

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

**МАТЕМАТИКА.
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Практикум

для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)», 1-43 01 07 «Техническая эксплуатация энергооборудования организаций»

Витебск
2018

УДК 517 (076.1) (075.8)

Составители:

А. В. Коваленко, А. А. Джежора, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 5 от 28.05.2018.

Математика. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных : практикум / сост. А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2018. – 98 с.

Издание содержит методические указания к решению задач по курсу «Математика» и соответствует учебной программе данного курса. В каждом разделе практикума приведены краткие теоретические сведения, задания для решения на практических занятиях и задачи для самостоятельного решения. Практикум предназначен для эффективной подготовки студентов к практическим занятиям, к промежуточному контролю знаний, зачетам и экзаменам.

Методическая разработка может быть использована студентами всех специальностей.

УДК 517 (076.1) (075.8)

© УО «ВГТУ», 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Перечень вопросов учебной программы по курсу «Математика» и «Высшая математика» для специальностей 1-36 01 01, 1-43 01 07, 1-40 05 01-01 (первый курс, второй семестр)	5
Практикум по решению задач.....	8
1 Первообразная функции и неопределённый интеграл	8
2 Методы интегрирования неопределённого интеграла	14
3 Интегрирование рациональных дробей	20
4 Интегрирование тригонометрических функций	29
5 Интегрирование иррациональных выражений	33
6 Определённый интеграл	38
7 Несобственные интегралы	46
8 Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла	49
9 Вычисление длин дуг плоских и пространственных кривых с помо- щью определённого интеграла	56
10 Вычисление объёмов пространственных тел и площадей поверхно- стей с помощью определённого интеграла	63
11 Механические приложения определённых интегралов.....	67
12 Контрольная работа	74
13 Функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных	77
14 Геометрические применения функции нескольких переменных. Полный дифференциал функции нескольких переменных	82
15 Локальный экстремум функции нескольких переменных	87
16 Условный и глобальный экстремум функции нескольких перемен- ных	90
Литература	96
Приложение А	97

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Высшая математика» и «Математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих инженеров механико-информационных специальностей. Среди рассмотренных в практикуме типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Данные учебно-методические материалы предназначены для студентов факультета информационных технологий и робототехники. В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена, содержание и тематика практических занятий по указанным курсам. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика» и «Математика» для студентов механико-технологических специальностей первого года обучения.

В практикуме рассмотрены три раздела курсов «Высшая математика» и «Математика»: неопределённый интеграл, определённый интеграл и дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Каждая тема практикума представляет собой методический материал для проведения практического занятия, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия, а также задания для выполнения контролируемой самостоятельной работы. В начале каждого раздела приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнению домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование тем практикума, а также их структура построены в соответствии с базовой и учебной программами дисциплин «Высшая математика» и «Математика» для студентов механико-технологических специальностей. Данная работа может применяться на усмотрение преподавателя на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный в практикуме теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

Предложенная методическая разработка поможет студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена подразумевают электронный контроль знаний.

**ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ
«МАТЕМАТИКА» И «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 1-36 01 01, 1-43 01 07, 1-40 05 01-01
(ПЕРВЫЙ КУРС, ВТОРОЙ СЕМЕСТР)**

1. Первообразная функции. Теорема о первообразных.
2. Определение неопределенного интеграла, его геометрический смысл.
3. Таблица неопределённых интегралов основных элементарных функций.
4. Свойства неопределенного интеграла.
5. Методы интегрирования неопределенного интеграла.
6. Интегрирование простейших рациональных дробей.
7. Интегрирование рациональных выражений.
8. Интегрирование иррациональных выражений.
9. Интегрирование тригонометрических выражений.
10. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
11. Интегральная сумма. Понятие определенного интеграла. Условия интегрируемости функции.
12. Свойства определенного интеграла.
13. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.
14. Связь неопределенного и определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
15. Методы интегрирования определенного интеграла.
16. Несобственные интегралы первого рода.
17. Несобственные интегралы второго рода.
18. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной декартовой системе координат.
19. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат.
20. Вычисление длины дуги плоской кривой в прямоугольной декартовой системе координат и в полярной системе координат.
21. Вычисление длины дуги кривой в полярной системе координат.
22. Вычисление объемов тел по известному поперечному сечению. Объемы тел вращения.
23. Площади поверхности вращения.
24. Приложения определенного интеграла в механике: вычисление пути по заданной скорости, работы переменной силы, силы давления жидкости на пластину.
25. Вычисление массы и центра масс дуги.
26. Вычисление массы и центра масс плоской фигуры.
27. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.
28. Частные производные функции нескольких переменных.

29. Геометрический смысл частных производных функций двух переменных.
30. Необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
31. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его применение к приближенным вычислениям.
32. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных. Инвариантность формы полного дифференциала.
33. Дифференцирование функции нескольких переменных, заданных неявно.
34. Касательная плоскость и нормаль к поверхности $z=f(x,y)$.
35. Скалярное поле. Производная функции по направлению скалярного поля. Градиент скалярного поля.
36. Частные производные высшего порядка и полные дифференциалы высшего порядка функции нескольких переменных.
37. Формула Тейлора для функций двух переменных.
38. Локальные экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия локального экстремума функций нескольких переменных.
39. Локальные экстремумы функций двух переменных. Необходимое и достаточное условия локального экстремума функций двух переменных.
40. Условный экстремум функций нескольких переменных.
41. Условный экстремум функций двух переменных.
42. Наибольшее и наименьшее значения (глобальные экстремумы) функций нескольких переменных в замкнутой области.
43. Дифференциальные уравнения (общие понятия). Теорема существования задачи Коши.
44. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
45. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
46. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом подстановки Бернулли.
47. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом вариации произвольной постоянной.
48. Решение дифференциальных уравнений первого порядка сводящихся к однородным и линейным уравнениям.
49. Уравнения в полных дифференциалах.
50. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка.
51. Свойства решений однородных линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка.
52. Линейная зависимость и линейная независимость системы решений однородных линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка (ОЛДУ). Определитель Вронского. Теорема об общем решении ОЛДУ.

53. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка с постоянными коэффициентами (случай действительных корней характеристического уравнения).

54. Решение однородных линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка с постоянными коэффициентами (случай комплексных корней характеристического уравнения).

55. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольной постоянной.

56. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка с постоянными коэффициентами с правой специальной частью.

57. Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Теорема существования и единственности задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений.

58. Решение нормальной системы дифференциальных уравнений методом исключений.

59. Свойства решений однородных линейных систем дифференциальных уравнений.

60. Решение однородных линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай действительных корней характеристического уравнения).

61. Решение однородных линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай комплексных корней характеристического уравнения).

62. Решение неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.

63. Оригинал и изображение. Преобразование Лапласа.

64. Оригинал и изображение основных элементарных функций.

65. Таблица оригиналов и изображений.

66. Свойства линейности и однородности преобразования Лапласа.

67. Свойство запаздывания функции-оригинала.

68. Свойство смещения функции-изображения.

69. Свойства дифференцирования оригинала и изображения.

70. Свойства интегрирования оригинала и изображения.

71. Свертка оригиналов. Теорема об изображении свертки.

72. Восстановление оригинала по заданному изображению.

73. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений.

74. Применение преобразования Лапласа к решению систем дифференциальных уравнений.

75. Интеграл Дюамеля. Применение интеграла Дюамеля к решению дифференциальных уравнений.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Содержание: первообразная функции, неопределённый интеграл, основные свойства неопределённого интеграла, таблица основных неопределённых интегралов, непосредственное интегрирование, геометрический смысл неопределённого интеграла.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Интегрирование – это задача, обратная дифференцированию. То есть по заданной производной или дифференциалу некоторой функции необходимо восстановить саму функцию. С механической точки зрения это означает, что по заданной скорости движения материальной точки необходимо восстановить закон движения этой точки.

Определение 1.1.1 Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке I , если для всех точек этого интервала выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1.1.1 Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале I , то они отличаются друг от друга лишь на постоянную величину C , то есть $F_2(x) - F_1(x) = C$, где $C = \text{Const}$.

Определение 1.1.2 Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$ называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$.

Определение 1.1.3 *Неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке I называется множество всех первообразных этой функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1.1.1)$$

В формуле (1.1.1) функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, а C – *константой*. Процесс нахождения неопределённого интеграла называется *интегрированием*.

Теорема 1.1.2 Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале I , то она интегрируема на этом интервале.

С геометрической точки зрения неопределённый интеграл представляет собой множество однопараметрических кривых $y = F(x) + C$, обладающих следующим свойством: все касательные к кривым в точках с одной и той же абсциссой параллельны между собой. Кривые множества $\{F(x) + C\}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются

друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси ординат.

Основные свойства неопределённого интеграла

- 1) $\left(\int f(x) dx\right)'_x = f(x);$
- 2) $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx;$
- 3) $\int dF(x) = F(x) + C;$
- 4) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$
- 5) $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx;$
- 6) если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(a \cdot x + b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x + b) + C.$$

Таблица основных неопределённых интегралов

- 1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$
- 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
- 3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$
- 4) $\int e^x dx = e^x + C;$
- 5) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
- 6) $\int \cos x dx = \sin x + C$
- 7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
- 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
- 9) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$
- 10) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$
- 11) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \end{cases} a \neq 0;$
- 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C, \end{cases} |x| < |a|$
- 13) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$
- 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C;$
- 15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, |x| > |a|;$
- 16) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$
- 17) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$
- 18) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$
- 19) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Если производные элементарных функций всегда выражаются элементарными функциями, то интегралы от элементарных функций не всегда можно представить в виде элементарных функций. Такие интегралы называются «не берущимися». Приведём примеры «не берущихся» интегралов: $\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ – интегральный косинус, $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$ – эллиптический интеграл первого рода, $\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx$ – эллиптический интеграл второго рода.

