 - \frac{4}{n}}{\frac{6}{n^2} + \frac{5}{n^4}} = \left(\frac{-3}{0} \right) = -\infty.$

5.2.11 Вычислить предел числовой последовательности $a_n = \sqrt{n^2 + 9n} - n$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 9n} - n) = \left[\begin{array}{l} \text{домножаем и делим на выраже-} \\ \text{ние, сопряженное данному} \end{array} \right] =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 9n} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 9n} + n)}{\sqrt{n^2 + 9n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{\sqrt{n^2 + 9n} + n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{1 + \frac{9}{n}} + 1} = \frac{9}{2}.$$

5.2.12 Вычислить предел числовой последовательности $b_n = \left(\frac{3n-5}{3n-9} \right)^{6n+3}$.

Решение. Для нахождения предела числовой последовательности воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-5}{3n-9} \right)^{6n+3} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n-5}{3n-9} - 1 \right)^{6n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3n-9} \right)^{6n+3} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{3n-9}{4}} \right)^{\frac{4(6n+3)}{3n-9}} \right) = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n+12}{3n-9}} = e^{\frac{24}{3}} = e^8. \end{aligned}$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Написать первые шесть членов числовой последовательности:

5.3.1.1 $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6} \right)^n$. **5.3.1.2** $x_n = \frac{2^n}{n!}$. **5.3.1.3** $x_n = \sin \frac{\pi(n-1)}{4}$.

5.3.2 Найти формулу общего члена числовой последовательности:

5.3.2.1 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4 \cdot 5}, \frac{5}{6 \cdot 25}, \frac{7}{8 \cdot 125}, \frac{9}{10 \cdot 625}, \dots$

5.3.2.2 $\frac{3}{1 \cdot 4}, \frac{5}{4 \cdot 9}, \frac{7}{9 \cdot 16}, \frac{9}{16 \cdot 25}, \frac{11}{25 \cdot 36}, \dots$

5.3.2.3 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \frac{5}{24}, \frac{6}{120}, \frac{7}{720}, \frac{8}{5040}, \dots$

5.3.3 Доказать, что последовательность $x_n = 2^{n-1}$ является возрастающей.

5.3.4 Доказать, что последовательность $x_n = \frac{2n+3}{3n-2}$ является убывающей.

5.3.5 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n+4}{n+3}$ является ограниченной.

5.3.6 Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n n^3$ не является ограниченной.

5.3.7 Доказать, что число $3/2$ является пределом числовой последовательности с общим членом $x_n = \frac{3n^2-2}{2n^2-3}$, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2}{2n^2-3} = \frac{3}{2}$.

5.3.8 Доказать, что число 1 не является пределом числовой последовательности с общим членом $x_n = \frac{3n-1}{n+5}$, $n \in \mathbb{N}$.

5.3.9 Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 2n + 3}{2n^3 + n^2 - 1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n - 3n^3}{6n^3 + 2n^2 - 4}$ в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{5n^4 - 3n^2}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 3n^3 + 1}{5n^3 - 3n - 8}$.

5.3.10 Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 8} - 2n)$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+9} - \sqrt{n-9})$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1})$.

5.3.11 Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+4}{2n-3} \right)^{5n-2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^2-1}{6n^2+5} \right)^{2n+3}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{3n-2} \right)^{4n}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+7}{4n-8} \right)^{n-1}$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Вычислить предел числовой последовательности.

5.4.1.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{9n^2 + 1} - 3n)$.

5.4.1.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + n} - 3n)$.

5.4.1.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n(\sqrt{16n^2 + 5} - 4n)$.

5.4.1.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{16n^2 + 2n} - 4n)$.

5.4.1.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-2)(\sqrt{9n^2 + 8} - 3n)$.

5.4.1.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{25n^2 + 3n} - 5n)$.

5.4.1.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n(\sqrt{49n^2 + 2} - 7n)$.

5.4.1.8 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{36n^2 + n} - 6n)$.

5.4.1.9 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)(\sqrt{4n^2 - 9} - 2n)$.

5.4.1.10 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3} - 2n)$.

5.4.1.11 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-7)(\sqrt{9n^2 + 3} - 3n)$.

5.4.1.12 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{81n^2 + n} - 9n)$.

5.4.1.13 $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n-2)(\sqrt{n^2 - 4} - n)$.

5.4.1.14 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{81n^2 - 5n} - 9n)$.

5.4.1.15 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+4)(\sqrt{n^2 + 16} - n)$.

5.4.1.16 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^2 - 2} - n)$.

$$\begin{array}{ll}
5.4.1.17 & \lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) \left(\sqrt{9n^2+3} - 3n \right). \\
5.4.1.18 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9n^2-7n-3n} \right). \\
5.4.1.19 & \lim_{n \rightarrow \infty} (n+9) \left(\sqrt{9n^2-1} - 3n \right). \\
5.4.1.20 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt{2n^2+3n} - \sqrt{2n} \right). \\
5.4.1.21 & \lim_{n \rightarrow \infty} (9n-1) \left(\sqrt{n^2+25} - n \right). \\
5.4.1.22 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{25n^2+3n} - 5n \right). \\
5.4.1.23 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{9n^2+3} - 3n \right). \\
5.4.1.24 & \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{81n^3+3n} - 9\sqrt{n^3} \right). \\
5.4.1.25 & \lim_{n \rightarrow \infty} (n+12) \left(\sqrt{n^2+3} - n \right). \\
5.4.1.26 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{15n^2+3n} - \sqrt{15} \cdot n \right). \\
5.4.1.27 & \lim_{n \rightarrow \infty} (n-9) \left(\sqrt{4n^2+1} - 2n \right). \\
5.4.1.28 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{32n^2+3n} - 4\sqrt{2} \cdot n \right). \\
5.4.1.29 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2n} \left(\sqrt{81n^2+1} - 9n \right). \\
5.4.1.30 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{51n^2+5n} - \sqrt{51} \cdot n \right).
\end{array}$$

6 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (практические занятия 23–24)

Содержание: предел функции в точке и на бесконечности, свойства предела функции, правила предельного перехода для функций, замечательные пределы, бесконечно малые и бесконечно большие функции.

6.1 Теоретический материал по теме практических занятий

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой δ -окрестности точки x_0 , то есть на множестве $\overset{o}{U}_\delta(x_0) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$. В точке x_0 значение функции $y = f(x)$ может быть не определено. Дадим определения Коши и Гейне предела функции в точке.

Определение 6.1.1 Число a называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое положительное число δ , зависящее от ε , что для всех чисел x из проколотой δ -окрестности точки x_0 , все значения функции будут попадать в ε -окрестность точки a .

Используя символы математической логики, определение предела функции в точке по Коши записывается в виде

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta(\varepsilon) > 0), (\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta) \rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \quad (6.1.1)$$

Определение 6.1.2 Число a называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 , если для любой последовательности точек $x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$, сходящейся к точке x_0 , последовательность соответствующих значений функций $f(x_n)$ сходится к точке a .

Используя символы математической логики, определение предела функции в точке по Гейне записывается в виде

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \forall x_n : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a. \quad (6.1.2)$$

Определение 6.1.3 Предел функции $y = f(x)$ при значении $x \rightarrow x_0$ называется бесконечным, если для любого положительного числа M существует положительное число δ , такое, что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$.

Если функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при значении $x \rightarrow x_0$, то её называют *бесконечно большой функцией* и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \leftrightarrow (\forall M > 0), (\exists \delta > 0), (\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \rightarrow |f(x)| > M. \quad (6.1.3)$$

Если функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при значении $x \rightarrow x_0$ и при это принимает только положительные или только отрицательные значения, то записывают соответственно: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Определение 6.1.4 Число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого положительного ε существует положительное число M , такое, что неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$ выполняется для всех значений переменной x , при которых $x > M$:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0), (\exists M > 0), (\forall x > M) \rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \quad (6.1.4)$$

Геометрически это означает, что график функции $y = f(x)$ будет находиться в полосе, ограниченной прямыми $y = a - \varepsilon$ и $y = a + \varepsilon$, при любом $x > M$. Аналогично определяется предел функции при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \infty$.

Существуют функции, которые при неограниченном увеличении аргумента также неограниченно возрастают. В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Свойства предела функции:

- 1) если функция имеет предел в точке, то он единственен;
- 2) функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки;

3) если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0 (< 0)$, то существует такая проколота окрестность точки x_0 , в которой $f(x) > 0 (f(x) < 0)$;

4) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = a$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 имеет место неравенство $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Если в бесконечно малой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $x < x_0$, то предел функции называется левосторонним пределом

$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, если же выполняется неравенство $x > x_0$, то правосторонним пределом $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$.

Теорема 6.1.1 Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы в точке x_0 , то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = b$, то:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a \pm b;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a \cdot b;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \cdot a;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} \right) = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0 \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{a}{b}.$$

В теореме 6.1.1 пункты 1) и 2) верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей. При вычислении пределов условия теоремы могут не выполняться, то есть возникают неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, $\left(\frac{0}{0} \right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , (0^0) , (∞^0) . Раскрыть неопределённость – означает найти предел.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ или $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$

Третий замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$

Четвёртый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

Пятый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$

При вычислении пределов вида $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, используется второй замечательный предел.

Определение 6.1.5 Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Определение 6.1.6 Функция $y = \alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема 6.1.2 Если $\alpha(x)$ бесконечно малая функция, то $1/\alpha(x)$ является бесконечно большой функцией.

Теорема 6.1.3 Если $f(x)$ бесконечно большая функция, то $1/f(x)$ является бесконечно малой функцией.

Теорема 6.1.4 Для того чтобы число a было пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в точке x_0 .

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leftrightarrow \left(f(x) = a + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \right).$$

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C_1$. Если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка малости* чем $\beta(x)$. При значении $C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке x_0 называются *эквивалентными бесконечно малыми функциями*: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Например, в точке $x = 0$ эквивалентными будут функции: $\sin cx \sim cx$, $\operatorname{tg} cx \sim cx$, $\arcsin cx \sim cx$, $\operatorname{arctg} cx \sim cx$, $1 - \cos x \sim x^2/2$, $e^x - 1 \sim x$, $a^x - 1 \sim x \ln a$, $\ln(1+x) \sim x$, $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \sim x$, $(1+x)^{ax} \sim ax + 1$, $\operatorname{sh} x \sim x$, $\operatorname{ch} x - 1 \sim x^2/2$.

Теорема 6.1.5 Предел отношения бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке равен пределу отношения эквивалентно им бесконечно малых функций $\alpha^*(x)$ и $\beta^*(x)$, то есть справедливы предельные равенства:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^*(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}. \quad (6.1.5)$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Доказать, исходя из определения предела функции, что $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Областью определения функции является множество действительных чисел. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \delta$, будет выполняться неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Если $|x - 2| < \delta$, то $|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4 < \delta + 4$ и $|x^2 - 4| = |x - 2| \times$

$\times |x+2| < \delta \cdot (\delta+4)$. Для выполнения неравенства $|x^2-4| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta \cdot (\delta+4) = \varepsilon$, то есть $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$, откуда $\delta = -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$ (второй корень $-2 - \sqrt{4+\varepsilon}$ не подходит, так как δ должно быть положительным).

Таким образом, для любого ε найдено такое δ , что из неравенства $|x-2| < \delta$ следует неравенство $|x^2-4| < \varepsilon$, то есть $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

6.2.2 Доказать, исходя из определения предела, что $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2-1}{3x-1} = 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{9x^2-1}{3x-1}$. Областью определения функции является множество действительных чисел, за исключением точки $x=1/3$, то есть функция определена в проколотой окрестности этой точки. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - \frac{1}{3}| < \delta$, будет выполняться неравенство $\left| \frac{9x^2-1}{3x-1} - 2 \right| < \varepsilon$.

Последнее неравенство равносильно неравенству $|3x+1-2| < \varepsilon$ или $0 < \left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$, так как $x \neq \frac{1}{3}$. Следовательно, в качестве δ можно выбрать число $\delta = \varepsilon/3$. Таким образом, для любого положительного ε найдено такое $\delta = \varepsilon/3$, что из неравенства $0 < \left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$ будет выполняться неравенство $\left| \frac{9x^2-1}{3x-1} - 2 \right| < \varepsilon$, то есть $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{9x^2-1}{3x-1} = 2$.

6.2.3 Доказать, исходя из определения предела функции, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Областью определения функции является множество действительных чисел. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $M > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, будет выполняться неравенство $\left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Если $|x| > M$, то $x^2 > M^2$ и

$$\left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| = \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{M^2+1} < \frac{1}{M^2}.$$

Следовательно, для выполнения неравенства $\left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| < \varepsilon$ достаточно найти число M из условия $1/M^2 = \varepsilon$, то есть $M = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Итак, для любого положительного числа ε найдено такое число $M = 1/\sqrt{\varepsilon}$, что из выполнения неравенства $|x| > M$ следует неравенство $\left| \frac{x^2}{x^2+1} - 1 \right| < \varepsilon$, то есть доказано, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$.

6.2.4 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{2x-5}{7x+1}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-5}{7x+1} = \frac{2 \cdot 3 - 5}{7 \cdot 3 + 1} = \frac{1}{22}$.

6.2.5 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{раскладываем} \\ \text{числитель и знаменатель} \\ \text{на множители} \end{array} \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-1) \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

6.2.6 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{\sqrt{5x+1}-4}{3x^2-10x+3}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{3x^2-10x+3} = \left(\frac{0}{0} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{5x+1}-4) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x+1-16}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 \cdot (x-3)}{(3x-1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{(3x-1) \cdot (\sqrt{5x+1}+4)} = \frac{5}{8 \cdot 8} = \frac{5}{64}$.

6.2.7 Вычислить предел функции $f(x) = x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4})$ при значении $x \rightarrow \infty$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5+4} - \sqrt{x^5-4}) \right) = (\infty - \infty) =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{x^5 + 4} - \sqrt{x^5 - 4}) \cdot (\sqrt{x^5 + 4} + \sqrt{x^5 - 4})}{(\sqrt{x^5 + 4} + \sqrt{x^5 - 4})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x^5 + 4} + \sqrt{x^5 - 4}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^5}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x^5}}} = \frac{8}{1+1} = 4.
\end{aligned}$$

6.2.8 Вычислить предел функции $f(x) = \frac{\cos 14x - \cos 8x}{x^2}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. При нахождении предела функции воспользуемся первым замечательным пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 14x - \cos 8x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin 11x}{x^2} = \\
&= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \frac{\sin 11x}{11x} \cdot 11 \right) = -2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 11 = -66.
\end{aligned}$$

6.2.9 Вычислить предел функции $f(x) = (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Для определения предела функции воспользуемся первым и вторым замечательными пределами.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos 4x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + \cos 4x - 1)^{\frac{1}{\cos 4x - 1}} \right)^{\frac{\cos 4x - 1}{x^2}} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{x^2}} = e^{-2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4} = e^{-2 \cdot 1^2 \cdot 4} = e^{-8} = \frac{1}{e^8}.
\end{aligned}$$

6.2.10 Доказать, что функции $\frac{3x^2}{2x+5}$ и x^2 , бесконечно малые при $x \rightarrow 0$,

являются бесконечно малыми функциями одного порядка.

Решение. Найдём предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2}{2x+5} : x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2x+5} = \frac{3}{5} \neq 0.$$

Данные бесконечно малые функции есть бесконечно малые одного порядка.

6.2.11 Доказать, что порядок функции $\frac{5x^6}{2x^2-7}$ выше, чем порядок функции x^4 при $x \rightarrow 0$.

Решение. Находим предел отношения заданных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x^6}{2x^2 - 7} : x^4 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{2x^2 - 7} = \frac{0}{-7} = 0,$$

то есть функция $\frac{5x^6}{2x^2 - 7}$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем функция x^4 .

6.2.12 Доказать, что функция $1 - \cos x$ будет бесконечно малой второго порядка относительно функции x при $x \rightarrow 0$.

Решение. Найдём предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x/2) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Найдём теперь $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, функция $1 - \cos x$ есть бесконечно малая второго порядка относительно x при $x \rightarrow 0$.

6.2.13 Доказать, что бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции $\frac{3x}{3+x^2}$ и $\frac{3x}{3+x}$

эквивалентны.

Решение. Найдём предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{3+x^2} : \frac{3x}{3+x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+x}{3+x^2} = 1.$$

Следовательно, $\frac{3x}{3+x^2} \sim \frac{3x}{3+x}$ при $x \rightarrow 0$.

6.2.14 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{-5x} - 1}$, используя эквивалентные бесконечно

малые функции.

Решение. Поскольку $\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$ при $x \rightarrow 0$, а $e^{-5x} - 1 \sim (-5x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{e^{-5x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-5x} = -\frac{2}{5}.$$

6.3 Задания для решения на практических занятиях

6.3.1 Пользуясь определением предела функции, доказать, что:

$$\text{6.3.1.1 } \lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5. \quad \text{6.3.1.2 } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 - 36}{x + 3} = -24. \quad \text{6.3.1.3 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2.$$

6.3.2 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^3 + x + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 5x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 7x^2 + 2}{2x^3 - x - 12}$.

6.3.3 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3x^2 - 4}{8 - x^3}$.

6.3.4 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{12}{1-x^2} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

6.3.5 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x^2 - 100}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+22} - 5}{x^2 + 3x - 18}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{64+x} - \sqrt{64-x}}{\sqrt[3]{64+x} - \sqrt[3]{64-x}}$.

6.3.6 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{4x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 2x}{3x^2}$;
д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(7x-14)}{2x^2 - 5x + 2}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$.

6.3.7 Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2x-1) - \ln(2x-5))$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{1/x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{2/x}$.

6.3.8 Доказать, что функции $\frac{x-1}{x+1}$ и $\sqrt{x}-1$, бесконечно малые при $x \rightarrow 1$,

являются бесконечно малыми функциями одного порядка.

6.3.9 Доказать, что порядок функции $\frac{2x^3}{x-9}$ выше, чем порядок функции

x^2 при $x \rightarrow 0$.

6.3.10 Доказать, что функция $\operatorname{tg} x - \sin x$ будет бесконечно малой третьего порядка относительно функции x при $x \rightarrow 0$.