Одним из методов интегрирования неопределённого интеграла является *метод непосредственного интегрирования*. Данный метод основан на применении таблицы основных неопределённых интегралов и свойств неопределённого интеграла.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Найти первообразную функции $f(x) = 5\cos 7x - 3\sin 4x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Производные функций $y = \sin 7x$, $y = \cos 4x$ и $y = \arcsin x$ равны, соответственно, $y' = 7\cos 7x$, $y' = -4\sin 4x$ и $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно, $\cos 7x = \frac{1}{7}(\sin 7x)'$, $\sin 4x = -\frac{1}{4}(\cos 4x)'$, а $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arcsin x)'$. Тогда первообразная заданной функции равна $F(x) = \frac{5}{7}\sin 7x + \frac{3}{4}\cos 4x + \arcsin x$.

1.2.2 Найти $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x + 5) dx$.

Решение. Применив свойства 4 и 5, получим

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 2x + 5) dx = 4 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 5 \int dx.$$

Применим к интегралам первую формулу таблицы интегралов

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 2x + 5) dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5 \cdot x + C = x^4 + x^3 - x^2 + 5x + C.$$

1.2.3 Найти $\int \left(\frac{5}{x} + \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$.

Решение. $\int \left(\frac{5}{x} + \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = 5 \ln|x| + \sqrt[3]{x^4} - \sqrt{x} + C.$

1.2.4 Найти $\int 2^x 5^x e^x dx$.

Решение. $\int 2^x 5^x e^x dx = \int (10e)^x dx = \frac{(10e)^x}{\ln 10e} + C$.

1.2.5 Найти $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

Решение. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$
 $= -\operatorname{ctg} x - x + C$.

1.2.6 Найти $\int \frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)} dx$.

Решение. $\int \frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)} dx = \int \frac{4+4x+x^2}{x(4+x^2)} dx = \int \left(\frac{4}{4+x^2} + \frac{1}{x} \right) dx =$
 $= \frac{4}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \ln|x| + C = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \ln|x| + C$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Найти первообразные следующих функций:

1.3.1.1 $3x^5 + 2$.

1.3.1.2 $4x^3 + 5x + e$.

1.3.1.3 $\sqrt[5]{x} - \sqrt{x}$.

1.3.1.4 $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \pi$.

1.3.1.5 $\frac{1}{\sqrt{4+3x}}$.

1.3.1.6 $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

1.3.1.7 $\frac{1}{25+x^2}$.

1.3.1.8 $\frac{x^3+1}{x-1}$.

1.3.1.9 $\cos 7x - \sin 6x$.

1.3.2 Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

1.3.2.1 $\int (\sqrt{5x} + 3) dx$. **1.3.2.2** $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{4\sqrt[4]{x}} dx$ **1.3.2.3** $\int \frac{(5-\sqrt{x})^2}{5\sqrt{x}} dx$.

1.3.2.4 $\int \frac{x^4 + x^2 + 3}{x} dx$. **1.3.2.5** $\int 7^{2x} e^x dx$. **1.3.2.6** $\int (x + \sin x) dx$.

1.3.2.7 $\int \frac{6 - \cos x}{\cos^2 x} dx$. **1.3.2.8** $\int \operatorname{tg}^2 x dx$. **1.3.2.9** $\int \operatorname{cth}^2 x dx$.

1.3.2.10 $\int \frac{dx}{9-x^2}$. **1.3.2.11** $\int \frac{dx}{25+x^2}$. **1.3.2.12** $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$.

1.3.2.13 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-11}}$. **1.3.2.14** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+13}}$. **1.3.2.15** $\int \frac{(9+x)^2 dx}{x(81+x^2)}$.

$$\begin{aligned}
1.3.2.16 \quad & \int \frac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^4-25}} dx. \quad 1.3.2.17 \quad \int \frac{x^2-5}{x^2-4} dx. \quad 1.3.2.18 \quad \int \frac{x^2+8}{x^2+9} dx. \\
1.3.2.19 \quad & \int \left(\frac{9\sqrt[7]{x^2}-3\sqrt[3]{x}}{3^{21}\sqrt{x}} - \sin x + 31^x + \frac{(10+x)^2}{x(100+x^2)} - \frac{2\cos x + 3\cos^2 x}{4\cos x} + \operatorname{tg}^2 x - \frac{9}{x} \right) dx.
\end{aligned}$$

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Найти неопределённые интегралы. Результат интегрирования проверить дифференцированием.

$$1.4.1.1 \quad \int \left(\frac{5\sqrt[7]{x}-2\sqrt[4]{x}}{7^5\sqrt{x}} - 3\sin x + 2^x + \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} - \frac{\cos x + \cos^2 x}{2\cos x} + \operatorname{tg}^2 x - \frac{4}{x} + 2 \right) dx.$$

$$1.4.1.2 \quad \int \left(\frac{6\sqrt[5]{x}-3\sqrt[3]{x}}{2^7\sqrt{x}} + \cos x + 3^x + \frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)} + \frac{3\sin x + 5\sin^2 x}{4\sin x} + \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

$$1.4.1.3 \quad \int \left(\frac{4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}}{5^4\sqrt{x}} - 9\operatorname{sh} x + 4^x + \frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)} - \frac{\cos x - \cos^2 x}{3\cos x} + 5\operatorname{th}^2 x - \frac{9}{x^{10}} \right) dx.$$

$$1.4.1.4 \quad \int \left(\frac{9\sqrt[9]{x}-6\sqrt[4]{x}}{5^3\sqrt{x}} + 4\operatorname{ch} x + 5^x + \frac{(2-x)^2}{x(4+x^2)} + \frac{7\sin x - 8\sin^2 x}{5\sin x} + \operatorname{cth}^2 x - \frac{7}{x} \right) dx.$$

$$1.4.1.5 \quad \int \left(\frac{9\sqrt{x}+6\sqrt[5]{x}}{3^{10}\sqrt{x}} - \sin x + 6^x + \frac{(3+x)^2}{x(9+x^2)} + \frac{2\cos x + \cos^2 x}{5\cos x} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 6 \right) dx.$$

$$1.4.1.6 \quad \int \left(\frac{8\sqrt[4]{x^3}-5\sqrt[3]{x^2}}{2^3\sqrt{x^7}} + \cos x + 8^x + 3 \cdot \frac{(4+x)^2}{x(16+x^2)} + \frac{1+3\sin x}{2\sin x} + \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{8}{x^9} \right) dx.$$

$$1.4.1.7 \quad \int \left(\frac{4\sqrt[10]{x}-3\sqrt[5]{x}}{6^{15}\sqrt{x}} - 2\operatorname{sh} x + 7^x + \frac{(3-x)^2}{x(9+x^2)} - \frac{7-5\cos x}{6\cos x} + \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{4}{x^5} \right) dx.$$

$$1.4.1.8 \quad \int \left(\frac{8\sqrt[6]{x}-6\sqrt[7]{x}}{7^3\sqrt{x^4}} + 9\operatorname{ch} x + 9^x + \frac{(4-x)^2}{x(16+x^2)} + 5^{2x} \cdot 3^x + \frac{2}{\sqrt{x^2-7}} - \frac{8}{x^9} + 5 \right) dx.$$

$$1.4.1.9 \quad \int \left(\frac{12\sqrt[3]{x}-21\sqrt[4]{x}}{8^{12}\sqrt{x}} - 7\sin x + 10^x + \frac{(5+x)^2}{x(25+x^2)} - \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin x} + 9\operatorname{tg}^2 x - \frac{4}{x} \right) dx.$$

$$1.4.1.10 \quad \int \left(\frac{4\sqrt[4]{x}-3\sqrt[6]{x}}{9^8\sqrt{x}} + 2\cos x + 11^x + \frac{(6+x)^2}{x(36+x^2)} + \frac{3}{\sqrt{5-x^2}} + 7\operatorname{ctg}^2 x + \frac{5}{x^6} \right) dx.$$

$$\begin{aligned}
1.4.1.11 \quad & \int \left(\frac{7\sqrt[7]{x^2} + \sqrt{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} - 3\operatorname{sh}x + 12^x + \frac{(5-x)^2}{x(25+x^2)} - \frac{3-2\cos x}{\cos x} + 2\operatorname{th}^2x - \frac{8}{x} + 8 \right) dx. \\
1.4.1.12 \quad & \int \left(\frac{8\sqrt[9]{x^2} - 5\sqrt[8]{x^5}}{4\sqrt[4]{x^5}} + \operatorname{ch}x + 13^x + \frac{(6-x)^2}{x(36+x^2)} + \frac{\sin x - 5\sin^2 x}{4\sin x} + \operatorname{cth}^2x - \frac{7}{x} \right) dx. \\
1.4.1.13 \quad & \int \left(\frac{4\sqrt[6]{x} + \sqrt[5]{x}}{\sqrt[30]{x}} - \sin x + 7^x + \frac{(7+x)^2}{x(49+x^2)} + \frac{\cos x + 8\cos^2 x}{2\cos x} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx. \\
1.4.1.14 \quad & \int \left(\frac{7\sqrt[3]{x^8} - 8\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[12]{x}} + \cos x + 15^x + \frac{(8+x)^2}{x(64+x^2)} + \frac{1+3\sin x}{2\sin x} + \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^3} \right) dx. \\
1.4.1.15 \quad & \int \left(\frac{4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}}{12\sqrt[12]{x}} - \operatorname{sh}x + 16^x + \frac{(7-x)^2}{x(49+x^2)} - \frac{3-\cos x}{6\cos x} + \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{4}{x^5} + e \right) dx. \\
1.4.1.16 \quad & \int \left(\frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}{8\sqrt[6]{x}} - 9\sin x + 17^x + \frac{(8+x)^2}{x(64+x^2)} - \frac{7\cos x + \cos^2 x}{3\cos x} - \operatorname{tg}^2 x - \frac{7}{x^8} \right) dx. \\
1.4.1.17 \quad & \int \left(\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[8]{x}}{5\sqrt{x}} + 8\cos x + 18^x + \frac{(9+x)^2}{x(81+x^2)} + \frac{\sin x + 2\sin^2 x}{3\sin x} + 4\operatorname{ctg}^2 x + \frac{4}{x} \right) dx. \\
1.4.1.18 \quad & \int \left(\frac{\sqrt[7]{x} - 2\sqrt[6]{x}}{3\sqrt[5]{x}} + 4\operatorname{sh}x + 19^x + \frac{(8-x)^2}{x(64-x^2)} - \frac{\cos x - 3\cos^2 x}{6\cos x} + 7\operatorname{th}^2x - \frac{5}{x} \right) dx. \\
1.4.1.19 \quad & \int \left(\frac{\sqrt[5]{x} - 3\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[3]{x}} + \operatorname{ch}x + 20^x + \frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)} + \frac{\sin x - 3\sin^2 x}{5\sin x} + \operatorname{cth}^2x - \frac{3}{x^4} + 7 \right) dx. \\
1.4.1.20 \quad & \int \left(\frac{5\sqrt[6]{x} + 2\sqrt{x}}{4\sqrt[3]{x}} - 7\sin x + 21^x + \frac{(x+3)^2}{x(x^2+9)} + \frac{3\cos x + \cos^2 x}{6\cos x} + \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx. \\
1.4.1.21 \quad & \int \left(\frac{5\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^2}}{7\sqrt[3]{x^7}} + \cos x + 21^x + \frac{(x+4)^2}{x(x^2+16)} + \frac{1+5\sin x}{5\sin x} + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6}{x^7} \right) dx. \\
1.4.1.22 \quad & \int \left(\frac{4\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}}{20\sqrt{x}} - 3\operatorname{sh}x + 22^x + \frac{(x-3)^2}{x(x^2-9)} - \frac{2-4\cos x}{2\cos x} + \frac{3}{\sqrt{16+x^2}} - \frac{7}{x^8} \right) dx. \\
1.4.1.23 \quad & \int \left(\frac{8\sqrt[8]{x} + \sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x^3}} + 5\operatorname{ch}x + 23^x + \frac{(x-4)^2}{x(16+x^2)} + 6^{2x} \cdot 5^x + \frac{3}{\sqrt{x^2-6}} - \frac{5}{x^6} + \pi \right) dx.
\end{aligned}$$

$$1.4.1.24 \quad \int \left(\frac{\sqrt[8]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{4\sqrt[4]{x}} - 8\sin x + 24^x + \frac{(x+5)^2}{x(x^2+25)} - \operatorname{tg} x \cdot \frac{2}{\sin x} + 3\operatorname{tg}^2 x - \frac{8}{x} \right) dx.$$

$$1.4.1.25 \quad \int \left(\frac{4\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + 3\cos x + 25^x + \frac{(x+6)^2}{x(x^2+36)} + \frac{2}{\sqrt{3-x^2}} + 5\operatorname{ctg}^2 x + \frac{3}{x^4} \right) dx.$$

$$1.4.1.26 \quad \int \left(\frac{6\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[5]{x^3}} - 5\operatorname{sh} x + 26^x + \frac{(x-5)^2}{x(x^2+25)} - \frac{2-3\cos x}{\cos x} + 7\operatorname{th}^2 x - \frac{5}{x^6} \right) dx.$$

$$1.4.1.27 \quad \int \left(\frac{\sqrt{x^9} - \sqrt[5]{x^8}}{3\sqrt[6]{x^5}} + \operatorname{ch} x + 27^x + \frac{(x-6)^2}{x(x^2+36)} + \frac{\sin x - 6\sin^2 x}{3\sin x} + 3\operatorname{cth}^2 x - \frac{7}{x} \right) dx.$$

$$1.4.1.28 \quad \int \left(\frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[5]{x^6}}{\sqrt{x}} - 8\sin x + 28^x + \frac{(x+7)^2}{x(x^2+49)} + \frac{3\cos x + \cos^2 x}{5\cos x} + \frac{2}{\sqrt{8-x^2}} \right) dx.$$

$$1.4.1.29 \quad \int \left(\frac{\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[7]{x^3}}{7\sqrt[4]{x^3}} + 2\cos x + 29^x + \frac{(x+8)^2}{x(x^2+64)} + \frac{2+\sin x}{2\sin x} + \frac{9}{\cos^2 x} + \frac{11}{x^{12}} \right) dx.$$

$$1.4.1.30 \quad \int \left(\frac{\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x}}{24\sqrt[6]{x}} - 3\operatorname{sh} x + 30^x + \frac{(x-7)^2}{x(x^2+49)} - \frac{2-\cos x}{6\cos x} + \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} - \frac{5}{x^6} \right) dx.$$

2 МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Содержание: интегрирование подстановкой или заменой переменной, метод «подведения» функции под знак дифференциала, метод интегрирования по частям.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Кроме метода непосредственного интегрирования рассматриваются ещё два метода интегрирования: метод подстановки и метод интегрирования по частям.

Метод подстановкой (заменой переменной)

Пусть требуется вычислить неопределённый интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Метод подстановкой состоит в том, что в заданном интеграле $\int f(x)dx$ переменную интегрирования x заменяем новой переменной

интегрирования z по формуле $x = \varphi(z)$. Тогда подынтегральное выражение будет иметь вид: $f(x)dx = f(\varphi(z))d\varphi(z) = f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$.

Теорема 2.1.1 Пусть функция $x = \varphi(z)$ определена и дифференцируема на некотором множестве K и пусть M – множество значений этой функции, на котором определена функции $f(x)$. Тогда если на множестве M функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве K справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz. \quad (2.1.1)$$

Предположим, что интеграл, стоящий в правой части формулы (2.1.1), известен:

$$\int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \Phi(z) + C.$$

Отсюда можно найти исходный интеграл в виде функции от переменной x . Для этого необходимо разрешить уравнение $x = \varphi(z)$ относительно переменной z . Если $z = \psi(x)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz = \Phi(z) + C = \Phi(\psi(x)) + C.$$

Часто при нахождении неопределённых интегралов пользуются методом «подведения» под знак дифференциала. По определению дифференциала функции $\eta'(x)dx = d(\eta(x))$. Переход от левой части последнего равенства к правой части называется подведением множителя $\eta'(x)$ под знак дифференциала.

Предположим, что необходимо найти интеграл вида

$$\int g(\eta(x))\eta'(x)dx.$$

Внесём в этом интеграле множитель $\eta'(x)$ под знак дифференциала и выполним замену переменной $\eta'(x) = t$:

$$\int g(\eta(x))\eta'(x)dx = \int g(\eta(x))d(\eta(x)) = \int g(t)dt.$$

Если интеграл $\int g(t)dt$ является табличным, то его находят непосредственным интегрированием.

Метод интегрирования по частям

Теорема 2.1.2 Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции на промежутке I , то справедлива следующая формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2.1.2)$$

Формула (2.1.2) называется «*формулой интегрирования по частям*».

Формула интегрирования по частям в основном применяется, когда под знаком интеграла стоит произведение многочлена на трансцендентную функцию (всякая аналитическая функция, отличная от алгебраической функции, для

вычисления значений которой помимо алгебраических операций над аргументом, необходимо применять предельный переход в той или иной форме) или произведение трансцендентных функций. В частности, к трансцендентным функциям относятся показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические и обратные гиперболические функции.

В формуле интегрирования по частям через функцию $u = u(x)$ обозначают ту функцию, производная которой даёт наибольшее упрощение. Через дифференциал dv обозначаем всё то, что осталось в подынтегральном выражении. Если выполняется условие теоремы 2.1.2, то формулу интегрирования по частям можно применять неоднократно.

Приведём некоторые часто встречающиеся типы интегралов, которые находятся по формуле интегрирования по частям.

1. *Интегралы типа* $\int P_n(x) \sin \beta x dx$, $\int P_n(x) \cos \beta x dx$, $\int P_n(x) a^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x) e^{\alpha x} dx$, $\int P_n(x) \operatorname{sh} \alpha x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{ch} \alpha x dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x , а α и β – некоторые числа. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u = P_n(x)$, а через дифференциал dv обозначить всё то, что остаётся в подынтегральном выражении, и применить формулу интегрирования по частям n раз.

2. *Интегралы типа* $\int P_n(x) \log_a \beta x dx$, $\int P_n(x) \ln \beta x dx$, $\int P_n(x) \arcsin \beta x dx$, $\int P_n(x) \arccos \beta x dx$, $\int P_n(x) \arctg \beta x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arcctg} \beta x dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x , а β – некоторое число. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить функцию u равной множителю при многочлене $P_n(x)$, а через дифференциал dv обозначить $P_n(x) dx$.