6.3.11 Доказать, что бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции x и $\ln(1 + \sqrt{x \cdot \sin x})$ эквивалентны.

6.3.12 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - \cos 3x}{\arcsin^2 5x}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

6.3.13 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - e^{2x}}{\sin 6x - \sin 2x}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

6.3.14 Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

6.3.15 Найти предел $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Найти указанные пределы (при нахождении последнего предела своего варианта необходимо использовать бесконечно малые функции).

6.4.1.1 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 12}{5x^2 + 6x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4x - 12}{3x^2 - 3x - 18}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+6} - 1}{x^2 - 4x - 45}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+5} \right)^{4x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 4x}$.

6.4.1.2 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 13}{5x^3 + 3x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^2 + 2x - 20}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x^2 + 2x - 35}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(x-5)}{x^3 - 125}$.

6.4.1.3 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x + 9}{3x^3 - 7x^2 + 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 + 2x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 + 2x - 3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{6x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{8x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{x^3 + 7x^2}$.

6.4.1.4 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 10}{2x^2 - 2x - 25}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{2x^2 - 3x - 35}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{2x^2 - 7x - 4}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x+2} \right)^{x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\operatorname{tg} 9x}$.

6.4.1.5 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 3}{4x^2 - 3x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 7x - 30}{x^2 + x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x^2 + 2x - 48}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x+7}{10x-22} \right)^{3x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\ln(1+4x)}$.

6.4.1.6 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 1}{5x^2 + 2x^2 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2x^2 - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - 2x - 15}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x - \sin x}{5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+8x)}{\sin 4x}$.

6.4.1.7 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 6x^2 - x}{-5x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{2x^2 + 3x + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{8 \cdot x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 5x}$.

6.4.1.8 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 1}{3x^3 - 5x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 2x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 20} - 6}{2x^2 + 2x - 24}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 6x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x + 1} \right)^{2x-1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$.

6.4.1.9 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{3x^3 - 3x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - x - 14}{x^2 + 2x - 8}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x^2 - 3x - 40}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{5x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x + 1} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 12x}{3x^2}$.

6.4.1.10 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 + 9}{2x^2 - 4x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 27}{-x^2 - x + 12}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 24} - 7}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\operatorname{tg} 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 4}{x + 1} \right)^{x-1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{x^2 + x - 6}$.

6.4.1.11 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 10}{2x^2 - 2x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 - 2x + 35}{2x^2 + 3x - 65}$; в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{-x^2 + 3x + 28}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{3x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 8}{x + 2} \right)^{x+6}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{1 - e^{6x}}$.

6.4.1.12 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 13}{3x^3 + 3x - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4x + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{4x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 4}{x} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 7x}$.

6.4.1.13 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 6x + 1}{4x^2 - 2x^2 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 3x^2 - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 + 11} - 6}{x^2 - 2x - 15}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x + 3} \right)^{7x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin 2x}$.

6.4.1.14 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 5x^3 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - 2x + 8}{2x^2 - 5x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 24} - 5}{3x^2 - 2x - 1}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\sin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 4} \right)^{x-4}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(2x + 1)}$.

- 6.4.1.15** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 - 9}{-x^2 + 4x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x^2 + 27}{x^2 + x - 12}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 - 7} - 3}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{x+1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sin 4x}$.
- 6.4.1.16** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{6x^2 + 2x^2 - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + x^2 - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x^2 - 2x - 3}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8}{\operatorname{tg}(2-x)}$.
- 6.4.1.17** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^3 + 2x^2 + 3}{x^3 - 3x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x^2 + x + 3}{4x^2 + x - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x+12}}{-x^2 + x + 12}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+3} \right)^{5x+1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\ln(1+3x)}$.
- 6.4.1.18** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{6x^3 + 5x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 - 3x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 20} - 6}{x^2 - 2x - 8}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-4} \right)^{3x-4}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(5x-5)}{2 \operatorname{tg}(4x-4)}$.
- 6.4.1.19** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 3x^2 - 1}{3x^2 - 6x - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 - 4x - 4}{2x^2 + 3x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{-x^2 + 4x - 4}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x+5} \right)^{x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\ln(1+6x)}$.
- 6.4.1.20** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 9}{3x^2 - 4x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{-x^2 + x + 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 24} - 7}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{4x+1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 3x)}{\ln(1 + \sin 4x)}$.
- 6.4.1.21** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3x + 9}{-5x^3 + 7x^2 + 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^2 + 3x + 2}{-x^2 + 3x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{-2x^2 + 3x + 9}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-2}{2x+5} \right)^{3x+1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 - 4x}$.
- 6.4.1.22** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 2x^2 + 13}{2x^3 - 3x - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+9}{4x+3} \right)^{6x-1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

- 6.4.1.23** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2 + 7x + 30}{2x^2 + x - 15}$; в) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+9} - 2}{x^2 - x - 30}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+3} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^4 - x^2}$.
- 6.4.1.24** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 + 11}{2x^2 - 6x + 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 4x - 16}{x^2 + 3x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{x^2 + 4x + 3}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-3}{6x+9} \right)^{5x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 1}{x^2 - x}$.
- 6.4.1.25** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 8x^2 - x}{-2x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 4x + 5}{4x^2 - 3x - 7}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin 3x}{5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-4}{5x+3} \right)^{x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$.
- 6.4.1.26** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 9}{5x^3 + 7x^2 + 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{3x^2 + x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{2x^2 - 3x - 9}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+4} \right)^{4x+1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x \cdot \operatorname{sh} 4x}$.
- 6.4.1.27** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3}{2x^3 - 3x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 2x - 16}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - \sqrt{x^2 - 9}}{-x^2 - 3x + 40}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \cdot \operatorname{tg} 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x} \right)^{2x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 10x}{\operatorname{tg} 2x}$.
- 6.4.1.28** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 3x - 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 + x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4x - 5}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+3} \right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{sh} 4x}$.
- 6.4.1.29** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{x^2 - 8x - 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x^2 + 3x + 10}{x^2 - x - 20}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{-x^2 + 2x + 8}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{7x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^{x+3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{ch} 2x - 3}{\operatorname{tg} 6x}$.
- 6.4.1.30** а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 8x^2 + x}{-2x + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 + 3x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{4 \cdot x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+3} \right)^{3x-7}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(5x-5)}{\operatorname{tg}(7x-7)}$.

7 НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ (практическое занятие 25)

Содержание: непрерывность функции в точке и на множестве, точки разрыва, односторонняя непрерывность, классификация точек разрыва, свойства функций, непрерывных на отрезке, равномерная непрерывность.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 7.1.1 Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если выполняется три условия:

- 1) существует значение функции в этой точке $f(x_0)$;
- 2) существует предел функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 7.1.2 Точка x_0 называется *точкой разрыва* для функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из условий непрерывности функции в этой точке нарушается.

Определение 7.1.3 Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если малые приращения функции вызывают малые приращения аргумента, то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Определение 7.1.4 Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Приведём теоремы о непрерывности функций, которые характеризуют функции, полученные в результате арифметических операций над непрерывными функциями.

Теорема 7.1.1 Функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 7.1.2 Если функция непрерывна в точке, то существует окрестность точки, в которой функция сохраняет знак значения функции в точке.

Теорема 7.1.3 Многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ является непрерывной функцией на множестве действительных чисел.

Теорема 7.1.4 Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0 , то в этой точке будут непрерывны функции $f_1(x) \pm f_2(x)$ и $f_1(x) \cdot f_2(x)$. Если, при этом $f_2(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 будет непрерывна функция $f_1(x)/f_2(x)$.

Теорема 7.1.5 Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на некотором множестве D , а E – множество её значений, то на множестве E будет монотонна и непрерывна обратная к ней функция $x = f^{-1}(x)$.

Теорема 7.1.6 Элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Теорема 7.1.7 (Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция достигает на нём точной верхней и точной нижней граней.

Теорема 7.1.8 (Больцано–Коши о промежуточном значении). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$, то для любого значения C , такого, что $A \leq C \leq B$, существует точка $c \in [a; b]$, для которой $f(c) = C$.

Определение 7.1.5 Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Проведём классификацию точек разрыва:

1) если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, то x_0 – *точка разрыва первого рода*;

2) если хотя бы один из пределов левосторонний или правосторонний в точке x_0 не существует, то x_0 – *точка разрыва второго рода*;

3) если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, а значение функции в этой точке не существует, то точка x_0 – *точка устранимого разрыва*.

В случае устранимого разрыва можно доопределить функцию «по непрерывности», положив значение функции в ней равным пределу функции в точке разрыва.

Определение 7.1.6 Функция $y = f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых эта функция имеет разрыв первого рода или устранимый разрыв, и, кроме того, она имеет односторонние пределы на концах отрезка.

Функция называется *кусочно-непрерывной на числовой прямой*, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке прямой.

Среди множества непрерывных функций выделяются равномерно непрерывные функции.

Определение 7.1.7 Функция $y = f(x)$ называется *равномерно-непрерывной* на множестве $D \subset \mathbf{R}$, если для любого положительного ε найдётся положительное число δ , такое, что для любых $x_1, x_2 \in D$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Теорема 7.1.9 (Кантора). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно-непрерывна на этом отрезке.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 7.1.3), доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ непрерывна в произвольной точке x .

Решение. По определению $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Находим приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 3 \cdot (x + \Delta x)^2 - 4 \cdot (x + \Delta x) + 2 - 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 2 = 3 \cdot \Delta x^2 + (6x - 4) \cdot \Delta x$.

Найдём теперь предел $\Delta f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 \cdot \Delta x^2 + (6x - 4) \cdot \Delta x) = 0,$$

что и доказывает непрерывность заданной функции $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ при любом значении x .

7.2.2 Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 7.1.3), доказать, что функция $f(x) = \sin 2x$ непрерывна в произвольной точке x .

Решение. По определению $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$.

Находим приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin 2(x + \Delta x) - \sin 2x = 2 \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{2} \cdot \cos \frac{2x + 2\Delta x + 2x}{2} = 2 \cdot \sin \Delta x \cdot \cos(2x + \Delta x)$.

Найдём теперь предел $\Delta f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 \cdot \sin \Delta x \cdot \cos(2x + \Delta x)) = 2 \cdot 0 \cdot \cos 2x = 0,$$

что и доказывает непрерывность заданной функции $f(x) = \sin 2x$ при любом значении x .

7.2.3 Выяснить, является ли непрерывной в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}$ функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть x_0 — любое действительное число, отличное от нуля. Тогда, так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2 \neq 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 - \cos 2x) = 1 - \cos 2x_0$, то по утверждению о пределе частного имеем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{1 - \cos 2x_0}{x_0^2} = f(x_0).$$

Следовательно, данная функция непрерывна в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, если $x_0 \neq 0$.

Пусть $x_0 = 0$. Найдём предел функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 x}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2.$$

Поэтому, если $f(0) = A = 2$, данная функция непрерывна в точке $x = 0$, а если $f(0) = A \neq 2$, функция не является непрерывной в точке $x = 0$.

Итак, при $A = 2$ данная функция непрерывна в каждой точке $x \in \mathbf{R}$, а при $A \neq 2$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = 0$.

7.2.4 Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 4, \\ x + 3, & \text{если } x > 4, \end{cases}$ на непрерывность.

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 4)$ и $(4; +\infty)$, так как на этих интервалах она задана элементарными непрерывными функциями. Следовательно, если и существуют точки разрыва, то они могут быть лишь в точках перехода от одной элементарной функции к другой, то есть в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

В точке $x = 1$ значение функции равно $f(1) = x^2 \Big|_{x=1} = 1$. Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1^2 = 1.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) = 1$, то функция $f(x)$ в точке $x = 1$ является непрерывной.

В точке $x = 4$ значение функции равно $f(4) = x^2 \Big|_{x=4} = 16$. Найдём левосторонний и правосторонний пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16, \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 3) = 4 + 3 = 7.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x)$, то функция $f(x)$ в точке $x = 4$ имеет разрыв первого рода.

7.2.5 Исследовать функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$ в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Решение. В точке $x = 0$ значение функции равно $f(0) = 2^{\frac{1}{1-0}} = 2$. Предел функции в этой точке $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{1-x}} = 2$. Следовательно, справедливо равенство $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$. По определению непрерывности функции в точке, в точке $x = 0$ функция является непрерывной.

Исследуем функцию на непрерывность в точке $x = 1$. В этой точке значение функции не определено. Следовательно, данная точка является точкой разрыва. Найдём односторонние пределы функции в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left(2^{\frac{1}{+0}} \right) = \left(2^{+\infty} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{1-x}} = \left(2^{\frac{1}{-0}} \right) = \left(2^{-\infty} \right) = 0.$$

Так как левосторонний предел функции в точке $x = 1$ равен бесконечности, то в данной точке функция $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$ терпит разрыв второго рода.

7.2.6 Исследовать функцию $f(x) = \frac{\cos 4x - 1}{x^2}$.

Решение. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В точке $x = 0$ значение функции не определено. Найдём предел функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 2x}{x^2} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4 = -2 \cdot 1^2 \cdot 4 = -8.$$

Так как предел функции в точке $x = 0$ существует, а значение функции в этой точке не существует, то точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва. Доопределим функцию «по непрерывности»»

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 4x - 1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ -8, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Пользуясь вторым определением непрерывности функции (определение 7.1.3), доказать, что функции $f(x) = 5^x$ и $\varphi(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ непрерывны в произвольной точке x .

7.3.2 Доказать, что при $x = 3$ функция $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ непрерывна.

7.3.3 Выяснить, является ли непрерывной в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}$ функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x + \sin 2x}{5x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

7.3.4 Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность (в случае наличия точек устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»). Сделать схематический чертёж графика функции, по крайней мере, в окрестности точек разрыва.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ x+4, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq -2, \\ 1+x, & \text{если } -2 < x < 4, \\ 2x-3, & \text{если } x \geq 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = 5^{\frac{7}{3-4x+x^2}} + 2;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{2+3x}{x^2-4};$$

$$\text{д) } f(x) = \frac{\operatorname{tg}(5x-5)}{x^2-1};$$

$$\text{е) } f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность (в случае наличия точек устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»). Сделать схематический чертёж графика функции, по крайней мере, в окрестности точек разрыва.

$$7.4.1.1 \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если } x < -1, \\ x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ -x+5, & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad 7.4.1.2 \quad f(x) = \begin{cases} -2x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 2x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$7.4.1.3 \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x^2-9}} - 4. \quad 7.4.1.4 \quad f(x) = \frac{5x}{x^2-9}.$$

$$7.4.1.5 \quad f(x) = \frac{\sin 3x - \sin 4x}{5x}. \quad 7.4.1.6 \quad f(x) = \frac{1/x}{1/(x-1)}.$$

$$7.4.1.7 \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x < 1, \\ 2x, & \text{если } 1 \leq x < 3, \\ -x+5, & \text{если } x \geq 3. \end{cases} \quad 7.4.1.8 \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$7.4.1.9 \quad f(x) = \frac{1-x}{x^2+2x}. \quad 7.4.1.10 \quad f(x) = 3^{\frac{1}{x^2-x}} + 2.$$

$$7.4.1.11 \quad f(x) = \frac{2/x}{1/(x+1)}. \quad 7.4.1.12 \quad f(x) = \frac{\sin 2x + \sin 3x}{4x}.$$

$$7.4.1.13 \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 2, \\ 5-x, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ x^2+2, & \text{если } x > 3. \end{cases} \quad 7.4.1.14 \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ x^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$7.4.1.15 \quad f(x) = 5 - 3^{\frac{2}{x^2-16}}. \quad 7.4.1.16 \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2-16}.$$

$$7.4.1.17 \quad f(x) = \frac{\cos 5x - \cos x}{2x^2}. \quad 7.4.1.18 \quad f(x) = \frac{3/(x+1)}{4/(x-3)}.$$

$$7.4.1.19 \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x \leq 1, \\ x, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ x^2, & \text{если } x > 3. \end{cases} \quad 7.4.1.20 \quad f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x < 1, \\ x^4, & \text{если } 1 \leq x \leq 2, \\ 7x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$7.4.1.21 \quad f(x) = 1 + \frac{3+2x}{x^2-3x}. \quad 7.4.1.22 \quad f(x) = 9^{\frac{3}{x^2-1}} + 2.$$

$$7.4.1.23 \quad f(x) = \frac{4/x}{7/(x+5)}. \quad 7.4.1.24 \quad f(x) = \frac{\cos 6x - 1}{3x^2}.$$

$$7.4.1.25 \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq -2, \\ -x^2, & \text{если } -2 < x < 2, \\ -x + 5, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad 7.4.1.26 \quad f(x) = \begin{cases} 3 + 2x, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 2x, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

$$7.4.1.27 \quad f(x) = 6 - 2^{\frac{3}{25-x^2}}.$$

$$7.4.1.28 \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 36} + 5.$$

$$7.4.1.29 \quad f(x) = \frac{\cos x - 1}{4x^2}.$$

$$7.4.1.30 \quad f(x) = \frac{9/(x-3)}{2/(x+2)}.$$

8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (практическое занятие № 26)

Содержание: производная функции, основные правила дифференцирования, таблица производных элементарных функции, производная сложной функции, производная обратных функций, производная функции, заданной неявно, логарифмическое дифференцирование.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x . Если фиксированное значение аргумента x получит приращение Δx , то функция также получит приращение $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение 8.1.1 Производной функции $y = f(x)$ в произвольно фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к нулю, и если этот предел существует и конечен.

$$y' = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (8.1.1)$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Для нахождения производной от заданной функции $y = f(x)$, согласно определению, необходимо выполнить следующие действия:

1) придав фиксированному аргументу $x \in D(f)$ приращение Δx , вычислить значение функции $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$;

2) найти соответствующее значение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) составить отношение приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

4) найти предел данного отношения при значении $\Delta x \rightarrow 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Теорема 8.1.1 Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ являются дифференцируемыми функциями в точке x , то есть существует производная функций в этой точке.

Основные правила дифференцирования

- 1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
- 2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
- 3) $(C \cdot v)' = C \cdot u'$,
- 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$.