3. *Интегралы типа* $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, где α и β – некоторые числа. Чтобы найти эти интегралы, необходимо дважды применить формулу интегрирования по частям.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)).

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2 \\ dx = dt^2 = (t^2)' dt = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{\cos t \cdot 2t dt}{t} = 2 \int \cos t dt = 2 \sin t + C = \\ = 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

2.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int (2 + 4 \cos 5x)^3 \sin 5x dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)).

$$\begin{aligned} \int (2 + 4\cos 5x)^3 \sin 5x dx &= \left[\begin{array}{l} 2 + 4\cos 5x = t \\ d(2 + 4\cos 5x) = dt \\ -20\sin 5x dx = dt \end{array} \right] = -\frac{1}{20} \int t^3 dt = -\frac{1}{80} t^4 + C = \\ &= -\frac{1}{80} (2 + 4\cos 5x)^4 + C. \end{aligned}$$

2.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int 4x \ln x dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\begin{aligned} \int 4x \ln x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = 4x dx \quad v = 2x^2 \end{array} \right] = 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \frac{dx}{x} = \\ &= 2x^2 \ln x - \int 2x dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C. \end{aligned}$$

2.2.4 Найти неопределённый интеграл $\int 125x^2 \sin 3x dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\begin{aligned} \int 125x^2 \sin 5x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = 125 \sin 5x dx \quad v = -25 \cos 5x \end{array} \right] = -25x^2 \cos 5x + \int 50x \cos 5x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = 2x \quad du = 2 dx \\ dv = 25 \cos 5x dx \quad v = 5 \sin 5x \end{array} \right] = -25x^2 \cos 5x + 10x \sin 5x - \int 10 \sin 5x dx = \\ &= -25x^2 \cos 5x + 10x \sin 5x + 2 \cos 5x + C. \end{aligned}$$

2.2.5 Найти неопределённый интеграл $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Для нахождения неопределённого интеграла применим метод замены переменной (формула (2.1.1)), а затем формулу интегрирования по частям (2.1.2).

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2 \\ dx = dt^2 = (t^2)' dt = 2t dt \end{array} \right] = \int 2te^t dt = \left[\begin{array}{l} u = 2t \quad du = 2 dt \\ dv = e^t dt \quad v = e^t \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = 2t \quad du = 2 dt \\ dv = e^t dt \quad v = e^t \end{array} \right] = 2te^t - 2 \int e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Найти неопределённые интегралы.

$$\text{2.3.1.1} \quad \int \sin(3x + 4) dx. \quad \text{2.3.1.2} \quad \int \frac{\sin(3x - 1)}{\cos^3(3x - 1)} dx. \quad \text{2.3.1.3} \quad \int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$2.3.1.4 \quad \int \frac{6x-2}{3x^2-2x+5} dx. \quad 2.3.1.5 \quad \int x e^{x^2+1} dx. \quad 2.3.1.6 \quad \int \frac{\operatorname{tg} 3x dx}{\cos^2 3x}.$$

$$2.3.1.7 \quad \int \frac{6-\cos 3x}{\sin^2 3x} dx. \quad 2.3.1.8 \quad \int \frac{x dx}{x^2+1}. \quad 2.3.1.9 \quad \int \frac{x^3 dx}{x^8+1}.$$

2.3.2 Найти неопределённые интегралы.

$$2.3.2.1 \quad \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx. \quad 2.3.2.2 \quad \int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x}. \quad 2.3.2.3 \quad \int \frac{e^{2x} dx}{e^x+1}.$$

2.3.3 Найти неопределённые интегралы.

$$2.3.3.1 \quad \int (3x+4)e^{2x+1} dx. \quad 2.3.3.2 \quad \int (x^2-1)\ln x dx. \quad 2.3.3.3 \quad \int x^2 \cos 3x dx.$$

$$2.3.3.4 \quad \int \operatorname{arctg} 2x dx. \quad 2.3.3.5 \quad \int (x-1)\sin 6x dx. \quad 2.3.3.6 \quad \int x \arcsin x dx.$$

2.3.4 Найти неопределённые интегралы.

$$2.3.4.1 \quad \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx. \quad 2.3.4.2 \quad \int \sin \sqrt{x} dx. \quad 2.3.4.3 \quad \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$$

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Найти неопределённые интегралы. Результат интегрирования проверить дифференцированием.

$$2.4.1.1 \quad \text{а) } \int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}; \quad \text{б) } \int 27(x^2-2)e^{3x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2.4.1.2 \quad \text{а) } \int \frac{x^2 dx}{x^6+1}; \quad \text{б) } \int (x^2+2x)\ln x dx; \quad \text{в) } \int \frac{(\sqrt[3]{x}+2)e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$2.4.1.3 \quad \text{а) } \int \frac{(2x-5)dx}{x^2-5x+6}; \quad \text{б) } \int 8x^2 \sin 2x dx; \quad \text{в) } \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$2.4.1.4 \quad \text{а) } \int \operatorname{tg}(6x+4) dx; \quad \text{б) } \int \operatorname{arctg} 2x dx; \quad \text{в) } \int 2x^3 \sin x^2 dx.$$

$$2.4.1.5 \quad \text{а) } \int \operatorname{ctg}(3x-1) dx; \quad \text{б) } \int 27x^2 \cos 3x dx; \quad \text{в) } \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}} dx$$

$$2.4.1.6 \quad \text{а) } \int \operatorname{th}(4x+5) dx; \quad \text{б) } \int \operatorname{arctg} 3x dx; \quad \text{в) } \int 3x^5 \cos x^3 dx.$$

$$2.4.1.7 \quad \text{а) } \int \operatorname{cth}(7x+5); \quad \text{б) } \int \frac{x \sin 4x}{\cos^2 4x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\arcsin \sqrt[7]{x}}{\sqrt[7]{x^6}} dx.$$

$$2.4.1.8 \quad \text{а) } \int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}; \quad \text{б) } \int \arcsin 2x dx; \quad \text{в) } \int 3x^7 \sin x^4 dx.$$

$$2.4.1.9 \quad \text{а) } \int \sin^3 5x \cos 5x dx; \quad \text{б) } \int \frac{x \cos 5x}{\sin^2 5x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{\arccos \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

- 2.4.1.10 a) $\int \cos^4 3x \sin 3x dx$; б) $\int \arccos 7x dx$; в) $\int 2x^9 \cos x^5 dx$.
- 2.4.1.11 a) $\int \frac{\operatorname{tg}^5 7x dx}{\cos^2 7x}$; б) $\int x^2 \log_2 x \ln 2 dx$; в) $\int 10x^3 5^{5x^2+3} dx$.
- 2.4.1.12 a) $\int \frac{\operatorname{ctg}^6 4x dx}{\sin^2 4x}$; б) $\int 64x^2 5^{4x+2} dx$; в) $\int x^3 \log_3 x^2 dx$.
- 2.4.1.13 a) $\int \frac{\operatorname{arctg}^9 8x dx}{1+64x^2}$; б) $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$; в) $\int 8x^{15} \sin x^8 dx$.
- 2.4.1.14 a) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 3x dx}{1+9x^2}$; б) $\int 27x^2 \sin 3x dx$; в) $\int \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.
- 2.4.1.15 a) $\int \frac{\arcsin^6 7x dx}{\sqrt{1-49x^2}}$; б) $\int x \operatorname{arctg} 5x dx$; в) $\int 7x^5 \cos x^3 dx$.
- 2.4.1.16 a) $\int \frac{\arccos^7 6x dx}{\sqrt{1-36x^2}}$; б) $\int \frac{x \sin 5x}{\cos^2 5x} dx$; в) $\int \arcsin \sqrt[4]{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
- 2.4.1.17 a) $\int \frac{(\ln^3 5x + \ln 3x) dx}{x}$; б) $\int x \arcsin 7x dx$; в) $\int \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$.
- 2.4.1.18 a) $\int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x) dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{x \cos 6x}{\sin^2 6x} dx$; в) $\int 3^{\sqrt{x}} dx$.
- 2.4.1.19 a) $\int \frac{(\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x) dx}{\sin^2 x}$; б) $\int 64(x^2 - 3)e^{4x} dx$; в) $\int \frac{\log_5 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.
- 2.4.1.20 a) $\int e^{3x^2+x} (12x + 2) dx$; б) $\int (x^2 + 5x) \ln x dx$; в) $\int 6x^{11} \sin x^6 dx$.
- 2.4.1.21 a) $\int 2^{x^2+4x} (4x + 8) dx$; б) $\int 27x^2 \sin 3x dx$; в) $\int \operatorname{arctg} \sqrt[7]{x} \frac{dx}{\sqrt[7]{x^5}}$.
- 2.4.1.22 a) $\int \frac{6x dx}{\sqrt{81x^4 - 16}}$; б) $\int \operatorname{arctg} 4x dx$; в) $\int 9x^3 \cos x^2 dx$.
- 2.4.1.23 a) $\int \frac{12x dx}{\sqrt{9x^2 - 2}}$; б) $\int 216x^2 \cos 6x dx$; в) $\int x^3 \operatorname{arctg} x^2 dx$.
- 2.4.1.24 a) $\int \frac{8x dx}{\sqrt{16x^4 + 49}}$; б) $\int \operatorname{arctg} 9x dx$; в) $\int x \arcsin x^2 dx$.
- 2.4.1.25 a) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^4 - 2}}$; б) $\int \frac{x \sin 6x}{\cos^2 6x} dx$; в) $\int x \arccos x^2 dx$.
- 2.4.1.26 a) $\int \frac{24x^5 dx}{64x^{12} + 1}$; б) $\int \arcsin 5x dx$; в) $\int x^5 6^{3x^3+1} dx$.
- 2.4.1.27 a) $\int \frac{10x^4 dx}{32x^{10} + 1}$; б) $\int \frac{x \cos 11x}{\sin^2 11x} dx$; в) $\int \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx$.

$$\begin{array}{lll}
2.4.1.28 \text{ а) } \int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\sin^6 x + 4}; & \text{б) } \int \arccos 8x dx; & \text{в) } \int \frac{\ln(\ln(\ln x))}{x \ln x} dx. \\
2.4.1.29 \text{ а) } \int \frac{\cos^2 x \sin x dx}{\cos^3 x + 16}; & \text{б) } \int x^2 \log_3 x \ln 3 dx; & \text{в) } \int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx. \\
2.4.1.30 \text{ а) } \int \frac{(3^{\sqrt{x}} - 5) dx}{\sqrt{x}}; & \text{б) } \int 27x^2 7^{3x+2} dx; & \text{в) } \int \frac{\operatorname{arcctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.
\end{array}$$

3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Содержание: рациональные дроби, интегрирование простейших рациональных дробей, разложение рациональной дроби на простейшие дроби, интегрирование рациональных дробей методом неопределённых коэффициентов, интегрирование рациональных дробей методом частных значений, правило интегрирования произвольных рациональных дробей.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рациональной дробью $R(x)$ называется дробь, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены, то есть любая дробь вида

$$R(x) = \frac{A_n(x)}{B_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

Если степень многочлена числителя больше или равна степени многочлена знаменателя ($n \geq m$), то дробь называется *неправильной рациональной дробью*. Если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя ($n < m$), то дробь называется *правильной рациональной дробью*.

Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, для чего необходимо разделить многочлен в числителе на многочлен в знаменателе по правилу деления многочленов:

$$\frac{A_n(x)}{B_m(x)} = P(x) + \frac{C_k(x)}{B_m(x)},$$

где $P(x)$ – целая часть дроби $\frac{A_n(x)}{B_m(x)}$; $C_k(x)$ – остаток от деления (многочлен степени $k < m$).

Например,

$$\frac{x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 10x + 1}{x^2 + 2x - 3} = x^2 + 4x + \frac{2x + 1}{x^2 + 2x - 3},$$

так как

$$\begin{array}{r}
x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 10x + 1 \quad | \quad x^2 + 2x - 3 \\
\underline{x^4 + 2x^3 - 3x^2} \\
4x^3 + 8x^2 - 10x \\
\underline{4x^3 + 8x^2 - 12x} \\
2x + 1 \quad \leftarrow \text{остаток}
\end{array}$$

$\leftarrow$ целая часть

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена, то есть к использованию табличных интегралов, и интегрированию правильной рациональной дроби. Интегрирование правильных рациональных дробей осуществляется путём перехода к интегрированию простейших рациональных дробей.

Простейшей рациональной дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырёх типов:

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1) $\frac{A}{x-a};$ | 2) $\frac{A}{(x-a)^n} (n \geq 2);$ |
| 3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q};$ | 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} (n \geq 2).$ |

В простейших рациональных дробях параметры A, M, N, a, p, q – действительные числа, а квадратный трёхчлен не имеет действительных корней, то есть дискриминант $D = p^2 - 4q < 0$.

Простейшие дроби первого и второго типов интегрируются непосредственно с помощью основных методов интегрирования неопределённого интеграла и таблицы основных неопределённых интегралов:

$$\begin{aligned}
\int \frac{A dx}{x-a} &= A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C; \\
\int \frac{A dx}{(x-a)^n} &= A \int (x-a)^{-n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n) \cdot (x-a)^{n-1}} + C.
\end{aligned}$$

Найдём интеграл от простейшей рациональной дроби третьего типа.

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \left[\begin{array}{l} \text{в числителе выделяем} \\ \text{производную знаменателя} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}}{x^2+px+q} dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{представляем интеграл в} \\ \text{виде суммы двух интегралов} \end{array} \right] = \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p) dx}{x^2+px+q} + \frac{2N-Mp}{2} \int \frac{dx}{x^2+px+q} =
\end{aligned}$$

$= \left[\begin{array}{l} \text{в первом интеграле подводим выражение } (2x + p) \text{ под знак дифференциала,} \\ \text{а во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат} \end{array} \right] =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{M}{2} \int \frac{(x^2 + px + q)' dx}{x^2 + px + q} + \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4}} = \\
 &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}\right)^2} = \\
 &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C
 \end{aligned}$$

Рассмотрим интегрирование простейшей рациональной дроби четвёртого типа $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx$. Интегрирование дроби этого типа после выделения в числителе производной квадратного трёхчлена, стоящего в знаменателе, и выделения полного квадрата в этом трёхчлене сводится к вычислению интегралов

$$\int (x^2 + px + q)^{-n} d(x^2 + px + q) = \frac{1}{(1 - n)(x^2 + px + q)^{n-1}} + C_1$$

и

$$I_n = \int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^n}.$$

В последнем интеграле $z = x + \frac{p}{2}$, $b = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Представим последний интеграл в виде

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^n} = \frac{1}{b^2} \int \frac{(z^2 + b^2) - z^2}{(z^2 + b^2)^n} dz = \frac{1}{b^2} \left(\int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(z^2 + b^2)^n} \right) = \\
 &= \left[\int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^{n-1}} = I_{n-1} \right] = \frac{1}{b^2} \left(I_{n-1} - \int \frac{z^2 dz}{(z^2 + b^2)^n} \right).
 \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{z^2 dz}{(z^2 + b^2)^n}$ воспользуемся методом интегри-

рования по частям:

$$\int \frac{z^2 dz}{(z^2 + b^2)^n} = \left[dv = \frac{z dz}{(z^2 + b^2)^n} \quad v = \frac{1}{2(1-n)(z^2 + b^2)^{n-1}} \right] = \frac{z}{2(1-n)(z^2 + b^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^{n-1}} = \frac{z}{2(1-n)(z^2 + b^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу интеграла I_n , имеем

$$I_n = \frac{1}{b^2} \left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{z}{2(1-n)(z^2 + b^2)^{n-1}} \right). \quad (3.1.1)$$

Формула (3.1.1) называется рекуррентной. Зная табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dz}{z^2 + b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{z}{b} + C, \text{ по формуле (3.1.1) можно найти интеграл}$$

$$I_2 = \int \frac{dz}{(z^2 + b^2)^2} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получены формулы для интегрирования всех четырёх типов простейших рациональных дробей.

Рассмотрим произвольную правильную рациональную дробь. Любую правильную рациональную дробь $C_k(x)/B_m(x)$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей первого – четвёртого типа. Для разложения $C_k(x)/B_m(x)$ на простейшие дроби необходимо разложить многочлен $B_m(x)$ на линейные и квадратные множители, для чего надо решить уравнение $B_m(x) = 0$. Предположим, что многочлен $B_m(x)$ разложим на простейшие линейные и квадратные множители:

$$B_m(x) = (x - \alpha_1)^{s_1} \dots (x - \alpha_i)^{s_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{r_j},$$

где $s_1 + \dots + s_i + 2r_1 + \dots + 2r_j = m$.

Теорема 3.1.1 Правильную рациональную дробь $C_k(x)/B_m(x)$, где $B_m(x) = (x - \alpha_1)^{s_1} \dots (x - \alpha_i)^{s_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{r_j}$, можно единственным образом разложить на сумму простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{C_k(x)}{B_m(x)} = & \frac{A_{11}}{x - \alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1s_1}}{(x - \alpha_1)^{s_1}} + \dots + \frac{A_{i1}}{x - \alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_{is_i}}{(x - \alpha_i)^{s_i}} + \\ & + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_{12}x + N_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1r_1}x + N_{1r_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}} + \dots \\ & \dots + \frac{M_{j1}x + N_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{M_{j2}x + N_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{M_{jr_j}x + N_{jr_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{r_j}}, \end{aligned}$$

где коэффициенты в разложении являются некоторыми действительными числами.

Проиллюстрируем формулу теоремы 3.1.1 примерами, не находя коэффициентов в разложении.

Например:

$$1) \frac{2x+5}{(x-2)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2};$$

$$2) \frac{3x^2-4x+1}{(x-3)^3(x^2-x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3} + \frac{Mx+N}{x^2-x+4};$$

$$3) \frac{x-4}{x^4(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Mx+N}{x^2+4} + \frac{Kx+L}{(x^2+4)^2}.$$

Чтобы найти коэффициенты в разложении правильной рациональной дроби на простейшие рациональные дроби, чаще всего используют метод неопределённых коэффициентов и метод частных значений.

Метод неопределённых коэффициентов

Пусть дано разложение правильной рациональной дроби $C_k(x)/B_m(x)$ на простейшие дроби с неопределёнными коэффициентами. Приводим простейшие дроби в разложении к общему знаменателю $B_m(x)$ и приравняем многочлен, получившийся в числителе, многочлену $C_k(x)$.

Для тождественного равенства двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая равенство многочленов, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного равенства. В результате получаем систему m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными. Решая полученную систему, находим неизвестные коэффициенты в разложении дроби на простейшие рациональные дроби.

Метод частных значений

При использовании данного метода для нахождения неопределённых коэффициентов придаём переменной x несколько частных значений (по числу неопределённых коэффициентов) и получаем систему алгебраических уравнений относительно неопределённых коэффициентов. Наиболее выгодно применять этот метод в случае простых действительных корней уравнения $B_m(x) = 0$. Тогда удобно последовательно полагать x равным одним из корней многочлена, стоящего в знаменателе.