Таблица производных основных элементарных функций

- 1) $C' = 0$ ($C = \text{Const}$);
- 2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ($n \in \mathbb{R}$);
- 3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$);
- 4) $(e^x)' = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$);
- 5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$);
- 6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$);
- 7) $(\sin x)' = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$);
- 8) $(\cos x)' = -\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$);
- 9) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$);
- 10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ($x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$);
- 11) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$);
- 12) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($|x| < 1$);
- 13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$);
- 14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$);
- 15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ ($x \in \mathbb{R}$);
- 16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ ($x \in \mathbb{R}$);
- 17) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ ($x \in \mathbb{R}$);
- 18) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ ($x \neq 0$).

Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс. Исходя из геометрического смысла производной и уравнения прямой с заданным угловым коэффициентом и проходящей через точку, получаем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (8.1.2)$$

Уравнение нормали (прямой, перпендикулярной касательной, проведённой в точке касания) имеет вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (8.1.3)$$

Производная сложной функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Производная обратной функции: если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = \eta(y)$, производная которой отлична от нуля, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Говорят, что функция $y = f(x)$ неявно задана уравнением $F(x; y) = 0$, если $F(x; f(x)) = 0$. Для нахождения производной функции $y = f(x)$ необходимо последнее тождество продифференцировать по переменной x , считая левую часть тождества как сложную функцию от переменной x , а затем полученное уравнение разрешить относительно производной $f'(x)$.

Логарифмическое дифференцирование: логарифмическое дифференцирование применяется при нахождении производной показательно-степенной и дробно-рациональной функции; логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, то есть

$$(\ln(f(x)))'_x = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Применение предварительного логарифмирования часто упрощает нахождение производной. Например, при нахождении производной показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$ предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x).$$

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Найти, по определению, производную функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 4$.

Решение: находим приращение функции в заданной точке, а затем, воспользовавшись определением 8.1.1, вычисляем производную.

$$\Delta f(4) = f(4 + \Delta x) - f(4) = (4 + \Delta x)^2 - 4^2 = 16 + 8\Delta x + \Delta x^2 - 16 = 8\Delta x + \Delta x^2,$$

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8 + \Delta x) = 8.$$

8.2.2 Доказать, что $(\cos 2x)' = -2 \cdot \sin 2x$.

Решение. Для доказательства равенства воспользуемся определением 8.1.1.

$$\begin{aligned} (\cos 2x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x + 2\Delta x) - \cos 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x + 2x}{2} \cdot \sin \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{2}}{\Delta x} = \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + \Delta x) \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(2x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -2 \sin 2x \cdot 1 = -2 \sin 2x. \end{aligned}$$

8.2.3 Найти производные указанных функций:

а) $y = 7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x$; б) $y = \operatorname{tg} x \cdot 5^x$; в) $y = \frac{\cos x}{e^x}$.

Решение.

а) $y' = \left(7x^5 + 3\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + 4\sin x \right)' = 35x^4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}} + 4\cos x$;

б) $y' = (\operatorname{tg} x \cdot 5^x)' = (\operatorname{tg} x)' \cdot 5^x + (5^x)' \cdot \operatorname{tg} x = \frac{5^x}{\cos^2 x} + 5^x \cdot \ln 5 \cdot \operatorname{tg} x$;

в) $y' = \left(\frac{\cos x}{e^x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot e^x - (e^x)' \cdot \cos x}{(e^x)^2} = \frac{-\sin x \cdot e^x - e^x \cdot \cos x}{e^{2x}} = -\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$.

8.2.4 Найти производные указанных функций:

а) $y = e^{\sin^5 7x}$; б) $y = \cos^4 9x \cdot 5^{x^2}$; в) $y = \frac{\sin^3 8x}{(x^2 + 4)^3}$.

Решение.

а) $y' = \left(e^{\sin^5 7x} \right)' = e^{\sin^5 7x} \cdot (\sin^5 7x)' = e^{\sin^5 7x} \cdot 5 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot (7x)' =$
 $= e^{\sin^5 7x} \cdot 5 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot 7 = 35 \cdot e^{\sin^5 7x} \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x$;

б) $y' = (\cos^4 9x \cdot 5^{x^2})' = (\cos^4 9x)' \cdot 5^{x^2} + (5^{x^2})' \cdot \cos^4 9x =$
 $= 4\cos^3 9x (\cos 9x)' 5^{x^2} + 5^{x^2} \ln 5 (x^2)' \cos^4 9x = 5^{x^2} \cos^3 9x (-36\sin 9x + 2x \ln 5 \cos 9x)$;

в) $y' = \left(\frac{\sin^3 8x}{(x^2 + 4)^3} \right)' = \frac{(\sin^3 8x)' \cdot (x^2 + 4)^3 - ((x^2 + 4)^3)' \cdot \sin^3 8x}{((x^2 + 4)^3)^2} =$
 $= \frac{24\sin^2 8x \cos 8x (x^2 + 4)^3 - 6x(x^2 + 4)^2 \sin^3 8x}{((x^2 + 4)^3)^2} = \frac{6\sin^2 8x (4\cos 8x (x^2 + 4) - x \sin 8x)}{(x^2 + 4)^4}$.

8.2.5 Найти эластичность спроса s относительно цены p , если $s(p) = 4 + 8p - 2p^2$, при значении $p = 1$ и $p = 3$ у. е.

Решение. Находим производную $s'(p) = (4 + 8p - 2p^2)' = 8 - 4p$. Тогда эластичность спроса относительно цены равна $E_s(p) = \frac{p}{s} \cdot s' = \frac{8p - 4p^2}{4 + 8p - 2p^2}$.

При значении $p=1$ получаем, что эластичность принимает значение, равное $E_s(p)=0,4$. Это означает, что если цена товара возрастёт на 1 %, то есть с 1 у. е. до 1,01 у. е., то спрос увеличится на 0,4 %.

При значении $p=3$ получаем, что эластичность принимает значение, равное $E_s(p)=-1,2$. Это означает, что если цена товара возрастёт на 1 %, то есть с 1 у. е. до 3,01 у. е., то спрос уменьшится на 1,2 %.

8.2.6 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - x$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. Так как $y' = 2x - 1$, то $y'(3) = 5$. Значение функции в заданной точке равно $y(3) = 6$. Для записи уравнения касательной воспользуемся уравнением (8.1.2): $y - 6 = 5 \cdot (x - 3)$ или $5x - y - 9 = 0$. Для записи уравнения нормали воспользуемся уравнением (8.1.3): $y - 6 = -\frac{1}{5}(x - 3)$ или $x + 5y - 33 = 0$.

8.2.7 Найти производную функции y , заданной неявно, следующим уравнением: $3x^2 - 4y^3 + 5x^3y^4 = 6$.

Решение. Дифференцируем обе части заданного выражения, считая y функцией от переменной x :

$$\begin{aligned} (3x^2 - 4y^3 + 5x^3y^4)'_x &= 6'_x \\ 6x - 12y^2y' + 15x^2y^4 + 20x^3y^3y' &= 0 \end{aligned}$$

Из этого равенства выражаем y' :

$$y' = \frac{6x + 15x^2y^4}{12y^2 - 20x^3y^3}.$$

8.2.8 Найти производную функции $y = x^{\sin 2x}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем $\ln y = \sin 2x \ln x$. Дифференцируем обе части последнего равенства по переменной x :

$$(\ln y)'_x = (\sin 2x)'_x \ln x + \sin 2x (\ln x)'_x \text{ или } \frac{y'}{y} = 2 \cdot \cos 2x \cdot \ln x + \sin 2x \cdot \frac{1}{x}.$$

Окончательно имеем

$$y' = y \cdot \left(2 \cdot \cos 2x \cdot \ln x + \frac{\sin 2x}{x} \right) = x^{\sin 2x} \cdot \left(2 \cdot \cos 2x \cdot \ln x + \frac{\sin 2x}{x} \right).$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Воспользовавшись определением производной, найти производную функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

8.3.2 Доказать, используя определение производной функции в произвольной точке, что $(\sin 3x)' = 3 \cdot \cos 3x$, а $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$.

8.3.3 Найти производные указанных функций:

а) $y = 4x^3 + 5\sqrt{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^7}} + 4\ln x - 2^x$; б) $y = 2\cos x - 3\operatorname{ch} x + e$; в) $y = e^x \operatorname{sh} x$;

г) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{arctg} x$; д) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}$; е) $y = \frac{\sin x}{3^x}$; ж) $y = x^3 \cdot \sin x + \frac{\arccos x}{\sqrt{x}}$.

8.3.4 Найти эластичность спроса s относительно цены p , если $s(p) = 8 + 4p - 2p^2$, при значении $p = 1$ и $p = 12$ у. е. Дать экономическую интерпретацию полученных значений эластичности.

8.3.5 Найти производные указанных функций:

а) $y = \sin^3 5x$; б) $y = 4^{\cos^3 6x}$; в) $y = \ln^2(e^{-3x} + \sqrt{\sin 3x})$; г) $y = (5^{x^3} - \operatorname{ctg}^2 3x)^2$;

д) $y = \operatorname{tg}^2 9x \cdot e^{x^2+2x+3}$; е) $y = \arcsin^3 5x \cdot \cos^2 x$; ж) $y = \frac{\operatorname{ch}^2 x^3}{\sin^4 x}$; з) $y = \frac{\operatorname{ctg}^5 3x}{\cos^2 \sqrt{x}}$.

8.3.6 Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt{x^3 + 1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

8.3.7 Найти все точки графика функции $y = (x + 2)/(x + 1)$, в каждой из которых касательная к этому графику образует угол 135° с положительным направлением оси абсцисс.

8.3.8 Найти угол между графиками функций $y = x^3 - x$ и $y = 12/x$ в точках их пересечения.

8.3.9 Найти производные функции y , заданных неявно следующими уравнениями

а) $\sin x^2 + \cos y^3 - e^{2x+3y} = 5$; б) $x^4 y^5 + \arcsin \frac{x^2}{y^3} = \pi$; $\frac{x^2}{y^3} - \cos(e^{4x-2y}) = \ln x^3$.

8.3.10 Найти производные указанных функции:

а) $y = (\cos 2x)^{\sin 3x}$; б) $y = (x^2 + 9)^{\operatorname{tg} 5x}$; в) $y = (\sqrt{x})^{\operatorname{ctg} 2x}$; г) $y = (2x + 1)^{(3x+2)^{(4x+3)}}$.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Продифференцировать заданные функции.

8.4.1.1 а) $y = \sin 2x \cdot \ln 8x - \frac{5 \operatorname{tg} 7x}{\cos 4x}$; б) $y = (\cos 5x)^{\arcsin 4x}$.

8.4.1.2 а) $y = \sin^2 2x \cdot \cos 8x + \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 4x}}{\ln x^2}$; б) $y = (\operatorname{cth} 2x)^{\arcsin 3x}$.

- 8.4.1.3 a) $y = \sin 3x \cdot \cos^2 3x + \frac{4e^{\operatorname{sh} 5x}}{\operatorname{tg} 2x}$; б) $y = (\cos 2x)^{\ln 3x}$.
- 8.4.1.4 a) $y = x^2 \cdot \cos^3 4x - \frac{\sin 2x}{\ln 8x}$; б) $y = (\sin 9x)^{\arccos 2x}$.
- 8.4.1.5 a) $y = 2^{\operatorname{sh} 5x} \cdot \arccos 7x + \frac{e^{3x}}{\sin 2x}$; б) $y = (\operatorname{th} 3x)^{\arcsin 9x}$.
- 8.4.1.6 a) $y = \ln^2 x \cdot \operatorname{arctg}^4 5x + \frac{(2x+1)^3}{e^{3x}}$; б) $y = (\operatorname{sh} 2x)^{\arcsin 7x}$.
- 8.4.1.7 a) $y = \cos 2x \cdot \operatorname{tg}^2 x - \frac{\operatorname{ch} 8x}{(3x-1)^2}$; б) $y = (\cos 2x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$.
- 8.4.1.8 a) $y = \sin^2 2x \cdot (3x-1)^2 + \frac{\cos x^3}{\ln(2-x)}$; б) $y = (\sqrt{x^3-1})^{\operatorname{arctg} 2x}$.
- 8.4.1.9 a) $y = e^{3x} \cdot \cos 5x - \frac{(2x+4)^3}{\ln^2 x}$; б) $y = (\ln 5x)^{\sin \sqrt{4x-1}}$.
- 8.4.1.10 a) $y = \operatorname{sh} x^2 \cdot e^{4x^2-1} - \frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} 6x}$; б) $y = (\log_2 4x)^{\operatorname{ctg} 6x}$.
- 8.4.1.11 a) $y = \sin^2 3x \cdot \cos 8x - \frac{\operatorname{ch}^2 4x}{\cos^3 5x}$; б) $y = (\operatorname{sh} 11x)^{\operatorname{arctg} 4x}$.
- 8.4.1.12 a) $y = \operatorname{th}^2 5x \cdot e^{x^3} - \frac{\ln 8x}{\sin 2x}$; б) $y = (\operatorname{sh} 9x)^{\operatorname{ctg} x^2}$.
- 8.4.1.13 a) $y = (3x-1)^3 \cdot \sin 2x + \frac{\operatorname{cth}^2 3x}{\log_2 x^2}$; б) $y = (\arcsin 8x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$.
- 8.4.1.14 a) $y = \ln \sin x \cdot \operatorname{tg}^2 4x - \frac{e^{3x}}{\cos^3 4x}$; б) $y = (\arccos 3x)^{\ln(x^2+1)}$.
- 8.4.1.15 a) $y = e^{4x} \cdot \operatorname{tg} 6x + \frac{\operatorname{ctg} x^3}{\ln(x^2-1)}$; б) $y = (\operatorname{arctg} 3x)^{\sin 3x}$.
- 8.4.1.16 a) $y = (e^{2x} - x) \sin 3x + \frac{\cos 5x}{\operatorname{arctg} 4x}$; б) $y = (\ln \sqrt{x})^{\operatorname{ctg} 4x}$.
- 8.4.1.17 a) $y = \operatorname{th} 3x \cdot \sin 7x - \frac{\operatorname{ctg} 3x}{(4-2x)^2}$; б) $y = (\operatorname{ctg} 4x)^{\sqrt[3]{4x-1}}$.
- 8.4.1.18 a) $y = \operatorname{ctg} x^2 \cdot \operatorname{arctg} 2x + \frac{\sin 5x}{\cos(2-x^2)}$; б) $y = (\operatorname{th} \sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 4x}$.
- 8.4.1.19 a) $y = \sin 2x \cdot e^{5x} - \frac{\cos 3x}{\arcsin 4x}$; б) $y = (\operatorname{cth} 5x)^{\arcsin 10x}$.

8.4.1.20 a) $y = \frac{1}{2} \cos 5x \cdot e^{4x-1} - \frac{(2x-1)^3}{5 \operatorname{tg} 2x};$	б) $y = (\operatorname{sh} 2x)^{\operatorname{arctg} 4x}.$
8.4.1.21 a) $y = \cos 2x \cdot \operatorname{tg}^3 x + \frac{2e^{4x}}{\sin 4x};$	б) $y = (\operatorname{cth} \sqrt{x})^{\sin 2x}.$
8.4.1.22 a) $y = \operatorname{ctg}^3 x \cdot e^{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{ch} 2x};$	б) $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\operatorname{th} 3x}.$
8.4.1.23 a) $y = \sin^2 5x \cdot \ln 3x + \frac{(2x-3)^4}{\operatorname{ctg} 6x};$	б) $y = (\operatorname{sh} \sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 2x}.$
8.4.1.24 a) $y = \cos 4x \cdot \ln^2 \sqrt{x} - \frac{\operatorname{ch} x^2}{\sqrt{6-x}};$	б) $y = (\operatorname{ctg} 9x)^{\operatorname{th} 7x}.$
8.4.1.25 a) $y = \operatorname{tg}^2 2x \cdot \ln 3x + \frac{\sin 4x}{\operatorname{ch}(x^2-1)};$	б) $y = (\arccos 6x)^{\sqrt{2x-3}}.$
8.4.1.26 a) $y = e^{3x} \cdot \operatorname{arctg} 2x + \frac{e^{4x}}{(2x-4)^2};$	б) $y = (\operatorname{th} x^2)^{\sqrt[3]{x^2}}.$
8.4.1.27 a) $y = e^{3x} \cdot \cos 4x - \frac{\sin 6x}{\operatorname{th}(2x-4)};$	б) $y = (\operatorname{ctg} 5x^2)^{\sin \sqrt{x}}.$
8.4.1.28 a) $y = e^{2x} \cdot \sin 2x + \frac{\operatorname{tg}(x^2-4)}{\operatorname{ch}(2-x)};$	б) $y = (\operatorname{tg} 2x^3)^{\ln 4x^2}.$
8.4.1.29 a) $y = e^{5x} \cdot \cos 4x + \frac{(3x-1)^2}{\sin 3x};$	б) $y = (\operatorname{ctg} 12x)^{\sin 4x}.$
8.4.1.30 a) $y = \frac{1}{6} x^3 \cdot e^{\sin 3x} - \frac{e^{5x^2}}{\cos(3x+5x^2)};$	б) $y = (\sin \sqrt[4]{x^3})^{\cos \sqrt{x}}.$

9 ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ (практическое занятие 27)

Содержание: производные высшего порядка, производные функций в случае зависимости переменных от параметра, геометрическое и механическое приложения производных, дифференциалы функции первого и высшего порядков, применение дифференциала к приближённым вычислениям.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Определение 9.1.1 *Производной второго порядка или второй производной* называется производная от производной первого порядка.

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = (y')' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

По индукции определяем производные высшего порядка.

Определение 9.1.2 Производной k -го порядка называется производная от производной $(k-1)$ -го порядка, то есть $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} = \left(y^{(k-1)} \right)' = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} \right)$.

Для вычисления производной любого порядка от произведения двух функций, минуя последовательное применение формулы для вычисления производной от произведения двух функций, удобно применять *формулу Лейбница*.