Иногда для нахождения неопределённых коэффициентов удобно применять комбинацию указанных выше методов, то есть приравнивать коэффициенты при некоторых степенях переменной и придавать переменной частные значения.

Сформулируем **правило интегрирования рациональных дробей**.

Для того чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить следующие действия:

1) если рассматриваемая дробь является неправильной, то её необходимо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;

2) если рассматриваемая рациональная дробь является правильной, то её необходимо представить в виде суммы простейших рациональных дробей;

3) интеграл от рациональной дроби необходимо представить в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{(4x-1)dx}{x^5-x^2}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Тогда подынтегральная функция представима в виде суммы простейших рациональных дробей

$$\frac{4x-1}{x^5-x^2} = \frac{4x-1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть, получаем дробь, равную первоначальной, причём её знаменатель равен знаменателю исходной дроби, а, следовательно, числители полученных дробей также будут равны.

$$Ax(x-1)(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Mx+N)x^2(x-1) = 4x-1.$$

Для определения неизвестных параметров в разложении применим комбинированный метод «неопределённых коэффициентов».

При значении переменной $x=0$, получаем значение параметра $B=1$.

При значении переменной $x=1$, получаем значение параметра $C=1$.

Перепишем равенство числителей дробей в виде

$$A(x^4-x) + B(x^3-1) + C(x^4+x^3+x^2) + M(x^4-x^3) + N(x^3-x^2) = 4x-1,$$

или, с учётом найденных параметров, равенство принимает вид

$$(A+1+M)x^4 + (2-M+N)x^3 + (1-N)x^2 - Ax = 4x-1.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+1+M=0, \\ 2-M+N=0, \\ 1-N=0, \\ -A=4. \end{cases}$$

Из полученной системы находим неизвестные параметры в разложении исходной подынтегральной функции: $A = -4$, $B = 1$, $C = 1$, $M = 3$, $N = 1$.

Итак, $\frac{4x-1}{x^5-x^2} = -\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+x+1}$.

Следовательно, $\int \frac{4x-1}{x^5-x^2} dx = -4 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{3x+1}{x^2+x+1} dx =$
 $= -4 \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x-1| + \frac{3}{2} \int \frac{2x+1-1/3}{x^2+x+1} dx = \ln \frac{|x-1|}{x^4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} -$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \ln \frac{|x-1|}{x^4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{(x^2+x+1)' dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \ln \frac{|x-1|}{x^4} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} dx$.

Решение. Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби:

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^4+2x} \cdot \frac{x^2+2}{x+3} = \frac{3x^2+3x+7}{3x^2+6}$$

Таким образом, $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} dx = \int \left(x+3 + \frac{3x+1}{x^2+2} \right) dx = \int x dx + 3 \int dx +$
 $+ \int \frac{3x+1}{x^2+2} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Найти неопределённые интегралы.

3.3.1.1 $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

3.3.1.2 $\int \frac{(3x-1)dx}{x^3-4x^2+3x}$.

3.3.1.3 $\int \frac{dx}{x^3-9x}$.

3.3.1.4 $\int \frac{6x-2}{(x-5)^2(x+2)} dx$.

3.3.1.5 $\int \frac{(x+1)dx}{x^4+4x^3+4x^2}$.

3.3.1.6 $\int \frac{(x^2+3)dx}{x^4+x^2}$.

3.3.1.7 $\int \frac{(6-x)dx}{(x-2)(x^2+6x+13)}$.

3.3.1.8 $\int \frac{(x+5)dx}{x^3+2x^2+5x}$.

3.3.1.9 $\int \frac{(x^3+2)dx}{x^4+x^2}$.

3.3.2 Найти неопределённые интегралы.

$$\begin{array}{lll} 3.3.2.1 \quad \int \frac{(x^5+1)dx}{x^4-8x^2+16}; & 3.3.2.2 \quad \int \frac{(x^3+x^2)dx}{x^2-6x+5}; & 3.3.2.3 \quad \int \frac{x^4 dx}{x^2-4x+20}. \\ 3.3.2.4 \quad \int \frac{x^2 dx}{x^2+8x+41}; & 3.3.2.5 \quad \int \frac{(x^3-2x)dx}{x^2+7x-8}; & 3.3.2.6 \quad \int \frac{x^5-x^4}{x^3+4096} dx \end{array}$$

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти неопределённые интегралы.

$$\begin{array}{lll} 3.4.1.1 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(7x^2-1)dx}{x^3-2x^2-3x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(4x^2+3x+17)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}; & \text{в)} \quad \int \frac{x^4}{x^3-1} dx. \\ 3.4.1.2 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(x^2+2)dx}{x^3+2x^2-3x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(x^2-19x+34)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}; & \text{в)} \quad \int \frac{x^4+2x}{x^3+1} dx. \\ 3.4.1.3 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(x^2-5)dx}{x^3+3x^2-4x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(2x+22)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}; & \text{в)} \quad \int \frac{2x^5}{x^3-8} dx. \\ 3.4.1.4 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(2x^2+1)dx}{x^3+x^2-2x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(3x+13)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}; & \text{в)} \quad \int \frac{x^5-2}{x^3+8} dx. \\ 3.4.1.5 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(4x^2-5)dx}{x^3-3x^2+2x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(4x+2)dx}{x^4+4x^2}; & \text{в)} \quad \int \frac{3x^4}{x^3-27} dx. \\ 3.4.1.6 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(3x+2)dx}{x^3+6x^2+8x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(4x^2+38)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}; & \text{в)} \quad \int \frac{x^4+3x}{x^3+27} dx. \\ 3.4.1.7 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(x-9)dx}{x^3-6x^2+8x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(x^2-6x+8)dx}{x^3+8}; & \text{в)} \quad \int \frac{4x^5}{x^3-64} dx. \\ 3.4.1.8 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(5x^2-9)dx}{x^3-7x^2+12x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(x^2-5x+40)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}; & \text{в)} \quad \int \frac{4x^5-x^2}{x^3+64} dx. \\ 3.4.1.9 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(4x-3)dx}{x^3-8x^2+15x}; & \text{б)} \quad \int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}; & \text{в)} \quad \int \frac{5x^4}{x^3-125} dx. \\ 3.4.1.10 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(6x^2+2)dx}{x^3-9x^2+18x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(12-6x)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}; & \text{в)} \quad \int \frac{5x^4+3x}{x^3+125} dx. \\ 3.4.1.11 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(3x^2+3)dx}{x^3-7x^2+10x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(4x-x^2-12)dx}{x^3+8}; & \text{в)} \quad \int \frac{6x^5}{x^3-216} dx. \\ 3.4.1.12 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(2x+5)dx}{x^3+4x^2-12x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(2x^2+4x+20)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}; & \text{в)} \quad \int \frac{6x^5-x}{x^3+216} dx. \\ 3.4.1.13 \quad \text{a)} \quad \int \frac{(8x^2+2)dx}{x^3-5x^2-14x}; & \text{б)} \quad \int \frac{(2x^2+2x+20)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}; & \text{в)} \quad \int \frac{7x^4}{x^3-343} dx. \end{array}$$

3.4.1.14	a)	$\int \frac{(3x+7)dx}{x^3-8x^2+12x};$	б)	$\int \frac{(x^2-13x+40)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)};$	В)	$\int \frac{x^4+7x}{x^3+343}dx.$
3.4.1.15	a)	$\int \frac{(7x^2+2)dx}{x^3-10x^2+21x}$	б)	$\int \frac{(5x+13)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)};$	В)	$\int \frac{8x^5+x^4}{x^3-512}dx.$
3.4.1.16	a)	$\int \frac{(2x+6)dx}{x^3+8x^2+12x};$	б)	$\int \frac{(x^2+3x+2)dx}{x^3-1};$	В)	$\int \frac{8x^5-x}{x^3+512}dx.$
3.4.1.17	a)	$\int \frac{(2x^2-4)dx}{x^3+2x^2-8x};$	б)	$\int \frac{(6-9x)dx}{x^3+8};$	В)	$\int \frac{9x^4}{x^3-729}dx.$
3.4.1.18	a)	$\int \frac{(3x-5)dx}{x^3+2x^2-15x};$	б)	$\int \frac{(4x^2+7x+5)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$	В)	$\int \frac{x^4-9x}{x^3+729}dx.$
3.4.1.19	a)	$\int \frac{(2x^2+6)dx}{x^3+6x^2-7x};$	б)	$\int \frac{(x^2+3x-6)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)};$	В)	$\int \frac{x^5+10x^3}{x^3-1000}dx.$
3.4.1.20	a)	$\int \frac{(3x-2)dx}{x^3-x^2-6x};$	б)	$\int \frac{(3-9x)dx}{x^3-1};$	В)	$\int \frac{x^5-10x^4}{x^3+1000}dx.$
3.4.1.21	a)	$\int \frac{(3x^2-4)dx}{x^3+x^2-12x};$	б)	$\int \frac{(4x^2+x+10)dx}{x^3+8};$	В)	$\int \frac{11x^4}{x^3-1331}dx.$
3.4.1.22	a)	$\int \frac{(5x-2)dx}{x^3+7x^2+10x};$	б)	$\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)};$	В)	$\int \frac{11x^4+x^3}{x^3+1331}dx.$
3.4.1.23	a)	$\int \frac{(2x^2-6)dx}{x^3+4x^2-12x};$	б)	$\int \frac{(3x^2+2x+1)dx}{x^3-27};$	В)	$\int \frac{x^5+12x^2}{x^3-1728}dx.$
3.4.1.24	a)	$\int \frac{(4x+5)dx}{x^3-9x^2+20x};$	б)	$\int \frac{(8x+5)dx}{(x+3)(x^2-8x+25)};$	В)	$\int \frac{12x^5-2x}{x^3+1728}dx.$
3.4.1.25	a)	$\int \frac{(2x^2-3)dx}{x^3+x^2-6x};$	б)	$\int \frac{(2x^2+x+7)dx}{(x-3)(x^2+x+1)};$	В)	$\int \frac{13x^4+x^2}{x^3-2197}dx.$
3.4.1.26	a)	$\int \frac{(5x-4)dx}{x^3-x^2-20x};$	б)	$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3+27};$	В)	$\int \frac{13x^4}{x^3+2197}dx.$
3.4.1.27	a)	$\int \frac{(3x^2-7)dx}{x^3+4x^2-21x};$	б)	$\int \frac{(4x^2+7)dx}{x^3+6x^2+25x};$	В)	$\int \frac{14x^3+x^2}{x^3-2744}dx.$
3.4.1.28	a)	$\int \frac{(8x+2)dx}{x^3-2x^2-8x};$	б)	$\int \frac{(4x^2+3x)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)};$	В)	$\int \frac{14x^5-x^4}{x^3+2744}dx.$
3.4.1.29	a)	$\int \frac{(5x^2-3)dx}{x^3+2x^2-15x};$	б)	$\int \frac{(5x+8)dx}{(x+1)(x^2-6x+34)};$	В)	$\int \frac{x^4+15x^3}{x^3-3375}dx.$
3.4.1.30	a)	$\int \frac{(4x-5)dx}{x^3+x^2-20x};$	б)	$\int \frac{(4x+12)dx}{x^4+16x^2};$	В)	$\int \frac{15x^5-x^4}{x^3+3375}dx.$

4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Содержание: интегрирование интегралов вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$, $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x \, dx$, универсальная тригонометрическая подстановка, подстановка вида $\operatorname{tg} x = t$.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Интегралы типа $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$.

Если числа m и n – чётные, то, применяются формулы понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

Если хотя бы одно из чисел m или n – нечётное, то отделяя от нечётной степени один сомножитель, подносим его под знак дифференциала. В подынтегральной функции переходим к функции, которую получили под знаком дифференциала, используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Интегралы типа $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \, dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$.

Данные интегралы вычисляются путём разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x),$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x),$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x).$$

Интегралы типа $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x \, dx$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$).

Они вычисляются подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ и $\operatorname{ctg} x = t$ соответственно.

Если $\operatorname{tg} x = t$, то $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда $\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \int \frac{t^n dt}{1+t^2}$. Данный интеграл при $n \geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, который находится по правилу интегрирования рациональных дробей.

Интегралы типа $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

При этом используются формулы

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если имеет место тождество $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять упрощённую подстановку $\operatorname{tg} x = t$. При этом используются формулы

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \sin^2 3x \, dx$.

Решение. $\int \sin^2 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C.$

4.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \cos^3 5x \, dx$.

Решение. $\int \cos^3 5x \, dx = \int \cos^2 5x \cos 5x \, dx = \frac{1}{5} \int (1 - \sin^2 5x) d \sin 5x =$
 $= [\sin 5x = t] = \frac{1}{5} \int (1 - t^2) dt = \frac{t}{5} - \frac{t^3}{15} + C = \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin^3 5x}{15} + C.$

4.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int \sin 12x \cos 8x \, dx$.

Решение. $\int \sin 4x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 2x + \sin 6x) \, dx = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$

4.2.4 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{12 \cos x + 5 \sin x + 13}.$

Решение. $\int \frac{dx}{12 \cos x + 5 \sin x + 13} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] =$
 $= \int \frac{2dt}{\left(12 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 \frac{2t}{1+t^2} + 13 \right) \cdot (1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 10t + 25} = 2 \int \frac{dt}{(t+5)^2} =$
 $= -\frac{2}{t+5} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 5} + C.$

4.2.5 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{1 - 10 \sin^2 x}.$

Решение. $\int \frac{dx}{1-10\sin^2 x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right] =$
 $= \int \frac{dt}{\left(1 - \frac{10t^2}{1+t^2}\right) \cdot (1+t^2)} = \int \frac{dt}{1-9t^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1+3t}{1-3t} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1+3\operatorname{tg} x}{1-3\operatorname{tg} x} \right| + C.$

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Найти неопределённые интегралы.

4.3.1.1 $\int \cos^2 7x dx.$ 4.3.1.2 $\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx.$ 4.3.1.3 $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$
 4.3.1.4 $\int \cos^3 2x dx.$ 4.3.1.5 $\int \sin^5 x \cos^2 x dx.$ 4.3.1.6 $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

4.3.2 Найти неопределённые интегралы:

4.3.2.1 $\int \cos 6x \cos 4x dx.$ 4.3.2.2 $\int \sin 6x \sin 2x dx$ 4.3.2.3 $\int \cos 5x \sin x dx.$
 4.3.2.4 $\int \cos 8x \cos 7x dx.$ 4.3.2.5 $\int \sin 9x \sin 6x dx$ 4.3.2.6 $\int \sin 7x \cos x dx.$

4.3.3 Найти неопределённые интегралы.

4.3.3.1 $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}.$ 4.3.3.2 $\int \frac{dx}{1 - \sin x}.$ 4.3.3.3 $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}.$
 4.3.3.4 $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\cos x + \sin x}.$ 4.3.3.5 $\int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)^2}.$ 4.3.3.6 $\int \frac{dx}{1 + \cos x}.$

4.3.4 Найти неопределённые интегралы.

4.3.4.1 $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 4\sin^2 x}.$ 4.3.4.2 $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + 8\cos^2 x}.$ 4.3.4.3 $\int \frac{dx}{1 - 5\sin^2 x}.$
 4.3.4.4 $\int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$ 4.3.4.5 $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin^2 x}.$ 4.3.4.6 $\int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \sin^2 x}.$

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Найти неопределённые интегралы.

4.4.1.1 а) $\int \sin^2 3x \cos^3 3x dx;$ б) $\int \frac{dx}{5 - 4\cos x};$ в) $\int \frac{(2\operatorname{tg} x - 1)dx}{\sin^2 x - \cos^2 x}.$
 4.4.1.2 а) $\int \sin^3 5x \cos^3 5x dx;$ б) $\int \frac{dx}{2 - 2\sin x};$ в) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - 8}.$
 4.4.1.3 а) $\int \sin^3 7x dx;$ б) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x};$ в) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x - 5}.$

- 4.4.1.4 a) $\int \cos^3 9x dx$; б) $\int \frac{dx}{12 \sin x - 15 \cos x}$; в) $\int \frac{(3 \operatorname{tg} x + 1) dx}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.
- 4.4.1.5 a) $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{24 \cos x + 26}$; в) $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x + 1}$.
- 4.4.1.6 a) $\int \sin^4 8x \cos^3 8x dx$; б) $\int \frac{dx}{3 \cos x - 5}$; в) $\int \frac{dx}{2 \cos^2 x + 3}$.
- 4.4.1.7 a) $\int \sin^3 6x \cos^4 6x dx$; б) $\int \frac{dx}{25 \sin x + 7}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{2 \sin^2 x - 2}$.
- 4.4.1.8 a) $\int \sin^4 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{41 \sin x - 9}$; в) $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 1}$.
- 4.4.1.9 a) $\int \cos^4 5x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$; в) $\int \frac{dx}{5 \cos^2 x - 2}$.
- 4.4.1.10 a) $\int \sin^5 12x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + 1}$.
- 4.4.1.11 a) $\int \sin^2 4x \cos^3 4x dx$; б) $\int \frac{dx}{4 - 5 \cos x}$; в) $\int \frac{(4 \operatorname{tg} x - 3) dx}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.
- 4.4.1.12 a) $\int \sin^3 6x \cos^3 6x dx$; б) $\int \frac{dx}{3 - 5 \sin x}$; в) $\int \frac{dx}{6 \sin^2 x - 9}$.
- 4.4.1.13 a) $\int \sin^3 8x dx$; б) $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$; в) $\int \frac{dx}{4 \cos^2 x - 25}$.
- 4.4.1.14 a) $\int \cos^3 11x dx$; б) $\int \frac{dx}{9 \sin x - 6 \cos x}$; в) $\int \frac{(5 \operatorname{tg} x + 1) dx}{\cos 2x}$.
- 4.4.1.15 a) $\int \sin^3 3x \cos^2 3x dx$; б) $\int \frac{dx}{8 \cos x + 10}$; в) $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 1}$.
- 4.4.1.16 a) $\int \sin^4 9x \cos^3 9x dx$; б) $\int \frac{dx}{40 \cos x - 24}$; в) $\int \frac{dx}{6 \cos^2 x + 1}$.
- 4.4.1.17 a) $\int \sin^3 7x \cos^4 7x dx$; б) $\int \frac{dx}{13 \sin x + 5}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x - 3}$.
- 4.4.1.18 a) $\int \sin^4 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{5 \sin x - 3}$; в) $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 1}$.
- 4.4.1.19 a) $\int \cos^4 5x dx$; б) $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 2}$; в) $\int \frac{dx}{9 \cos^2 x - 1}$.
- 4.4.1.20 a) $\int \cos^5 20x dx$; б) $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x - 3}$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x - 3}$.
- 4.4.1.21 a) $\int \sin^2 5x \cos^3 5x dx$; б) $\int \frac{dx}{5 - 11 \cos x}$; в) $\int \frac{(5 \operatorname{tg} x - 1) dx}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.
- 4.4.1.22 a) $\int \sin^3 7x \cos^3 7x dx$; б) $\int \frac{dx}{7 - 25 \sin x}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 9}$.