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}. \quad (9.1.1)$$

Если зависимость переменных задана в *параметрическом* виде уравнениями $y = y(t)$, $x = x(t)$, то производные первого и второго порядков вычисляются по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}. \quad (9.1.2)$$

Механический смысл производной: производная пути по времени есть скорость в данный момент времени, то есть

$$v_{\text{мех}} = \frac{ds}{dt}. \quad (9.1.3)$$

С механической точки зрения вторая производная пути по времени равна ускорению материальной точки в данный момент времени:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{dv}{dt}. \quad (9.1.4)$$

Определение 9.1.3 Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0 , если её приращение в этой точке $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad (9.1.5)$$

где A – некоторое действительное число; $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx , при значении $\Delta x \rightarrow 0$.

Теорема 9.1.1 Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$.

На основании теоремы 9.1.1 формула (9.1.5) принимает вид

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x). \quad (9.1.6)$$

Определение 9.1.4 Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная часть приращения функции в точке x_0 .

$$d(f(x_0)) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (9.1.7)$$

В частности, если $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$, и, следовательно, $df(x_0) = dx = \Delta x$, то есть дифференциал и приращение независимой переменной

равны между собой. Поэтому дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $d(f(x_0)) = f'(x_0) dx$.

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал $d(f(x_0))$ равен приращению ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ при приращении аргумента равном Δx .

Дифференциал функции $y = f(x)$ в произвольной точке x находится по формулам

$$d(f(x)) = f'(x) \cdot dx \text{ или } dy = y' dx. \quad (9.1.8)$$

Для дифференциала функции справедливы следующие правила вычисления дифференциала:

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1) $d(u \pm v) = du \pm dv;$ | 2) $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv;$ |
| 3) $d(C \cdot v) = C \cdot du,$ | 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0.$ |

Определение 9.1.5 Дифференциалом k -го порядка называется дифференциал от дифференциала $(k-1)$ -го порядка, то есть $d^k y = d(d^{k-1} y) = y^{(k)} dx$.

Из определения дифференциала и формулы (9.1.7) следует

$$\Delta f(x_0) = d f(x_0) + o(\Delta x),$$

то есть дифференциал функции в точке x_0 отличается от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx , при значении $\Delta x \rightarrow 0$. На основании этого, дифференциал функции можно использовать для вычисления приближённых значений функции. Действительно, заменяя приращение функции в точке x_0 её дифференциалом, получаем приближённую формулу

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx. \quad (9.1.9)$$

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Найти производные и дифференциалы первого и второго порядка для функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Находим первую производную $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Тогда дифференциал первого порядка равен $dy = y' dx = \sin 2x dx$. Находим производную второго порядка $y'' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x$. Тогда дифференциал второго порядка равен $d^2 y = y'' dx^2 = 2 \cos 2x dx^2$.

9.2.2 Найти скорость и ускорение точки, совершающей простые гармонические колебания по закону $s = A \sin(\omega t + \varphi)$.

Решение: Воспользуемся формулами (9.1.3) и (9.1.4).

$$v = \frac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s.$$

9.2.3 Найти производные y'_x и y''_{xx} для функции, заданной уравнениями:
 $y = e^{10t}$, $x = e^{2t}$.

Решение. Используя формулы (9.1.2) нахождения производных функций, заданных параметрическим образом, имеем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(e^{10t})'_t}{(e^{2t})'_t} = \frac{10e^{10t}}{2e^{2t}} = 5e^{8t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(5e^{8t})'_t}{(e^{2t})'_t} = \frac{40e^{8t}}{2e^{2t}} = 20e^{6t}.$$

9.2.4 Найти $y^{(5)}$, если $y = e^{4x} \sin 3x$.

Решение. Если $y = uv$, то на основании формулы Лейбница (9.1.1), имеем

$$y^{(5)} = u^{(5)}v + C_5^1 u^{(4)}v' + C_5^2 u'''v'' + C_5^3 u''v''' + C_5^4 u'v^{(4)} + uv^{(5)}. \quad (9.2.1)$$

Полагая в заданной функции $u = e^{4x}$, $v = \sin 3x$, для применения последней формулы нам следует найти первые пять последовательных производных функций u и v :

$$u' = 4e^{4x}; u'' = 16e^{4x}; u''' = 64e^{4x}; u^{(4)} = 256e^{4x}; u^{(5)} = 1024e^{4x}; \\ v' = 3\cos 3x; v'' = -9\sin 3x; v''' = -27\cos 3x; v^{(4)} = 81\sin 3x; v^{(5)} = 243\cos 3x.$$

Подставляя эти производные в формулу (9.2.1), получим

$$y^{(5)} = 1024e^{4x} \sin 3x + 5 \cdot 256e^{4x} \cdot 3\cos 3x + 10 \cdot 64e^{4x} \cdot (-9\sin 3x) + 10 \cdot 16e^{4x} \times \\ \times (-27\cos 3x) + 5 \cdot 4e^{4x} \cdot 81\sin 3x + e^{4x} \cdot 243\cos 3x = -e^{4x} (3116\sin 3x + 237\cos 3x).$$

9.2.5 Получить формулу для производной n -го порядка функции $y = \ln x$. Доказать методом математической индукции справедливость формулы для любого натурального числа.

Решение. Найдём производные первых порядков и по их виду предположим формулу нахождения производной функции любого порядка.

$$y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}, y''' = \frac{1 \cdot 2}{x^3}, y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, \dots, y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Методом математической индукции докажем, что формула нахождения производной функции $y = \ln x$ имеет вид: $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

1. Проверим справедливость формулы при $n=1$: $y' = (-1)^0 \frac{0!}{x^1} = \frac{1}{x}$ – верно.

2. Предположим, что утверждение справедливо для любого натурального числа k , то есть $y^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$ – истина.

3. Исходя из предположения, что формула справедлива для $n=k$, докажем истинность утверждения для $n=k+1$, то есть $y^{(k+1)} = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$ – истина:

$$y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = \left((-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k} \right)' = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)! \cdot (-k)}{x^{k+1}} = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

По методу математической индукции утверждение справедливо для любого натурального числа

9.2.6 С помощью дифференциала приближённо вычислить значение квадратного корня из 8,88 с точностью до двух знаков после запятой.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и вычислим её значение в точке $x = 8,88$, то есть найдём значение функции $f(8,88) = \sqrt{8,88}$. Воспользуемся формулой $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$, где $x_0 + \Delta x = x$. Положим, что $x_0 = 9$, тогда $\Delta x = x - x_0 = 8,88 - 9 = -0,12$. Значение функции в точке $x_0 = 9$ равно $f(9) = \sqrt{9} = 3$. Значение производной $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 9$ равно $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$. Следовательно, $\sqrt{8,88} \approx 3 + \frac{1}{6} \cdot (-0,12) = 2,98$.

9.2.7 Функция общих затрат предприятия определяется эмпирической функцией $C(v) = 1,77v^2 - 0,59v + 6$, которая зависит от объёма продаж v . Определить приближённое значение изменения затрат предприятия при изменении объёмов продаж от 500 условных единиц товара до 525.

Решение. При достаточно малых изменениях объёмов продаж товара изменение затрат предприятия равно $\Delta C(v_0) \approx dC(v_0) = C'(v_0)dv = C'(v_0)\Delta v$. Изменение объёмов продаж составляет $\Delta v = 525 - 500 = 25$ условных единиц товара. Так как $C'(v) = 3,54v - 0,59$, то $C'(500) = 1769,41$. Тогда изменение затрат предприятия, при увеличении объёма продаж на 25 единиц, равно $\Delta C \approx 1769,41 \cdot 25 = 44235,25$.

Вывод: при увеличении объёма продукции на 25 условных единиц товара затраты предприятия увеличатся на 44235,25 условные денежные единицы.

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти производные и дифференциалы первого и второго порядков для указанных функций: а) $y = \arctg 2x$; б) $y = e^{x^2}$; в) $y = \cos^2 5x$.

9.3.2 Найти скорость и ускорение материальной точки, совершающей затухающие колебания по закону $x = Ae^{-\lambda t} \sin \omega t$.

9.3.3 Найти производные первого и второго порядка для указанных функций: а) $\begin{cases} y = \sin^3 2t, \\ x = \cos^3 2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \arctg t, \\ x = \ln(1 + t^2). \end{cases}$

9.3.4 Найти $y^{(4)}$, если $y = x^4 e^{2x}$.

9.3.5 Получить формулу для производной n -го порядка указанных функций. Доказать методом математической индукции справедливость формулы для любого натурального числа.

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sin x$; в) $y = xe^x$.

9.3.6 Используя понятие дифференциала функции, вычислить приближённо указанные значения, с точностью до трёх знаков после запятой:

а) $\cos 62^\circ$; б) $\sqrt{\frac{(2,05)^2 + 5}{(2,05)^2 - 3}}$; в) $\arcsin 0,4991$.

9.3.7 Функция общих затрат предприятия определяется эмпирической функцией $C(v) = 3v^2 + v - 15$, которая зависит от объёма продаж v . Определить приближённое значение изменения затрат предприятия при изменении объёмов продаж от 100 условных единиц товара до 105.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Найти производные первого и второго порядка указанных функций.

9.4.1.1 $\begin{cases} y = \sqrt{t-5}, \\ x = \ln(t-5). \end{cases}$	9.4.1.2 $\begin{cases} y = \sqrt{2t-7}, \\ x = \sqrt[3]{2t-7}. \end{cases}$	9.4.1.3 $\begin{cases} y = 3e^{4t+3}, \\ x = 4e^{3t+4}. \end{cases}$
9.4.1.4 $\begin{cases} y = 10\sin 2t, \\ x = 5\cos 2t. \end{cases}$	9.4.1.5 $\begin{cases} y = e^{2t} \sin 2t, \\ x = e^{2t} \cos 2t. \end{cases}$	9.4.1.6 $\begin{cases} y = \operatorname{sh} 3t, \\ x = \operatorname{ch} 3t. \end{cases}$
9.4.1.7 $\begin{cases} y = \ln \sin 3t, \\ x = \sin 3t. \end{cases}$	9.4.1.8 $\begin{cases} y = \arcsin t, \\ x = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$	9.4.1.9 $\begin{cases} y = \operatorname{arctg} t, \\ x = \ln(1+t^2). \end{cases}$
9.4.1.10 $\begin{cases} y = 5\cos^2 3t, \\ x = 2\cos 3t. \end{cases}$	9.4.1.11 $\begin{cases} y = t^3 + 2t^2 - 3, \\ x = \ln t. \end{cases}$	9.4.1.12 $\begin{cases} y = \operatorname{th} t, \\ x = \operatorname{cth} t. \end{cases}$
9.4.1.13 $\begin{cases} y = 3\operatorname{tg} 4t, \\ x = 5\operatorname{ctg} 4t. \end{cases}$	9.4.1.14 $\begin{cases} y = \sqrt{1-t}, \\ x = 2\operatorname{tg} \sqrt{1-t}. \end{cases}$	9.4.1.15 $\begin{cases} y = e^{4t^2+2t}, \\ x = 2t^2 + t. \end{cases}$
9.4.1.16 $\begin{cases} y = \sqrt[4]{3t-1}, \\ x = \sqrt[5]{3t-1}. \end{cases}$	9.4.1.17 $\begin{cases} y = 9e^{4t-1}, \\ x = 3e^{5t+2}. \end{cases}$	9.4.1.18 $\begin{cases} y = \sqrt[3]{2t-3}, \\ x = \ln(2t-3). \end{cases}$
9.4.1.19 $\begin{cases} y = e^{3t} \cos 3t, \\ x = e^{3t} \sin 3t. \end{cases}$	9.4.1.20 $\begin{cases} y = \operatorname{ch} 5t, \\ x = \operatorname{sh} 5t. \end{cases}$	9.4.1.21 $\begin{cases} y = 12\cos 3t, \\ x = 6\sin 3t. \end{cases}$
9.4.1.22 $\begin{cases} y = \sqrt{1-4t^2}, \\ x = \arcsin 2t. \end{cases}$	9.4.1.23 $\begin{cases} y = \ln(1+9t^4), \\ x = \operatorname{arcctg} 3t^2. \end{cases}$	9.4.1.24 $\begin{cases} y = \cos 2t, \\ x = \ln \cos 2t. \end{cases}$
9.4.1.25 $\begin{cases} y = 2t^3 - t^2 + t, \\ x = \ln 3t. \end{cases}$	9.4.1.26 $\begin{cases} y = \operatorname{cth} 3t, \\ x = \operatorname{th} 3t. \end{cases}$	9.4.1.27 $\begin{cases} y = 4\sin^2 2t, \\ x = 3\cos 2t. \end{cases}$
9.4.1.28 $\begin{cases} y = 5\operatorname{tg} \sqrt{2+3t}, \\ x = 3\sqrt{2+3t}. \end{cases}$	9.4.1.29 $\begin{cases} y = 2t^3 - t^2, \\ x = e^{4t^3-2t^2}. \end{cases}$	9.4.1.30 $\begin{cases} y = 2\operatorname{ctg} 5t, \\ x = 4\operatorname{tg} 5t. \end{cases}$

9.4.2 С помощью дифференциала функции приближенно вычислить заданные величины с точностью до четырех знаков после запятой.

9.4.2.1	$\sin 28^\circ$.	9.4.2.2	$\cos 57^\circ$.	9.4.2.3	$\operatorname{tg} 43^\circ$.
9.4.2.4	$\operatorname{ctg} 46^\circ$.	9.4.2.5	$\arcsin 0,43$.	9.4.2.6	$\arccos 0,62$.
9.4.2.7	$\operatorname{arctg} 0,91$.	9.4.2.8	$\operatorname{arcctg} 1,22$.	9.4.2.9	$\ln(e^3 + 0,15)$.
9.4.2.10	$\sqrt{15,94}$.	9.4.2.11	$\sqrt[3]{8,15}$.	9.4.2.12	$\sqrt[5]{31,95}$.
9.4.2.13	$5^{2,01}$.	9.4.2.14	$\sqrt[4]{80,78}$.	9.4.2.15	$\lg 100,02$.
9.4.2.16	$\sqrt{\sin 33^\circ}$.	9.4.2.17	$\cos^3 62^\circ$.	9.4.2.18	$\operatorname{tg}^2 48^\circ$.
9.4.2.19	$\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 44^\circ}$.	9.4.2.20	$\arcsin^2 0,54$.	9.4.2.21	$\arccos^3 0,57$.
9.4.2.22	$\operatorname{arctg}^2 1,05$.	9.4.2.23	$\operatorname{arcctg}^3 0,93$.	9.4.2.24	$\ln(e^4 - 0,25)$.
9.4.2.25	$\sqrt{(8,97)^3}$.	9.4.2.26	$\sqrt[3]{(26,75)^2}$.	9.4.2.27	$\sqrt[10]{(1023,99)^9}$.
9.4.2.28	$e^{3,91}$.	9.4.2.29	$\sqrt[4]{(624,87)^5}$.	9.4.2.30	$\lg^2 999,92$.

10 ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ (практическое занятие 28)

Содержание: теоремы о среднем, правило Лопиталья-Бернулли.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Изучение производной функции даёт возможность судить о характерных особенностях в поведении этой функции. В основе исследований функций лежат теоремы, которые объединены общим названием – теоремами о среднем.

Теорема 10.1.1 (Ферма) Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и в точке x_0 функция достигает наибольшего или наименьшего значения, то производная функции в этой точке равна нулю.

Теорема 10.1.2 (Ролля) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, причём $f(a) = f(b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a; b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема 10.1.3 (Лагранжа) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a; b)$, такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \quad (10.1.1)$$

Теорема 10.1.4 (Коши) Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причём $\varphi'(x) \neq 0$ на интервале $(a; b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a; b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (10.1.2)$$

При раскрытии неопределённостей $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ используют правило

Лопиталья-Бернулли.

Теорема 10.1.5 (Лопиталья-Бернулли) Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, а в точке $x_0 \in (a; b)$ обе функции одновременно стремятся к нулю или к бесконечности и

при этом существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}. \quad (10.1.3)$$

При выполнении условия теоремы правило Лопиталья-Бернулли можно применять неоднократно.

Раскрытие неопределённости типа $(0 \cdot \infty)$.

Для вычисления $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x))$, где $f(x)$ – бесконечно малая, а $\varphi(x)$ – бесконечно большая функция при значении $x \rightarrow x_0$, следует преобразовать произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ к виду $\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ или $\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}$. В первом случае получаем неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$, а во втором $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Далее можно использовать правило Лопиталья-Бернулли.

Раскрытие неопределённости типа $(\infty - \infty)$.

Для вычисления $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x))$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большие функции при значении $x \rightarrow x_0$, следует преобразовать разность $f(x) - \varphi(x)$ к виду $f(x) \cdot \left(1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$. Для дальнейшего нахождения предела необходимо рас-

крыть неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ отношения $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 1$, то

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x)) = \infty$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$, то получаем неопределённость типа $(\infty \cdot 0)$, раскрытие которой рассмотрена выше.

Раскрытие неопределённости типа (0^0) , (∞^0) , (1^∞) .

Во всех трёх случаях рассматривается предел $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\varphi(x)}$, где $f(x)$ есть в первом случае бесконечно малая функция, во втором случае – бесконечно большая функция, а в третьем случае – функция, имеющая предел, равный еди-

нице. Функция $\varphi(x)$ в первых двух случаях является бесконечно малой, а в третьем случае – бесконечно большой функцией.

Для раскрытия указанных неопределённостей логарифмируем предварительно функцию $y = (f(x))^{\varphi(x)}$. В результате получаем равенство

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x).$$

Находим предел $\ln y$, после чего находится предел функции y . Во всех трёх случаях неопределённостей при нахождении предела функции $\ln y$ получаем неопределённость типа $(0 \cdot \infty)$, метод, раскрытия которой приведён выше.

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Доказать, что все корни производной многочлена

$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$$

действительны и различны.

Решение. Применим теорему Ролля к функции $y = f(x)$ на отрезке $[0; 1]$.

Так как $f(0) = f(1) = 0$ и функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[0; 1]$ и дифференцируемой на интервале $(0; 1)$, то по теореме Ролля существует хотя бы одно число x_1 из интервала $(0; 1)$ такое, что $f'(x_1) = 0$. Аналогично, применяя теорему Ролля к функции $y = f(x)$ на каждом из отрезков $[1; 2]$, $[2; 3]$ и $[3; 4]$, убеждаемся, что внутри каждого из них существует корень уравнения $f'(x) = 0$.

Так как степень многочлена $f'(x)$ равна 4, то он имеет не более четырёх действительных корней. Поэтому все корни x_1, x_2, x_3, x_4 многочлена $f'(x)$ действительны, причём $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3 < x_4 < 4$.

10.2.2 Доказать, что для любых положительных чисел a и b , таких, что $b > a$, и любого натурального числа $n \geq 2$ имеет место неравенство

$$n \cdot (b-a) \cdot a^{n-1} < b^n - a^n < n \cdot (b-a) \cdot b^{n-1}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$, $x > 0$. Тогда

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a}.$$

Так как функция $f(x) = x^n$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемой на интервале $(a; b)$, то по теореме Лагранжа существует точка c из интервала $(a; b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a} = f'(c) = n \cdot c^{n-1}.$$

Учитывая неравенство $a^{n-1} < c^{n-1} < b^{n-1}$, получаем

$$n \cdot a^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < n \cdot b^{n-1}.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство.

10.2.3 Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x) = \arcsin x$ на отрезке $[-1; 1]$. Найти значение c , при котором выполнено условие (10.1.1)

Решение. Функция определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$. Найдём производную функции $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Производная конечна внутри интервала $(-1; 1)$, а в точках $x = \pm 1$ производная не существует, но это не нарушает условий применимости теоремы Лагранжа. Следовательно, точка c , удовлетворяющая условию (10.1.1), должна существовать. Найдём эту точку

$$\frac{\arcsin 1 - \arcsin(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}; \quad \frac{\pi/2 - (-\pi/2)}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}},$$

откуда

$$\sqrt{1-c^2} = \frac{2}{\pi}, \text{ или } c = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}.$$

Итак, в данном случае условие (10.1.1) выполняется для двух точек.

10.2.4 Пользуясь формулой (10.1.1), оценить значение $\ln(1+e)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Эта функция дифференцируема всюду при значении $x > 0$ и $f'(x) = 1/x$. Для отрезка $[e; e+1]$ запишем формулу (10.1.1):

$$\ln(1+e) = \ln e + ((e+1) - e) \cdot \frac{1}{c} = 1 + \frac{1}{c},$$

где $e < c < 1+e$.

Оценим выражение $1 + 1/c$ при значении $e < c < 1+e$. Имеем

$$\ln(1+e) = 1 + \frac{1}{c} < 1 + \frac{1}{e}, \text{ так как } c > e \text{ и}$$

$$\ln(1+e) = 1 + \frac{1}{c} > 1 + \frac{1}{1+e}, \text{ так как } c < 1+e.$$

Таким образом,

$$1 + \frac{1}{1+e} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}.$$

Подставляя в эту оценку $e \approx 2,7$, получаем окончательно

$$1,27 < \ln(1+e) < 1,37.$$

10.2.5 Применима ли теорема Коши к функциям $f(x) = \cos x$ и $\varphi(x) = x^3$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$?

Решение. Заданные функции непрерывны на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ и дифференцируемы на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. При этом $f'(x) = -\sin x$, $\varphi'(x) = 3x^2$. В точке $x=0$ значения производных функции равны $f'(0) = \varphi'(0) = 0$. Следовательно, условие теоремы Коши не выполняется.

Покажем, что в этом случае действительно не существует точки c , в которой выполнено равенство (10.1.2). Выпишем выражение, стоящее слева в формуле Коши

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\cos(\pi/2) - \cos(-\pi/2)}{(\pi/2)^3 - (-\pi/2)^3} = \frac{0}{\pi^3/8} = 0.$$

Рассмотрим выражение, стоящее справа в формуле (10.1.2)

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = -\frac{\sin c}{3c^2}.$$

Числитель обращается в нуль на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ только при значении $c = 0$. Но в этой точке

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin c}{3c^2} \right) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin c}{c} \cdot \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3c} \right) = \infty.$$

Таким образом, левая часть равенства (10.1.2) равна нулю, а правая часть в точке $c = 0$ стремится к бесконечности. Следовательно, действительно не существует точки на заданном интервале, в которой можно применить теорему Коши для заданных функций.

10.2.6 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{\ln x} - \frac{5}{\ln x} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$.

Решение.

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{4x-12} - 1}{\sin(2x-6)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(e^{4x-12} - 1)'}{(\sin(2x-6))'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4e^{4x-12}}{2 \cos(2x-6)} = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 2;$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln^2 x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0;$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x}{\ln x} - \frac{5}{\ln x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x-5)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} 5x = 5;$

$$\begin{aligned}
\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x &= (0)^0 = A, \text{ тогда } \ln A = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \cos x)'}{(\sin x)'} = \\
&= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x - x^2 \sin x}{\cos x} = -\frac{0}{1} = 0, \text{ следовательно, } A = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Не находя производной функции

$$P(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$$

выяснить, сколько действительных корней имеет уравнение $P'(x) = 0$, и указать интервалы, в которых они лежат.

10.3.2 Показать, что функция $f(x) = x^2 - 1$ на отрезке $[-1; 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Найти соответствующее значение c .

10.3.3 На дуге кубической параболы $y = x^3$, заключённой между точками $A(2; 8)$ и $B(4; 64)$, найти точку, касательная в которой параллельна хорде AB .

10.3.4 Доказать, что $e^x > 1 + x$, при $x > 0$.

10.3.5 Проверить условие теоремы Лагранжа для функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

10.3.6 Пользуясь теоремой Лагранжа, оценить значение $\operatorname{arctg} 1,5$.

10.3.7 Записав формулу Коши для функций $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ и $\varphi(x) = x^2 + 4$ на отрезке $[0; 2]$, найти значение c .

10.3.8 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$\begin{aligned}
\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\arcsin 5x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^{3x}}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}.
\end{aligned}$$

10.3.9 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$\begin{aligned}
\text{а) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{5}{x}\right); \text{ в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln^3 x); \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right).
\end{aligned}$$

10.3.10 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin^2 x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x}$.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

10.4.1.1 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{ctg} 3x}$.

10.4.1.2 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)^{\operatorname{tg} \pi x}$.

10.4.1.3 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^{x^2-4}$.

10.4.1.4 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} \right)^{x^2-1}$.

10.4.1.5 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 2x}$.

10.4.1.6 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-3)^{1/\ln(3-x)}$.

10.4.1.7 $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{1/(4x-\pi)}$.

10.4.1.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin 7x}$.

10.4.1.9 $\lim_{x \rightarrow 4} (\ln(5-x))^{\operatorname{sh}(4-x)}$.

10.4.1.10 $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 6x)^{1/\operatorname{sh} 6x}$.

10.4.1.11 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\cos(\pi x/4)}$.

10.4.1.12 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} \right)^{\ln x}$.

10.4.1.13 $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

10.4.1.14 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-x)^{x-1}$.

10.4.1.15 $\lim_{x \rightarrow \pi} (1-\sin x)^{\operatorname{ctg} 5x}$.

10.4.1.16 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{1/\operatorname{ctg} x}$.

10.4.1.17 $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\operatorname{tg} \frac{3\pi x}{2}}$.

10.4.1.18 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\lg 7x)^{1/x}$.

10.4.1.19 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} 2x} \right)^{\sin 2x}$.

10.4.1.20 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg} 3x}$.

10.4.1.21 $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{8x-2\pi}}$.

10.4.1.22 $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{th} 3x)^{x^3}$.

10.4.1.23 $\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{1}{x-9} \right)^{2x-18}$.

10.4.1.24 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2+1)^{2/\ln x}$.

10.4.1.25 $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 3x)^{1/\operatorname{tg} 2x}$.

10.4.1.26 $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{\ln x^2}$.

10.4.1.27 $\lim_{x \rightarrow 8} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8} \right)^{\sin \pi x}$.

10.4.1.28 $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \sin x)^{x^2}$.

10.4.1.29 $\lim_{x \rightarrow 0} (\lg(10+x))^{1/x}$.

10.4.1.30 $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^{x^3-5x+2}$.

11 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА (практическое занятие 29)

Содержание: формулы Тейлора и Маклорена, остаточные члены в форме Лагранжа и Пеано.

11.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Одной из основных задач математического анализа является задача приближения или *аппроксимации* функции в окрестности заданной точки. Одной из основных формул приближённых вычислений является формула Тейлора. Наиболее простыми функциями в смысле вычисления их значений являются многочлены. Формула Тейлора даёт возможность замены функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 многочленом некоторой степени.

Если функция $y = f(x)$ является дифференцируемой n раз в точке x_0 , то многочлен вида

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (11.1.1)$$

называется *многочленом Тейлора* функции $y = f(x)$.

Теорема 11.1.1 Если функция $y = f(x)$ определена и n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то при $x \rightarrow x_0$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

или в более краткой форме

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + o((x - x_0)^n), \quad (11.1.2)$$

где $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ – *остаточный член в форме Пеано*.

Формула (11.1.2) называется *формулой Тейлора n -го порядка с остаточным членом в форме Пеано*.

Если в формуле Тейлора (11.1.2) положить $x_0 = 0$, получаем частный случай формулы Тейлора, которая называется *формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (11.1.3)$$

Теорема 11.1.2 Если функция $y = f(x)$ определена и $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то при $x \rightarrow x_0$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

или в более краткой форме

$$f(x) = \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad (11.1.4)$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ — остаточный член в форме Лагранжа, а

$c = x_0 + \Theta(x-x_0)$ и $0 < \Theta < 1$.

Формула (11.1.4) называется *формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа*.

Если в формуле Тейлора (11.1.4) положить $x_0 = 0$, получаем частный случай формулы Тейлора, которая называется *формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (11.1.5)$$

где $c = \Theta x$ и $0 < \Theta < 1$.

Основные разложения применяются для представления по формуле Тейлора многих функций. При этом разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора по степеням $x-x_0$ заменой $x-x_0 = z$ сводятся к разложению функции $f(x_0+z) = f_1(z)$ по формуле Маклорена в окрестности точки $z=0$.

Рассмотрим разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора (Маклорена).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad (11.1.6)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}$, $0 < \Theta < 1$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x), \quad (11.1.7)$$

где $R_n(x) = o(x^{2n+1})$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \Theta < 1$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x), \quad (11.1.8)$$

где $R_n(x) = o(x^{2n})$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \Theta < 1$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x). \quad (11.1.9)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(-1)^n}{(1+\Theta x)^{n+1}}$, $0 < \Theta < 1$.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (11.1.10)$$

где $R_n(x) = o(x^n)$ или $R_n(x) = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n)}{(n+1)!} \cdot (1+\Theta x)^{m-n-1} \cdot x^{n+1}$, $0 < \Theta < 1$.

Формула Тейлора находит широкое применение при вычислении значений функции с заданной степенью точности. Пусть известны значения функции $y = f(x)$, а также значения её производных в точке x_0 , и необходимо вычислить приближённое значение функции в точке x_1 из окрестности точки x_0 с абсолютной погрешностью δ . Из формулы Тейлора следует, что

$$f(x_1) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n_0)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^{n_0},$$

где n_0 – наименьший из номеров n , для которых $|R_n(x_1)| < \delta$.

Формула Тейлора используется также при нахождении пределов, исследовании функции на экстремум и выпуклость, при вычислении интегралов, решении дифференциальных уравнений и в теории рядов.

11.2 Примеры решения типовых задач

11.2.1 Разложить многочлен $P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ по степеням двучлена $x - 2$.

Решение. Многочлен имеет производные любого порядка. Поэтому при любом значении переменной можно выразить значение заданной функции по формуле (11.1.1). Находим коэффициенты в разложении. Значение многочлена в точке $x_0 = 2$ равно нулю.

$$\begin{aligned} P_4'(x) &= 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8; & P_4'(2) &= 0. \\ P_4''(x) &= 24x^2 - 30x - 6; & P_4''(2) &= 30. \\ P_4'''(x) &= 48x - 30; & P_4'''(2) &= 66. \\ P_4^{(4)}(x) &= 48; & P_4^{(4)}(2) &= 48. \\ P_4^{(5)}(x) &= 0; & P_4^{(5)}(2) &= 0. \end{aligned}$$

Применим формулу (11.1.1):

$$P_4(x) = 0 + \frac{0}{1!}(x-2) + \frac{30}{2!}(x-2)^2 + \frac{66}{3!}(x-2)^3 + \frac{48}{4!}(x-2)^4;$$

$$P_4(x) = 15 \cdot (x-2)^2 + 11 \cdot (x-2)^3 + 2 \cdot (x-2)^4,$$

$$R_5(x) = 0, \text{ так как } P_4^{(v)}(x) = 0.$$

11.2.2 Для многочлена $4x^4 + x^2 - 3x + 2$ написать формулу Тейлора второго порядка в точке $x_0 = -1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение параметра Θ , которое соответствует следующим значениям аргумента: а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = -1$.

Решение. Находим производные первого, второго и третьего порядка многочлена $f(x) = 4x^4 + x^2 - 3x + 2$:

$$f'(x) = 16x^3 + 2x - 3, \quad f''(x) = 48x^2 + 2, \quad f'''(x) = 96x.$$

Вычисляем значения многочлена, первой и второй производных в точке $x_0 = -1$, а значение третьей производной в точке $x_0 + \Theta(x - x_0) = -1 + \Theta(x + 1)$:

$$f(-1) = 10, \quad f'(-1) = -21, \quad f''(-1) = 50, \quad f'''(x) = 96 \cdot (-1 + \Theta(x + 1)).$$

Подставляя полученные значения в формулу (11.1.1), получаем формулу Тейлора второго порядка разложения заданного многочлена в точке $x_0 = -1$.

$$f(x) = 10 - 21 \cdot (x + 1) + 25 \cdot (x + 1)^2 + 16 \cdot (-1 + \Theta \cdot (x + 1)) \cdot (x + 1)^3.$$

Для нахождения параметра Θ , который соответствует заданным значениям x , подставляем эти числа в последнее равенство. Откуда находим параметр Θ . Для значений $x = 0$ или $x = 1$, параметр Θ равен $1/4$, а для значения $x = -1$, параметр Θ может принимать любое действительное число.

11.2.3 Пусть $P(x)$ — многочлен четвёртой степени, $P(-1) = -4$, $P'(-1) = -3$, $P''(-1) = 8$, $P'''(-1) = -18$, $P^{(IV)}(-1) = 24$. Вычислить $P(1)$, $P'(2)$, $P''(0)$, $P'''(-1/4)$, $P^{(4)}(5)$.

Решение. Используя формулу (11.1.1), записываем многочлен четвёртой степени:

$$P(x) = -4 - 3 \cdot (x + 1) + 4 \cdot (x + 1)^2 - 3 \cdot (x + 1)^3 + (x + 1)^4, \text{ или } P(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 5.$$

Найдём производные многочлена $P(x)$ до четвёртого порядка включительно и вычислим значения производных и функции в заданных точках.

$$P(1) = -2;$$

$$P'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x, \quad P'(x) = 48;$$

$$P''(x) = 12x^2 + 6x + 2, \quad P''(x) = 2;$$

$$P'''(x) = 24x + 6, \quad P'''(-1/4) = 0;$$

$$P^{(4)}(x) = 24, \quad P^{(4)}(x) = 24.$$

11.2.4 Написать формулу Маклорена n -го порядка функции $f(x) = \sin x$.

Решение. Найдём значение функции $f(x) = \sin x$ и её производных в точке $x_0 = 0$. Значение функции в точке $x_0 = 0$ равно нулю.

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2), \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2), \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2), \quad f'''(0) = -1;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Следовательно, формула Маклорена n -го порядка функции $f(x) = \sin x$ имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

где $0 < \Theta < 1$.

11.2.5 Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Найдём значение функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ и её производных в точке $x_0 = 2$. Значение функции в заданной точке равно двум.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad f'(2) = -1;$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad f''(2) = 2;$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}, \quad f'''(2) = -6$$

$$f^{(IV)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5}, \quad f^{(IV)}(2) = 24.$$

Следовательно, формула Тейлора (11.1.1) третьего порядка для функции $f(x) = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$ имеет вид

$$\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(1+\Theta(x-2))^5}, \text{ где } 0 < \Theta < 1.$$

11.2.6 Вычислить число e с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,0001.

Решение. Применяя формулу Маклорена (11.1.6) для функции $f(x) = e^x$, получаем

$$e = f(1) = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(x).$$

Число слагаемых в разложении определяем из неравенства $|R_n(x)| = \frac{e^\Theta}{(n+1)!} < 0,0001$, где $0 < \Theta < 1$. Полученное неравенство выполняется при значении $n = 7$. Следовательно,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2,2182.$$

11.2.7 Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2 + 3x^4}$.

Решение. Так как $4 - 4\cos^3 x = 4(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x) \sim 12(1 - \cos x)$, а $4x^2 + 3x^4 \sim 4x^2$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\cos^3 x}{4x^2 + 3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(1 - \cos x)}{4x^2}.$$

Заменяя $\cos x$ его разложением по формуле Маклорена $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\cos^3 x}{4x^2 + 3x^4} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

поскольку $\frac{x^2}{2!} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$ при значении $x \rightarrow 0$.

11.3 Задания для решения на практическом занятии

11.3.1 Разложить многочлен $P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ по степеням двучлена $x + 1$.

11.3.2 Для многочлена $x^4 - 3x^2 + 2x + 5$ написать формулу Тейлора второго порядка в точке $x_0 = 1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение параметра Θ , которое соответствует следующим значениям аргумента: а) $x = 1$; б) $x = 2$; в) $x = 3$.

11.3.3 Пусть $P(x)$ – многочлен четвёртой степени, $P(1) = 3$, $P'(1) = 8$, $P''(1) = 26$, $P'''(1) = 60$, $P^{(4)}(1) = 72$. Вычислить $P(0)$, $P'(-1)$, $P''(2)$, $P'''(-2)$, $P^{(4)}(3)$.

11.3.4 Написать формулу Маклорена n -го порядка функции $f(x) = e^x$.

11.3.5 Написать формулу Маклорена n -го порядка функции $f(x) = \cos x$.

11.3.6 Написать формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = 0$.

11.3.7 Написать формулу Маклорена третьего порядка для функции $f(x) = \arcsin x$ в точке $x_0 = 0$.

11.3.8 Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = 1$.

11.3.9 Вычислить с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001, приближённое значение следующих чисел:

а) $\sqrt[3]{e}$; б) $\ln 1,05$; в) $\cos 1$; г) $\sqrt[6]{65}$.

11.3.10 Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2 - 3x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{2x^3 + 3x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2 - \sin(2x - 4)}{x - 2 + \sin(5x - 10)}.$$

11.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

11.4.1 Для многочлена $P_4(x)$ написать формулу Тейлора второго порядка в точке x_0 . Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение параметра Θ , которое соответствует значениям аргумента: $x = x_1$, $x = x_2$ и $x = x_3$.

- 11.4.1.1** $P_4(x) = 5x^4 + 4x^2 - 3x - 2, x_0 = 2, x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 2.$
- 11.4.1.2** $P_4(x) = 4x^4 + 3x^2 - 2x + 1, x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3.$
- 11.4.1.3** $P_4(x) = -3x^4 + 2x^2 + 6x - 2, x_0 = 3, x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3.$
- 11.4.1.4** $P_4(x) = 7x^4 - 2x^2 - 5x + 6, x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.5** $P_4(x) = 6x^4 + 2x^2 - 4x + 9, x_0 = 5, x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = -3.$
- 11.4.1.6** $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3x + 4, x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -1.$
- 11.4.1.7** $P_4(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x + 6, x_0 = -3, x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -1.$
- 11.4.1.8** $P_4(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3x - 3, x_0 = 4, x_1 = -4, x_2 = 4, x_3 = 2.$
- 11.4.1.9** $P_4(x) = x^4 + x^2 + x + 1, x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.10** $P_4(x) = 7x^4 + 3x^2 - 2x - 5, x_0 = -3, x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -1.$
- 11.4.1.11** $P_4(x) = -4x^4 + 2x^2 + 3x + 9, x_0 = -1, x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.12** $P_4(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4x + 12, x_0 = 4, x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 4.$
- 11.4.1.13** $P_4(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2x + 4, x_0 = -3, x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = 2.$
- 11.4.1.14** $P_4(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 8, x_0 = -1, x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3.$
- 11.4.1.15** $P_4(x) = -6x^4 - x^2 - x - 1, x_0 = 2, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.16** $P_4(x) = -4x^4 - 3x^2 - 3x + 2, x_0 = 2, x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = 2.$
- 11.4.1.17** $P_4(x) = 3x^4 + 4x^2 - 4x + 3, x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.18** $P_4(x) = 2x^4 + 2x^2 - 3x - 3, x_0 = -1, x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 1.$
- 11.4.1.19** $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3x + 4, x_0 = 5, x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = 5.$
- 11.4.1.20** $P_4(x) = -3x^4 - 5x^2 - 3x - 4, x_0 = -1, x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 0.$
- 11.4.1.21** $P_4(x) = 4x^4 - x^2 - 3x + 2, x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -2.$
- 11.4.1.22** $P_4(x) = 5x^4 - 7x^2 + 2x - 3, x_0 = 7, x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = -3.$
- 11.4.1.23** $P_4(x) = 3x^4 - x^2 + 2x + 3, x_0 = -1, x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 2.$
- 11.4.1.24** $P_4(x) = 2x^4 - 2x^2 + x + 1, x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2.$
- 11.4.1.25** $P_4(x) = 4x^4 - 2x^2 - 2x + 4, x_0 = -3, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -3.$

- 11.4.1.26** $P_4(x) = x^4 + 2x^2 + 3x + 4, x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1.$
- 11.4.1.27** $P_4(x) = -4x^4 + 3x^2 - x + 3, x_0 = 3, x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -2.$
- 11.4.1.28** $P_4(x) = 2x^4 - 6x^2 + 5x - 2, x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 1.$
- 11.4.1.29** $P_4(x) = -4x^4 + 2x^2 - 5x + 1, x_0 = 3, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3.$
- 11.4.1.30** $P_4(x) = -4x^4 - 3x^2 - 2x - 1, x_0 = -4, x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = -4.$

12 ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (практические занятия 30–32)

Содержание: монотонность функций, точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, выпуклость и вогнутость функций, точки перегиба, асимптоты графика функции, схема полного исследования функций.

12.1 Теоретический материал по теме практических занятий

Определение 12.1.1 Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на интервале I , если для каждой точки $x_1 > x_2$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$). Если последние неравенства нестрогие, то функция называется *неубывающей* (*невозрастающей*).

Теорема 12.1.1 Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на интервале I возрастает (убывает), то на этом интервале I производная функции $y = f(x)$ является неотрицательной (неположительной), то есть для производной функции $y = f(x)$ выполняются неравенства $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Определение 12.1.2 Интервалы, на которых функция убывает или возрастает, называются *интервалами монотонности функции*. Интервалы, на которых функция не убывает или не возрастает, называются *интервалами строгой монотонности функции*.

Определение 12.1.3 Точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками*. Точки области определения, в которых производная равна нулю, называют *стационарными точками*.

Определение 12.1.4 Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*), если для любой точки x из проколотой δ -окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в них – *локальным экстремумом* функции в данных точках.

Теорема 12.1.2 (необходимый признак локального экстремума дифференцируемой функции). Если в точке $x = x_0$ для функции $y = f(x)$ существует

локальный экстремум, то в этой точке значение производной равно нулю или не существует ($f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует).

Теорема 12.1.3 (первый достаточный признак локального экстремума). Если функция $y=f(x)$ непрерывна и дифференцируема в окрестности критической точки x_0 и при переходе через эту точку производная $f'(x)$ меняет свой знак, то точка x_0 является точкой экстремума.

При этом, если производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой локального максимума, если производная меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой локального минимума.

Теорема 12.1.4 (второй достаточный признак локального экстремума). Если функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема в стационарной точке x_0 и $f''(x_0)<0$, то в точке x_0 функция достигает локальный максимум, а если $f''(x_0)>0$, то в точке x_0 функция достигает локальный минимум.

Теорема 12.1.5 (третий достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y=f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда:

- 1) если n – чётное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума;
- 2) если n – чётное и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума;
- 3) если n – нечётное, то x_0 – не является точкой локального экстремума.

Одной из основных характеристик функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ являются её глобальные экстремумы, то есть наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Непрерывная функция $y=f(x)$ достигает на отрезке $[a;b]$ своего наибольшего $\max_{[a;b]} f(x)$ и наименьшего $\min_{[a;b]} f(x)$ значения либо в критических точках, принадлежащих отрезку $[a;b]$, либо на концах этого отрезка $[a;b]$.

Следовательно, для нахождения глобальных экстремумов $\max_{[a;b]} f(x)$ и $\min_{[a;b]} f(x)$ функции $f(x)$ необходимо найти её значения в критических точках, которые принадлежат отрезку, и на концах отрезка. Среди полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения. Если отрезок не задан, то считаем, что наибольшее и наименьшее значения необходимо найти на всей области определения функции. В этом случае используем достаточные признаки экстремума

Определение 12.1.5 Дифференцируемая функция $y=f(x)$ называется *выпуклой* (*вогнутой*) на интервале I , если дуга кривой на этом интервале расположена не выше (не ниже) любой касательной, проведённой к графику функции в любой точке этого интервала.

Определение 12.1.6 Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на вогнутость или наоборот, называется *точкой перегиба*.

Теорема 12.1.6 Если функция $y = f(x)$ на интервале I дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то график функции на этом интервале выпуклый (вогнутый).

Теорема 12.1.7 Если вторая производная функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе через эту точку вторая производная меняет свой знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба.

Определение 12.1.7 Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

Определение 12.1.8 Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной* (если $k \neq 0$ – *горизонтальной*) асимптотой графика функции $y = f(x)$ на бесконечности, если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема 12.1.8 Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b. \quad (12.1.1)$$

Общая схема исследования функции:

- 1) находим область определения функции;
- 2) определяем точки разрыва функции, вертикальные и горизонтальные асимптоты;
- 3) исследуем функцию на наличие свойств чётности или нечётности, периодичности;
- 4) определяем интервалы монотонности функции и точки экстремума;
- 5) находим интервалы выпуклости, вогнутости функции, точки перегиба;
- 6) находим точки пересечения графика функции с осями координат;
- 7) строим график функции;
- 8) указываем множество значений функции.

Замечание. Числовая функция $y = f(x)$ называется *чётной* (*нечётной*), если область определения симметрична относительно начала координат и $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной функции симметричен относительно начала координат. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, с наименьшим положительным периодом T , если для любого x из области определения функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат области определения функции, и справедливо равенство $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

12.2 Примеры решения типовых задач

12.2.1 Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 8)^2}$. Определить интервалы возрастания и убывания функции. Найти точки экстремума.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$.

Находим производную функции: $f'(x) = \frac{2 \cdot (2x - 6)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 6x + 8}}$. Критическими точками

функции будут $x=3$, в которой $f'(x)=0$, и $x=2$, $x=4$, в которых $f'(x)$ не существует. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f'(x)$	–	$\nexists$	+	0	–	$\nexists$	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

Функция возрастает на каждом из интервалов: $[2; 3]$ и $[4; +\infty)$. Функция убывает на каждом из интервалов: $(-\infty; 2]$ и $[3; 4]$. Точки экстремума: $y_{\max} = y(3) = 1$, $y_{\min} = y(2) = y(4) = 0$.

12.2.2 Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x} \text{ на отрезке } [-1; 2].$$

Решение. Функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на отрезке, либо в критических точках, которые принадлежат данному отрезку, либо на концах отрезка. Определим критические точки, для чего находим производную функции и выясняем, где она равна нулю или не существует.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x} \right)' = \frac{x^2 - 6x + 5}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right)^2}}.$$

$$f'(x) = 0, \quad x^2 - 6x + 5 = 0, \quad x = 1 \in [-1; 2], \quad x = 5 \notin [-1; 2].$$

Производная функции $f'(x)$ не существует, если $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x = 0$. Решая полученное уравнение, находим значения переменной: $x = 0 \in [-1; 2]$ или

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2} \notin [-1; 2].$$

$$\text{Таким образом, вычисляем значения функции в точках: } x = -1, x = 0, x = 1, x = 2.$$

$$f(-1) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1)} = -\sqrt[3]{\frac{25}{3}}; \quad f(0) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0} = 0;$$

$$f(1) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1} = \sqrt[3]{\frac{7}{3}};$$

$$f(2) = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Среди полученных значений выбираем наибольшее $\max_{[-1;2]} f(x)$ и наименьшее

$$\min_{[-1;2]} f(x) \text{ значения функции: } \max_{[-1;2]} f(x) = f(1) = \sqrt[3]{\frac{7}{3}}; \min_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -\sqrt[3]{\frac{25}{3}}.$$

12.2.3 Предприятие города A для доставки своей продукции в город B строит автомобильную дорогу AC , которая соединяет его с железной дорогой

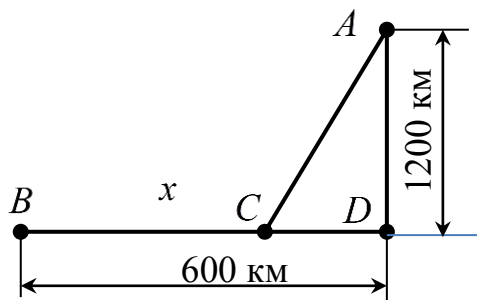


Рисунок 12.2.1 – Схема движения

BD (см. рисунок 12.2.1). К какому пункту C , относительно города B , необходимо подвести автомобильную дорогу, чтобы при перевозке своей продукции из города A в город B предприятие имело бы наименьшее количество затрат. При этом известно, что стоимость автомобильных перевозок груза на 1 км равна 13 у. е., а стоимость перевозок груза по железной дороге 5 у. е.

Решение. Пусть S – стоимость перевозки продукции из города A в город B . Тогда $S_1 = 5x$ – стоимость перевозки груза по железной дороге на участке BC , длина которого равна x , а стоимость перевозки продукции по автомобильной дороге равна

$$S_2 = 13 \cdot |AC| = 13 \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2} = 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}.$$

Следовательно, общая стоимость перевозки продукции из города A в город B будет определяться по формуле:

$$S = S_1 + S_2 = 5x + 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}.$$

Так как стоимость должна быть наименьшей, то исследуем полученную функцию на экстремум, то есть определим точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$S' = (5x + 13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2})' = (5x)' + (13 \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2})' =$$

$$= 5 - \frac{13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} - 13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}}.$$

$$S' = 0; \quad 5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} - 13 \cdot (600 - x) = 0.$$

$$5 \cdot \sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} = 13 \cdot (600 - x).$$

Решаем полученное иррациональное уравнение.

$$\begin{cases} 600 - x \geq 0, \\ 25 \cdot (1200^2 + (600 - x)^2) = 169 \cdot (600 - x)^2. \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 600, \\ 144 \cdot x^2 - 172800 \cdot x + 15840000 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 600, \\ x = 100 \vee x = 1100, \end{cases} \quad x = 100 \text{ км.}$$

Производная стоимости S' не существует, если $\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2} = 0$, но такого значения x нет, так как сумма квадратов положительных чисел не может равняться нулю.

Таким образом, при расстоянии $x_0 = 100$ км стоимость перевозки продукции из города A в город B достигает своего экстремального значения, но при этом, затраты на перевозку продукции, которую изготавливает предприятие, может быть как наибольшей, так и наименьшей. Воспользуемся достаточным признаком экстремума: если $S''(x_0) < 0$, то при расстоянии $x = x_0$ стоимость является максимальной, а при значении $f''(x_0) > 0$ – минимальной. Найдем вторую производную функции, которая является стоимостью перевозки продукции из города A в город B , и определим её значение при перевозке груза по железной дороге на расстояние $x = 100$ км.

$$S'' = \left(5 - \frac{13 \cdot (600 - x)}{\sqrt{1200^2 + (600 - x)^2}} \right)' = \frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - x)^2)^3}}.$$

$$S''(100) = \left(\frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - x)^2)^3}} \right) \Big|_{x=100} = \frac{18720000}{\sqrt{(1200^2 + (600 - 100)^2)^3}} = 144000 > 0.$$

Так как вторая производная $S''(100) > 0$, то, используя достаточный признак экстремума, при расстоянии $x = 100$ км. предприятие будет иметь наименьшее количество затрат.

12.2.4 Задана функция $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48$. Определить интервалы выпуклости и вогнутости функции. Определить точки перегиба.

Решение. Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. Находим первую и вторую производную функции: $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x$, $f''(x) = 12x^2 - 72x + 60$. Решая уравнение $f''(x) = 0$, находим $x = 1$ и $x = 5$. Точек, в которых вторая производная $f''(x)$ не существует, нет. Полученные точки разбивают область определения на интервалы, в каждом из которых вторая производная функции сохраняет свой знак.

Результаты исследования приведём в виде таблицы:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	∪	67	∩	-77	∪

Функция является выпуклой на интервале $(1;5)$. Функция является вогнутой на каждом из интервалов: $(-\infty;1)$ и $(5;+\infty)$. Точки перегиба: $M_1(1;67)$, $M_2(5;-77)$.

12.2.5 Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел, за исключением точки $x=2$. В точке $x=2$ односторонние пределы равны бесконечности ($\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$), то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой. Найдём наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x-2} = 2.$$

Таким образом, у данной кривой существует единственная наклонная асимптота, уравнение которой $y = x + 2$.

12.2.6 Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2}{x-1}$ и построить ее график. Определить количество корней уравнения $y(x) = a$ для любого действительного числа a .

Решение. 1. Так как, в точке $x=1$ значение функции не существует, то областью определения функции является множество $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Определим точки разрыва функции и асимптоты графика. Так как в точке $x=1$ функция не определена, то данная точка является точкой разрыва. Исследуем функцию в окрестности данной точки:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Так как односторонние пределы равны $\pm\infty$, то в точке $x=1$ функция терпит разрыв второго рода, а, следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Найдём наклонные асимптоты $y = k \cdot x + b$ графика функции.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

Таким образом, наклонной асимптотой графика функции является прямая $y = x + 1$.

3. Область определения функции не является симметричным множеством относительно начала координат, из определения четности и нечетности функции, исходная функция не является четной и не является нечетной. Исследуемая функция является дробно-рациональной, а, следовательно, непериодическая.

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Найдем производную функции.

$$y' = \frac{(x^2)' \cdot (x-1) - x^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2 \cdot x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}.$$

Экстремального значения функция может достигать в критических точках, которые принадлежат области определения, то есть в точках, в которых производная равна нулю или не существует. Находим критические точки. Производная функции $y' = 0$, если $x \cdot (x-2) = 0$, то есть $x = 0 \in D(y)$ или $x = 2 \in D(y)$. Производная функции y' не существует, если $x = 1 \notin D(y)$. Знаки

y' найдем, решая методом интервалов неравенство $\frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2} > 0$ (или < 0). Результаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	4	$\nearrow$

По необходимому и достаточному признаку монотонности функция возрастает, если $y' \geq 0$, и убывает, если $y' \leq 0$. Следовательно, исследуемая функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$, а убывает на промежутках $[0; 1)$ и $(1; 2]$. По достаточному признаку экстремума, если производная в критической точке меняет свой знак с отрицательного на положительный, то данная точка является точкой локального минимума, если же знак, в данной точке, меняется с положительного на отрицательный, то в этой точке функция достигает локального максимума.

$$y_{\min} = y(2) = 4, \quad y_{\max} = y(0) = 0.$$

5. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость. Определим точки перегиба, если они существуют. Найдем вторую производную функции.

$$y'' = \frac{(x^2 - 2x)' \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot ((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Не существует значения переменной, при которой вторая производная функции равна нулю. Вторая производная функции y'' не существует, если $x = 1 \notin D(y)$. Результаты исследования запишем в таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$-$	$\nexists$	$+$
y		$\nexists$	

Согласно достаточному признаку выпуклости (вогнутости), функция является выпуклой, если $y'' < 0$, и вогнутой, если $y'' > 0$. Следовательно, исследуемая функция выпуклая на промежутке $(-\infty; 1)$ и вогнутая на промежутке $(1; +\infty)$. По достаточному признаку точек перегиба, если вторая производная в

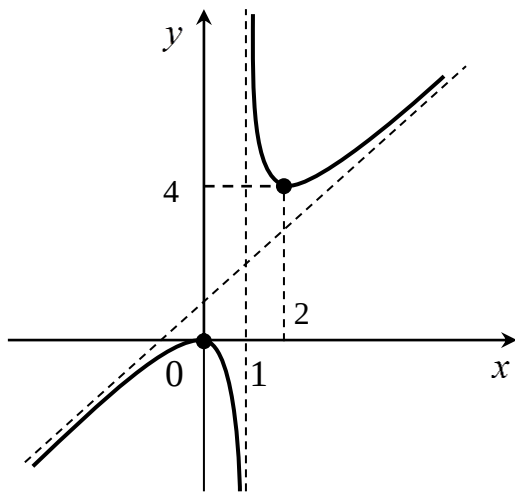


Рисунок 12.2.2 – График функции

точке равна нулю или не существует и при переходе через эту точку из области определения функции, вторая производная меняет свой знак, то данная точка является точкой перегиба. Исходная функция не имеет точек перегиба.

6. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

Если $x=0$, то $y=0$. Аналогично, значение функции равно нулю, если $x=0$. Таким образом, функция имеет единственную точку пересечения с осями координат: $O(0;0)$.

7. По результатам проведенных исследований строим график функции (рисунок 12.2.2).

8. Множество значений функции $E(y): y \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Для определения числа корней уравнения $y(x)=a$ строим прямые $y=a$, которые параллельны оси абсцисс. Из рисунка (12.2.2) видим, что прямая $y=a$ для $y \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ пересекает линию графика заданной функции f двух

точках, а, следовательно, уравнение $\frac{x^2}{x-1} = a$ на этих промежутках имеет ровно

два корня. Если $a=0$ или $a=4$, то прямые $y=0$ и $y=4$ касаются заданной линии в одной точке, а, следовательно, уравнение имеет единственное решение. При значениях $a \in (0; 4)$ прямая не имеет точек пересечения с графиком функ-

ции $y = \frac{x^2}{x-1}$, а, следовательно, уравнение $\frac{x^2}{x-1} = a$ не имеет решения.

12.3 Задания для решения на практических занятиях

12.3.1 Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума:

а) $y = x^3 - 15x^2 + 48x + 6$; б) $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$; в) $y = x^3 e^{-x}$; г) $y = \ln(1 + x^2)$.

12.3.2 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-1; 4]$.

12.3.3 Найти на отрезке $[0; 4]$ наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 3}$.

12.3.4 Найти наибольшее значение функции $f(x) = \ln x / x$ на интервале $(0; +\infty)$.

12.3.5 Определить максимальную площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна a .

12.3.6 Чему должны быть равны радиус основания R , высота H и образующая l прямого кругового конуса для того, чтобы при заданном объёме V он имел наименьшую полную поверхность?

12.3.7 Найти радиус основания и высоту прямого конуса, вписанного в шар радиуса шесть метров так, чтобы его объём был наибольшим.

12.3.8 Число 66 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение этих чисел было бы наибольшим.

12.3.9 По двум улицам движутся к перекрёстку два автомобиля с постоянными скоростями $v_1 = 50 \text{ км/ч}$ и $v_2 = 40 \text{ км/ч}$. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент времени автомобили находятся от перекрёстка на расстояниях $l_1 = 4 \text{ км}$ и $l_2 = 3 \text{ км}$, определить, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

12.3.10 Для указанных функций найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба:

а) $y = x^3 - 6x^2 + x + 6$; б) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$; в) $y = \frac{\ln x}{x}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}$.

12.3.11 Найти асимптоты графиков указанных функций:

а) $y = \frac{2x}{3x - 3}$; б) $y = \frac{x^3}{x^2 - 9}$; в) $y = x e^{1/x}$; г) $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 5}$; д) $y = \operatorname{tg} x$.

12.3.12 Провести полное исследование и построить графики указанных функций:

а) $y = x^3 - 18x^2 + 60x + 3$; б) $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$; в) $y = e^{2x - x^2}$; г) $y = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}}$.

12.3.13 Провести полное исследование и построить график функций $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$. Сколько корней имеет уравнение $\frac{x^3}{2(1+x)^2} = a$, в зависимости от параметра a .

12.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

12.4.1 Найти наибольшее $\max_{[a;b]} f(x)$ и наименьшее $\min_{[a;b]} f(x)$ значения

функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

12.4.1.1 $y = \sqrt[3]{(x^2 + 5x + 4)^2}$, $[-5; -2]$.

12.4.1.2 $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $[1; 3]$.

12.4.1.3 $y = \sin(x + \pi/3)$, $[0; 3\pi/2]$.

12.4.1.4 $y = e^{x^2 - 6x + 2}$, $[0; 4]$.

12.4.1.5 $y = \ln x/x$, $[1; 3]$.

12.4.1.6 $y = \sqrt[5]{(x^2 - 7x + 12)^4}$, $[3; 5]$.

12.4.1.7 $y = x^3 + 4x^2 - 11x + 2$, $[0; 4]$.

12.4.1.8 $y = \cos(x + \pi/6)$, $[-\pi/2; \pi]$.

12.4.1.9 $y = e^{x^2 + 4x}$, $[-3; -1]$.

12.4.1.10 $y = \ln(4 - x^2)$, $[-1; 3/2]$.

12.4.1.11 $y = \sqrt[4]{(x^2 + 6x + 8)^3}$, $[-8; -4]$.

12.4.1.12 $y = x^3 - 3x^2 + 5$, $[-2; 1]$.

12.4.1.13 $y = \sin(x - \pi/4)$, $[0; 2\pi]$.

12.4.1.14 $y = e^{x^2 - 2x}$, $[0; 2]$.

12.4.1.15 $y = \ln(9 - x^2)$, $[1; 2]$.

12.4.1.16 $y = \sqrt[4]{(x^2 + 6x + 8)^3}$, $[-8; -4]$.

12.4.1.17 $y = x^3 + 5x^2 + 3x$, $[-5; -1]$.

12.4.1.18 $y = \cos(x - \pi/4)$, $[\pi/2; 2\pi]$.

12.4.1.19 $y = e^{x^2 + 8x}$, $[-5; 0]$.

12.4.1.20 $y = \ln(16 - x^2)$, $[-\sqrt{15}; \sqrt{15}]$.

12.4.1.21 $y = \sqrt[9]{(x^2 - 12x + 120)^7}$, $[0; 7]$.

12.4.1.22 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $[2; 5]$.

12.4.1.23 $y = \sin(x - \pi/6)$, $[-\pi/2; \pi]$.

12.4.1.24 $y = e^{x^2 - 10x}$, $[0; 6]$.

12.4.1.25 $y = \ln(1 + x^2)$, $[-2; 3]$.

12.4.1.26 $y = \sqrt[4]{(x^2 + 6x + 8)^3}$, $[-8; -4]$.

12.4.1.27 $y = x^3 + 0,5 \cdot x^2 - 2x$, $[0; 5]$.

12.4.1.28 $y = \cos(x - \pi/3)$, $[-3\pi/2; \pi]$.

12.4.1.29 $y = e^{4x - x^2}$, $[1; 3]$.

12.4.1.30 $y = 2\ln(e + x^2)$, $[-1; 1]$.

12.4.2 Решить следующие задачи.

12.4.2.1 Найти наибольший объём конуса с длиной образующей, равной $3\sqrt{3}$.

12.4.2.2 Найти высоту цилиндра, который можно вписать в шар радиуса $5\sqrt{2}$ и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

12.4.2.3 Найти радиус основания конуса с боковой поверхностью, равной $(\sqrt{2} + 1) \cdot \pi$, если шар, вписанный в этот конус, имеет наибольший объём.

12.4.2.4 Найти наибольшую площадь боковой поверхности конуса, который вписан в шар радиуса $R = 3$ м.

12.4.2.5 Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около полушара радиуса $\sqrt{27}$, при этом центр шара совпадает с центром основания конуса.

12.4.2.6 Найти наибольший объём цилиндра, вписанный в шар радиуса $3\sqrt{3}$.

12.4.2.7 Найти отношение радиуса шара, описанного около цилиндра, с наибольшей площадью боковой поверхности, к радиусу основания цилиндра.

12.4.2.8 Во сколько раз объём шара, описанного около цилиндра наибольшего объёма, больше объёма этого цилиндра?

12.4.2.9 Найти отношение радиуса шара, который описан около конуса наибольшего объёма, к высоте этого конуса.

12.4.2.10 Найти радиус основания конуса наименьшего объёма, в который вписан цилиндр, радиус основания которого равен 4. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

12.4.2.11 В конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол величиной 2φ , вписана сфера радиуса $R = 4$ м. При каких значениях угла φ площадь боковой поверхности конуса будет наименьшей? Найти эту наименьшую площадь.

12.4.2.12 Найти наибольшее значение объёма правильной четырёхугольной пирамиды, вершины которой принадлежат описанной сфере радиуса $R = 9$ м.

12.4.2.13 Найти наибольшее значение объёма правильной треугольной призмы, если расстояние от центра основания до одной из вершин другого основания равно $4\sqrt{3}$ м.

12.4.2.14 Найти отношение высоты конуса, описанного около цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, к высоте этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

12.4.2.15 Найти отношение радиуса основания конуса, описанного около цилиндра наибольшего объёма, к радиусу основания этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

12.4.2.16 В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно $l = 2$ м. При какой длине стороны основания объём пирамиды будет наибольшим? Найти наибольший объём пирамиды.

12.4.2.17 Найти наибольший объём цилиндра, если площадь его полной поверхности равна $S = 12\pi$ м².

12.4.2.18 Найти наименьшую площадь полной поверхности прямой правильной треугольной призмы объёмом $V = 36$ м³.

12.4.2.19 Найти наибольший объём правильной четырёхугольной пирамиды с боковым ребром $l = \sqrt{2}$ м.

12.4.2.20 Из всех правильных треугольных призм с заданным объёмом $V = 16\sqrt{3}$ м³ найти призму с наименьшей суммой длин всех её рёбер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

12.4.2.21 Найти площадь прямоугольника наибольшей площади, который вписан в окружность радиуса $R = 4\sqrt{2}$ м.

12.4.2.22 В конус радиуса 4 см и высотой 6 см вписан цилиндр наибольшего объёма. Определить высоту цилиндра.

12.4.2.23 Найти наибольшую площадь прямоугольника, основание которого лежит на гипотенузе длиной 13 см описанного прямоугольного треугольника, острый угол которого равен 30° .

12.4.2.24 Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольную трапецию с длинами оснований 24 см и 8 см и длиной высоты 12 см.

12.4.2.25 Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами длиной 18 см, 24 см 30 см и имеющего с ними общий острый угол.

12.4.2.26 Первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен десяти. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_6$.

12.4.2.27 Пятый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен двенадцати. Найти наименьшее значение произведения $S = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5$.

12.4.2.28 Четвёртый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен четырём. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_3$.

12.4.2.29 Определить размеры открытого бассейна объёмом 64 м^3 с квадратным дном таким образом, чтобы на облицовку дна и стен плиткой пошло наименьшее количество материала.

12.4.2.30 Через какую точку на кривой $y = -x^2 + 2x$ должна проходить касательная к этой кривой, чтобы трапеция, образованная касательной, осями координат и прямой $x = 1$, имела наименьшую площадь?

12.4.3 Определить число корней уравнения $f(x) = a$, где параметр $a \in \mathbb{R}$, проведя полное исследование графика функции $y = f(x)$.

12.4.3.1 а) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$; б) $f(x) = (3-x) \cdot e^{x-2}$.

12.4.3.2 а) $f(x) = \frac{x^3 + 4}{(x+1)^3}$; б) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

12.4.3.3 а) $f(x) = \frac{8x^3 + 8x}{(2x-1)^3}$; б) $f(x) = (4-x) \cdot e^{x-3}$.

12.4.3.4 а) $f(x) = \frac{8x^3 + 8x}{(2x+1)^3}$; б) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

12.4.3.5 а) $f(x) = \frac{x^4 - 8}{(x+1)^4}$; б) $f(x) = (-1-x) \cdot e^{x+2}$.

12.4.3.6 а) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = x^2 \ln x$.

12.4.3.7 а) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 1}$; б) $f(x) = (4+x) \cdot e^{-x-3}$.

12.4.3.8 а) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

12.4.3.9 а) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$; б) $f(x) = (3+2x) \cdot e^{-2x-2}$.

12.4.3.10 а) $f(x) = \frac{x}{2-x^3}$; б) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

$$12.4.3.11 \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

$$\text{б) } f(x) = (x - 2) \cdot e^{3-x}.$$

$$12.4.3.12 \text{ a) } f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1};$$

$$\text{б) } f(x) = x^2 \cdot \ln^2 x.$$

$$12.4.3.13 \text{ a) } f(x) = \frac{x^2}{x - 2};$$

$$\text{б) } f(x) = (5 + 2x) \cdot e^{-2x-4}.$$

$$12.4.3.14 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x^2}{\ln x}.$$

$$12.4.3.15 \text{ a) } f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 4};$$

$$\text{б) } f(x) = (2x - 1) \cdot e^{\frac{2}{x}}.$$

$$12.4.3.16 \text{ a) } f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2};$$

$$\text{б) } f(x) = x \cdot \ln^2 x.$$

$$12.4.3.17 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{2x+2}}{2x + 2}.$$

$$12.4.3.18 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 4x + 2};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}.$$

$$12.4.3.19 \text{ a) } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

$$12.4.3.20 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \ln \frac{x}{x + 2} + 2.$$

$$12.4.3.21 \text{ a) } f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{5x-5}}{5x - 5}.$$

$$12.4.3.22 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = \ln \frac{x}{x - 3} - 3.$$

$$12.4.3.23 \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{7-x}}{7 - x}.$$

$$12.4.3.24 \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4};$$

$$\text{б) } f(x) = 2 \ln \frac{x + 3}{x} - 3.$$

$$12.4.3.25 \text{ a) } f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = -\frac{e^{-3-x}}{3 + x}.$$

$$12.4.3.26 \text{ a) } f(x) = \frac{8x - 8}{x^2 + 2x + 1};$$

$$\text{б) } f(x) = 3 \cdot \ln \frac{x}{x + 3} - 7.$$

$$12.4.3.27 \text{ a) } f(x) = \frac{x^3 - 32}{x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{e^{9+x}}{9 + x}.$$

$$12.4.3.28 \text{ a) } f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1};$$

$$\text{б) } f(x) = e^{2x-x^2}.$$

$$12.4.3.29 \text{ а) } f(x) = \frac{x^5}{x^4 - 1};$$

$$\text{б) } f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6).$$

$$12.4.3.30 \text{ а) } f(x) = \frac{1 - 2x^3}{x^2};$$

$$\text{б) } f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

13 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ (практические занятия 33–34)

Содержание: векторная функция скалярного аргумента, годограф. Производная вектор-функции, уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой, кривизна кривой, радиус, круг и центр кривизны, эволюта и эвольвента.

13.1 Теоретический материал по теме практических занятий

При решении технических задач часто приходится иметь дело не только с числовыми функциями, но и с функциями, у которых область определения или множество значений состоит из элементов произвольной природы, например, являются подмножеством множества векторов трёхмерного пространства.

Определение 13.1.1 Векторной функцией действительного аргумента называется отображение, которое каждому действительному числу $t \in D \subseteq \mathbf{R}$ ставит в соответствие единственный вектор $\vec{a} = \vec{a}(t) \in E \subseteq V^3$.

Задание вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ равносильно заданию трёх скалярных функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$, которые являются её координатами: $\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$. Если вектор $\vec{a}$ является радиусом-вектором точки $M(x; y; z)$, то вектор-функцию принято обозначать:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Разным значениям t будут соответствовать различные значения вектор-функции, то есть вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ имеет определённую длину и направление. Таким образом, вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ может изменяться как по величине, так и по направлению. Зафиксируем точку приложения вектор-функции. При непрерывном изменении параметра t конец вектора $\vec{a} = \vec{a}(t)$ описывает некоторую линию.

Определение 13.1.2 Линия, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{a}$ при непрерывном изменении параметра $t \in D \subseteq \mathbf{R}$, называется *годографом* вектор функции скалярного аргумента $\vec{a}(t)$.

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движущейся в пространстве материальной точки, а любую линию в пространстве как годограф некоторой вектор-функции.

Введём понятие предела, непрерывности и производной вектор-функции. Предположим, что вектор-функция $\vec{a} = \vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$ определена

в некоторой окрестности точки t_0 . Это означает, что в окрестности точки t_0 определены числовые функции $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$.

Определение 13.1.3 Вектор $\vec{a} = a_x^0 \vec{i} + a_y^0 \vec{j} + a_z^0 \vec{k}$ называется *пределом вектор-функции* $\vec{a} = a_x(t) \vec{i} + a_y(t) \vec{j} + a_z(t) \vec{k}$ при значении $t \rightarrow t_0$, если она определена в проколотовой окрестности точки t_0 и

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t) = a_x^0, \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t) = a_y^0, \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t) = a_z^0$$

В этом случае записывают: $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}^0$ или

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t) \cdot \vec{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t) \cdot \vec{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t) \cdot \vec{k} = a_x^0 \cdot \vec{i} + a_y^0 \cdot \vec{j} + a_z^0 \cdot \vec{k}.$$

Таким образом, для того чтобы найти предел вектор-функции, необходимо найти соответствующие пределы координат данной функции. Если хотя бы один из пределов координат функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ не существует, то не существует предела вектор-функции. Так как определение предела вектор-функции конструктивно не отличается от определения предела функции, то и правила нахождения предела будут аналогичны правилам нахождения предела функции: предел суммы равен сумме пределов, предел скалярного или векторного произведения вектор-функций равен скалярному или векторному произведению вектор-функций.

Определение 13.1.4 Вектор-функция $\vec{a}(t)$ называется непрерывной в точке t_0 , если она определена в окрестности этой точки и $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}(t_0)$.

Определение 13.1.5 Производной вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ по аргументу t называется новая вектор-функция

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

Если $\vec{a}(t) = (a_x(t); a_y(t); a_z(t))$, то

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left(\frac{a_x(t)}{dt}; \frac{a_y(t)}{dt}; \frac{a_z(t)}{dt} \right).$$

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$.

С геометрической точки зрения производная вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке t_0 есть вектор-функция $\vec{r}' = \vec{r}'(t_0)$, направленный по касательной к годографу этой вектор-функции в сторону возрастания параметра t .

Механический смысл производной от вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ состоит в том, что $\vec{r}'(t)$ есть вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции ($\vec{r}'(t_0) = \vec{v}(t_0)$).

Приведём правила дифференцирования вектор-функций ($\vec{a} = \vec{a}(t)$, $\vec{b} = \vec{b}(t)$).

1. $\frac{d}{dt}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt}$.
2. $\frac{d}{dt}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$, где α – постоянный скаляр.
3. $\frac{d\vec{c}}{dt} = 0$, где $\vec{c}$ – постоянный вектор.
4. $\frac{d}{dt}(\varphi \cdot \vec{a}) = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{a} + \varphi \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$, где $\varphi = \varphi(t)$ – скалярная функция от t .
5. $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$.
6. $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$.
7. $\frac{d}{dt}(\vec{a}(\varphi(t))) = \frac{d\vec{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, где $\varphi = \varphi(t)$ – скалярная функция от t .
8. $\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$, если $|\vec{a}| = 0$.

Производная вектор-функции $\vec{a}'(t)$ является, в свою очередь, вектор-функцией скалярного аргумента, и её также можно дифференцировать.

Определение 13.1.6 Производной второго порядка вектор-функции $\vec{a}(t)$ называется производная от производной первого порядка $\vec{a}'(t)$.

$$\vec{a}''(t) = \frac{d^2 \vec{a}(t)}{dt^2} = (\vec{a}'(t))' = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \right).$$

По индукции определяются производные высшего порядка:

$$\vec{a}^{(n)}(t) = \frac{d^n \vec{a}(t)}{dt^n} = (\vec{a}^{(n-1)}(t))' = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1} \vec{a}}{dt^{n-1}} \right).$$

Механический смысл второй производной от вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 состоит в том, что $\vec{r}''(t_0)$ есть вектор ускорения движения материальной точки в данный момент времени.

Таким образом, если $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор материальной точки, $\vec{v}(t)$ – скорость, а $\vec{a}(t)$ – ускорение, то

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

Рассмотрим пространственную кривую L , заданную параметрическим образом: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Эта кривая представляет собой годограф век-

тор-функции $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, а вектор $\vec{r}'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0))$ направлен по касательной к кривой L в точке касания $M_0(x_0; y_0; z_0)$, соответствующей значению параметра t_0 , а, следовательно, этот вектор возьмём в качестве направляющего вектора касательной. Тогда уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \quad (13.1.1)$$

Определение 3.1.7 *Нормальной плоскостью* к пространственной кривой называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и проходящая через точку касания.

Уравнение нормальной плоскости к пространственной кривой имеет вид

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (13.1.2)$$

Пусть кривая в плоскости Oxy является годографом вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(l) = (x(l); y(l))$, где l – длина дуги кривой.

Определение 3.1.8 *Кривизной кривой* называется абсолютная величина предела отношения угла $\Delta\varphi$ поворота касательной, соответствующей дуге данной кривой, к длине Δl этой дуги, при стремлении последней к нулю, и если этот предел существует и конечен.

$$K = \left| \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \right|. \quad (13.1.3)$$

Величина $R = 1/K$ называется *радиусом кривизны*.

Кривизна K определяется соотношением

$$K = \left| \frac{d^2 r}{dl^2} \right| = \left| \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{\vec{r}'^3} \right|. \quad (13.1.4)$$

Формулы для вычисления кривизны:

1) если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то

$$K = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right|; \quad (13.1.5)$$

2) если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$K = \left| \frac{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \right|. \quad (13.1.6)$$

3) если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, то

$$K = \left| \frac{r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \right|. \quad (13.1.7)$$

Определение 3.1.9 *Окружностью кривизны* кривой в её точке M называется предельное положение окружности, проведённой через точку M и две другие точки кривой, при стремлении последних к точке M .

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны, а *центр кривизны*, соответствующей точке M , находится на нормали к кривой, проведённой в точке M в сторону вогнутости кривой.

Координаты x_c и y_c центра кривизны равны

$$x_c = x - \frac{y' \cdot (1 + y'^2)}{y''}, \quad y_c = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \quad (13.1.8)$$

Определение 3.1.10 Множество точек центров кривизны линии называется *эволютой*, а сама линия по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

13.2 Примеры решения типовых задач

13.2.1 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = \frac{16 - 4t^2}{4 + t^2} \vec{i} + \frac{16t}{4 + t^2} \vec{j} + 3\vec{k}$.

Решение. Имеем параметрические уравнения годографа

$$x(t) = \frac{16 - 4t^2}{4 + t^2}, \quad y(t) = \frac{16t}{4 + t^2}, \quad z(t) = 3.$$

Исключая параметр t , получим

$$x^2 + y^2 = \frac{(16 - 4t^2)^2}{(4 + t^2)^2} + \frac{256t^2}{(4 + t^2)^2} = \frac{16 \cdot (16 + 8t^2 + t^4)}{(4 + t^2)^2} = 16.$$

Следовательно, годографом функции $\vec{r}(t)$ является окружность

$$x^2 + y^2 = 16, \quad z = 3,$$

из которой исключена точка $P_0(-4; 0; 3)$. При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $P(x; y; z)$ на годографе движется от точки $P_0(-4; 0; 3)$ против часовой стрелки, если наблюдать из точки расположенной выше плоскости $z = 3$. При этом $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x = -4$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y = 0$.

13.2.2 Дано уравнение движения: $\vec{r}(t) = (4t^2 - 2)\vec{i} + (1 - 3t^4)\vec{j} + t^4\vec{k}$. Определить скорость и ускорение движения.

Решение. $v(t) = \vec{r}'(t) = 8t \cdot \vec{i} - 12t^3 \cdot \vec{j} + 4t^3 \cdot \vec{k}$,

$$v(t) = \vec{r}''(t) = 8 \cdot \vec{i} - 36t^2 \cdot \vec{j} + 12t^2 \cdot \vec{k}$$

13.2.3 Найти кривизну и радиус кривизны линии $y = x^3 + 5x^2 + 3x$ в точке $M(1; 9)$.

Решение. Вычислим значения первой и второй производной в точке M : $y' = 3x^2 + 10x + 3$, $y'(1) = 16$, $y'' = 6x + 10$, $y''(1) = 16$. Тогда

$$K = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{16}{(1 + 16^2)^{3/2}} \right| = \frac{16}{257\sqrt{257}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{257\sqrt{257}}{16}.$$

13.2.4 Найти уравнение эволюты параболы $y^2 = 2x + 2$.

Решение. Находим первую и вторую производные.

$$2yy' = 2, \quad y' = 1/y, \quad y'^2 + yy'' = 0, \quad y'' = -y'^2/y = -1/y^3.$$

По формулам (13.1.8) находим координаты центра кривизны:

$$X = x - \frac{y' \cdot (1 + y'^2)}{y''} = \frac{y^2}{2} - 1 - \frac{\frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)}{-\frac{1}{y^3}} = \frac{3}{2}y^2;$$

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y + \frac{1 + \frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{y^3}} = -y^3.$$

Таким образом, найдены параметрические уравнения эволюты:

$$X = \frac{3}{2}y^2, \quad Y = -y^3.$$

Исключая параметр y , найдём уравнение эволюты в виде

$$X^3 = \frac{27}{8}Y^2.$$

Выполнив замену $Y = y$, $X = x$, окончательно получаем уравнение искомой эволюты: $27y^2 = 8x^3$.

13.2.5 Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = t^3 - 1$, $y = t^2$, $z = 4t^2 + 1$ в точке $P_0(0; 1; 5)$.

Решение. Данной точке соответствует значение параметра $t = 1$. Находим производные

$$x' = (t^3 - 1)' = 3t^2, \quad y' = (t^2)' = 2t, \quad z' = (4t^2 + 1)' = 8t.$$

Подставляя значение $t = 1$, получаем

$$x'(1) = 3, \quad y'(1) = 2, \quad z'(1) = 8.$$

Для записи уравнения касательной прямой и нормальной плоскости воспользуемся уравнениями (13.1.1) и (13.1.2), соответственно.

Уравнение касательной прямой:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{8}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$3x + 2(y - 1) + 8(z - 5) = 0,$$

или

$$3x + 2y + 8z - 42 = 0.$$

13.3 Задания для решения на практических занятиях

13.3.1 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = (2t - 1)\vec{i} + (2 - 3t)\vec{j} + 4t\vec{k}$.

13.3.2 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = \sqrt{1 - t^2} \cdot \vec{i} + \sqrt{1 + t^2} \cdot \vec{j}$.

13.3.3 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = 4\text{ch } t \cdot \vec{i} - \vec{j} + 3\text{sh } t \cdot \vec{k}$.

13.3.4 Найти годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + 2t \cdot \vec{k}$.

13.3.5 Дано уравнение движения: $\vec{r}(t) = (2t - 2\sin t)\vec{i} + (2 - 2\cos t)\vec{j}$. Определить скорость и ускорение движения. Построить векторы скорости и ускорения для моментов $t = \pi/2$, $t = \pi$ и $t = 3\pi/2$.

13.3.6 Дано уравнение движения: $\vec{r}(t) = 3t \cdot \vec{i} + (4t - t^3)\vec{j}$. Определить скорость и ускорение движения. Построить векторы скорости и ускорения для моментов $t = 0$, $t = 1$ и $t = 2$.

13.3.7 Дано уравнение движения: $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + 5 \cdot \vec{k}$. Определить скорость и ускорение движения. Построить векторы скорости и ускорения для моментов $t = \pi/2$, $t = \pi$ и $t = 3\pi/2$.

13.3.8 Найти кривизну и радиус кривизны линии $y = x^2$ в точке $M(1; 1)$.

13.3.9 Найти кривизну и радиус кривизны линии $x^2 + 4y^2 = 4$ в точках $M_1(2; 0)$ $M_2(0; 1)$.

13.3.10 Найти кривизну и радиус кривизны линии $x^2 - xy + y^2 = 1$ при значении $t = 1$.

13.3.11 Найти кривизну и радиус кривизны линии $x = t^2/2$, $y = t^3/3$ в точке $M(1/2; 1/3)$.

13.3.12 Найти кривизну и радиус кривизны линии $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в любой точке.

13.3.13 Найти кривизну и радиус кривизны линии $r = a(1 - \cos \varphi)$ в любой точке и при значении $\varphi = \pi$.

13.3.14 Найти кривизну и радиус кривизны линии $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ в любой точке и при значении $\varphi = \pi$.

13.3.15 Найти уравнение эволюты кривой $y = x^3$.

13.3.16 Найти уравнение эволюты кривой $x^2 - y^2 = 4$.

13.3.17 Найти уравнение эволюты кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

13.3.18 Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = 2\sin^2 t$, $y = 2\sin 2t$, $z = 4\cos^2 t$ при значении $t = \pi/6$.

13.3.19 Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = 3\text{sh } t$, $y = 3\text{ch } t$, $z = 3t$ при значении $t = 0$.

13.3.20 Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = 2t^3$, $y = 3t^2$, $z = 2t^2 - t + 1$ в точке $P_0(16; 12; 7)$.

13.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

13.4.1 Написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$.

13.4.1.1 $x(t) = 2t^2 + 3t - 1$, $y(t) = 3t^3 + 2t - 2$, $z(t) = 4t - 2t^2$, $P_0(4; 3; 2)$.

13.4.1.2 $x(t) = 3e^{2t}$, $y(t) = 4e^{3t}$, $z(t) = 5e^{4t}$, $P_0(3; 4; 5)$.

13.4.1.3 $x(t) = \sin 2t$, $y(t) = \cos 2t$, $z(t) = \sin 3t$, $P_0(0; -1; -1)$.

13.4.1.4 $x(t) = 16\sqrt{t}$, $y(t) = 48\sqrt[3]{t}$, $z(t) = 12\sqrt[3]{t^2}$, $P_0(128; 192; 768)$.

13.4.1.5 $x(t) = \operatorname{tg} t$, $y(t) = \operatorname{ctg} t$, $z(t) = 8t/\pi$, $P_0(1; 1; 2)$.

13.4.1.6 $x(t) = 3t^2 + 5t - 2$, $y(t) = 4t^3 + t - 4$, $z(t) = 2t - 3t^2$, $P_0(20; 30; -10)$.

13.4.1.7 $x(t) = 4e^{2t}$, $y(t) = 5e^{4t}$, $z(t) = 2e^{3t}$, $P_0(36; 405; 54)$.

13.4.1.8 $x(t) = \sin 3t$, $y(t) = -\cos 2t$, $z(t) = \sin t$, $P_0(-1; 1; 1)$.

13.4.1.9 $x(t) = 20\sqrt[4]{t}$, $y(t) = 4\sqrt{t}$, $z(t) = 6\sqrt[3]{t}$, $P_0(20; 4; 6)$.

13.4.1.10 $x(t) = 2\operatorname{tg} 3t$, $y(t) = \operatorname{ctg} 3t$, $z(t) = 12t/\pi$, $P_0(-2; -1; 3)$.

13.4.1.11 $x(t) = 5t^2 + 4t - 2$, $y(t) = 5t^3 + t - 1$, $z(t) = 3t - 2t^2$, $P_0(-1; -7; -5)$.

13.4.1.12 $x(t) = 2e^{4t}$, $y(t) = 5e^{3t}$, $z(t) = 2e^{2t}$, $P_0(162; 135; 18)$.

13.4.1.13 $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \sin 2t$, $z(t) = \sin 3t$, $P_0(-1; 0; -1)$.

13.4.1.14 $x(t) = 3\sqrt[3]{t^4}$, $y(t) = 6\sqrt[3]{t^5}$, $z(t) = 2\sqrt{t^3}$, $P_0(768; 6144; 1024)$.

13.4.1.15 $x(t) = 3\operatorname{tg} 5t$, $y(t) = 5\operatorname{ctg} 3t$, $z(t) = 16t/\pi$, $P_0(3; -5; 4)$.

13.4.1.16 $x(t) = 4t^2 + 3t - 2$, $y(t) = -t^3 + t - 2$, $z(t) = -t + t^2$, $P_0(8; 4; 6)$.

13.4.1.17 $x(t) = e^{3t}$, $y(t) = 3e^{2t}$, $z(t) = 6e^t$, $P_0(27; 27; 18)$.

13.4.1.18 $x(t) = \sin 5t$, $y(t) = \cos 6t$, $z(t) = \sin 7t$, $P_0(1; -1; -1)$.

13.4.1.19 $x(t) = 4\sqrt{t}$, $y(t) = 12\sqrt[4]{t}$, $z(t) = -\sqrt[4]{t^3}$, $P_0(16; 24; -8)$.

13.4.1.20 $x(t) = 4\operatorname{tg} 7t$, $y(t) = 7\operatorname{ctg} 5t$, $z(t) = 20t/\pi$, $P_0(-4; 7; 5)$.

13.4.1.21 $x(t) = t^2 + 8t - 3$, $y(t) = 12t^3 + 12t - 9$, $z(t) = 3t - 2t^2$, $P_0(-3; -9; 0)$.

13.4.1.22 $x(t) = 5e^t$, $y(t) = 6e^{2t}$, $z(t) = 4e^{3t}$, $P_0(10; 24; 32)$.

13.4.1.23 $x(t) = 4\sin 3t$, $y(t) = 2\cos 3t$, $z(t) = 4\sin t$, $P_0(-4; 0; 4)$.

13.4.1.24 $x(t) = 16\sqrt{-t}$, $y(t) = 48\sqrt[3]{t}$, $z(t) = 12\sqrt[3]{t^2}$, $P_0(128; -192; 768)$.

13.4.1.25 $x(t) = 2\operatorname{ctg} 9t$, $y(t) = 3\operatorname{tg} 3t$, $z(t) = 24t/\pi$, $P_0(2; -3; 6)$.

13.4.1.26 $x(t) = t^2 + t - 2$, $y(t) = t^3 - 9t - 2$, $z(t) = 6t - t^2$, $P_0(10; -2; 9)$.

13.4.1.27 $x(t) = 4e^{3t}$, $y(t) = 7e^{2t}$, $z(t) = 9e^{3t}$, $P_0(32; 28; 72)$.

13.4.1.28 $x(t) = 2\sin 3t$, $y(t) = 4\cos 5t$, $z(t) = 2\cos 2t$, $P_0(0; -4; 2)$.

13.4.1.29 $x(t) = 4\sqrt{-t}$, $y(t) = 12\sqrt[4]{-t}$, $z(t) = -2\sqrt[4]{-t^3}$, $P_0(16; 24; -8)$.

13.4.1.30 $x(t) = 28t/\pi$, $y(t) = 7\operatorname{ctg} 7t$, $z(t) = -7\operatorname{tg} 3t$, $P_0(7; -7; 7)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – 254 с.
2. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / А. В. Ефимов [и др.]. – Москва : Наука, 1984. – 460 с.
3. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск : Новое знание, 2008. – 263 с.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 4 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – 270 с.
5. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.
6. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математике (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.
7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. школа, 1983. – 168 с.
8. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. школа, 1967. – 350.
9. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.
10. Герасимович, А. И. Математический анализ. В 2 ч. / А. И. Герасимович, П. П. Кеда, М. Б. Суган. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 1–2.
11. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 89 с.
12. Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов первого курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2010. – 71 с.
13. Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. В 4 ч. Ч. 1 / В. С. Денисов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2003. – 65 с.
14. Карасёв, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 1 / А. И. Карасёв, З. М. Аксютин, Т. И. Савельева. – Москва : Высш. школа, 1990. – 272 с.
15. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – Москва : Высш. школа, 1980. – 300 с.
16. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск : Высш. школа, 1978. – 256 с.