$$\begin{array}{lll}
4.4.1.23 & \text{a) } \int \sin^3 9x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{5 \sin x + 12 \cos x}; \quad \text{в) } \int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 x - 4}. \\
4.4.1.24 & \text{a) } \int \cos^3 12x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{12 \sin x - 5 \cos x}; \quad \text{в) } \int \frac{(7 \operatorname{tg} x + 1) dx}{\sin^2 x - \cos^2 x}. \\
4.4.1.25 & \text{a) } \int \sin^3 4x \cos^2 4x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{15 \cos x + 17}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{6 \sin^2 x + 1}. \\
4.4.1.26 & \text{a) } \int \sin^4 x \cos^3 x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{20 \cos x - 29}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 2}. \\
4.4.1.27 & \text{a) } \int \sin^3 8x \cos^4 8x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{5 \sin x + 3}; \quad \text{в) } \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x - 4}. \\
4.4.1.28 & \text{a) } \int \sin^4 3x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{7 \sin x - 13}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{12 \sin^2 x - 1}. \\
4.4.1.29 & \text{a) } \int \cos^4 6x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 4}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{25 \cos^2 x - 1}. \\
4.4.1.30 & \text{a) } \int \cos^5 30x dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{5 \sin x - \cos x - 5}; \quad \text{в) } \int \frac{\sin 2x dx}{16 \sin^2 x + 1}.
\end{array}$$

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Содержание: методы замены переменных при интегрировании иррациональных выражений.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots\right) dx$, где $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots$ – целые числа, а $R(x, y, z, \dots)$ – рациональная функция своих аргументов. В этих интегралах подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования и радикалов от x . Они находятся с помощью подстановки $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$. При такой замене переменной все

отношения $\frac{m_1}{n_1} = k_1, \frac{m_2}{n_2} = k_2, \dots$ являются целыми числами, то есть нахождение неопределённого интеграла сводится к интегрированию рациональной функции от переменной t : $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots\right) dx = \int R\left(t^s, t^{k_1}, t^{k_2}, \dots\right) s t^{s-1} dt$.

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right) dx$, где $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots$

– целые числа, а $R(x, y, z, \dots)$ – рациональная функция своих аргументов. Они

находятся с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$. При такой замене переменной интеграл сводится к интегрированию рациональной функции от переменной t .

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, могут быть найдены с помощью подстановки $u = x + \frac{b}{2a}$. Они сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.

Интегралы этого типа могут быть также найдены с помощью одной из трёх подстановок Эйлера:

- 1) если $a > 0$, то применяется подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$;
- 2) если $a < 0, c > 0$, то используется подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$;
- 3) если $a < 0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, то используется подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$, где x_0 – один из корней квадратного трёхчлена.

Интегралы типа $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, где $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Данные интегралы называются *интегралами от дифференциального бинома* $x^m (a + bx^n)^p dx$. Эти интегралы приводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановок Чебышева П. Л. только в следующих трёх случаях:

- 1) если $p \in \mathbb{Z}$, то применяется подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n ;
- 2) если $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то применяется подстановка $a + bx^n = z^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$;
- 3) если $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то применяется подстановка $a + bx^n = z^s x^n$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях интегралы от дифференциального бинома нельзя выразить через элементарные функции.

Рассмотрим интегралы от иррациональных функций, для интегрирования которых применяются тригонометрические подстановки.

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, где R – рациональная функция аргументов $(|x| \leq |a|)$, находятся с помощью подстановки $x = a \sin t$ или $x = a \cos t$.

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, где R – рациональная функция двух аргументов $(|x| \geq |a|)$, находятся с помощью подстановки $x = \frac{a}{\sin t}$ или $x = \frac{a}{\cos t}$.

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, где R – рациональная функция двух аргументов, находятся с помощью подстановки $x = a \operatorname{tg} t$ или $x = a \operatorname{ctg} t$.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}} = \left[\begin{array}{ll} x = t^4 & t = \sqrt[4]{x} \\ dx = 4t^3 dt & \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{4t^3 dt}{t - t^2} = -4 \int \frac{t^2 dt}{t - 1} = -4 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t - 1} dt = -4 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t - 1} \right) dt =$$

$$= -2t^2 - 4t - 4 \ln|t - 1| + C = -2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} - 4 \ln|\sqrt[4]{x} - 1| + C.$$

5.2.2 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} = \left[\begin{array}{ll} 2x+1 = t^6 & t = \sqrt[6]{2x+1} \\ x = \frac{1}{2}(t^6 - 1) & dx = 3t^5 dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t - 1} = 3 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t - 1} dt = 3 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t - 1} \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3 \ln|t - 1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3 \ln|\sqrt[6]{2x+1} - 1| + C.$$

5.2.3 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = \ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C.$$

5.2.4 Найти неопределённый интеграл $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Решение. $\int x^3(4-x^2)^{3/2} dx = \left[\begin{array}{lll} m=3 & n=2 & p=-\frac{3}{2} \notin Z \\ \frac{m+1}{n} = 2 \in Z & 4-x^2 = t^2 & xdx = -tdt \end{array} \right] =$
 $= -\int (4-t^2)t^{-3}tdt = \int \frac{t^2-4}{t^2} dt = \int dt - 4 \int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{4}{t} = \sqrt{4-x^2} + \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} + C.$

5.2.5 Найти неопределённый интеграл $\int \sqrt{4-x^2} dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \\ t = \arcsin \frac{x}{2} \end{array} \right] = \int \sqrt{4-4\sin^2 t} 2 \cos t dt = 4 \int \cos^2 t dt =$$

$$= 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \sin 2 \arcsin \frac{x}{2} + C =$$

$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} + 2 \cdot \sin \arcsin \frac{x}{2} \cdot \cos \arcsin \frac{x}{2} + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C.$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Найти неопределённые интегралы

5.3.1.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}$. 5.3.1.2 $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}-1)\sqrt{x}}$. 5.3.1.3 $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

5.3.2 Найти неопределённые интегралы.

5.3.2.1 $\int \sqrt{(7+6x-x^2)^3} dx$. 5.3.2.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. 5.3.2.3 $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

5.3.3 Найти неопределённые интегралы.

5.3.3.1 $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$. 5.3.3.2 $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(x+1)^2}}$. 5.3.3.3 $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}}$.

5.3.3.4 $\int \frac{dx}{x^8 \sqrt{1+x^2}}$. 5.3.3.5 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$. 5.3.3.6 $\int \sqrt[7]{x} \sqrt[3]{2x+3} dx$.

5.3.4 Найти неопределённые интегралы.

4.3.5.1 $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$. 4.3.5.2 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx$. 4.3.5.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$.

4.3.5.4 $\int \sqrt{9-x^2} dx$. 4.3.5.5 $\int \sqrt{x^2-16} dx$. 4.3.5.6 $\int \sqrt{25+x^2} dx$.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Найти неопределённые интегралы.

- | | | |
|----------|---|---|
| 5.4.1.1 | a) $\int \frac{x}{1+\sqrt{4x+1}} dx;$ | б) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-36}}.$ |
| 5.4.1.2 | a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$ | б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}.$ |
| 5.4.1.3 | a) $\int \frac{5}{1+\sqrt[4]{9x+1}} dx;$ | б) $\int \frac{4x^4}{\sqrt{16-x^2}} dx.$ |
| 5.4.1.4 | a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{3x+1}};$ | б) $\int \frac{\sqrt{x^2-25} dx}{x^3}.$ |
| 5.4.1.5 | a) $\int \frac{2x+1}{2+\sqrt{7x+2}} dx;$ | б) $\int x^3\sqrt{4+x^2} dx.$ |
| 5.4.1.6 | a) $\int \frac{dx}{4+\sqrt[3]{6x+7}};$ | б) $\int x^2\sqrt{1-x^2} dx.$ |
| 5.4.1.7 | a) $\int \frac{3x-1}{3+\sqrt[4]{4x+3}} dx;$ | б) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-49}}.$ |
| 5.4.1.8 | a) $\int \frac{3dx}{5+\sqrt[3]{9x+2}};$ | б) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{64+x^2}}.$ |
| 5.4.1.9 | a) $\int \frac{4x+5}{4+\sqrt{3x+4}} dx;$ | б) $\int \frac{3x^3}{\sqrt{25-x^2}} dx.$ |
| 5.4.1.10 | a) $\int \frac{x dx}{4+\sqrt[3]{3x+4}};$ | б) $\int x^4\sqrt{9-x^2} dx.$ |
| 5.4.1.11 | a) $\int \frac{7x}{5+\sqrt[4]{8x+5}} dx;$ | б) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-49}}.$ |
| 5.4.1.12 | a) $\int \frac{x dx}{9+\sqrt[3]{3x-1}};$ | б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}.$ |
| 5.4.1.13 | a) $\int \frac{3x-2}{6+\sqrt{7x+6}} dx;$ | б) $\int \frac{28x^4}{\sqrt{81-x^2}} dx.$ |
| 5.4.1.14 | a) $\int \frac{x dx}{6-\sqrt[3]{6x-9}};$ | б) $\int \frac{\sqrt{x^2-36} dx}{x^3}.$ |
| 5.4.1.15 | a) $\int \frac{2x+5}{7+\sqrt[4]{5x+2}} dx;$ | б) $\int x^3\sqrt{1+x^2} dx.$ |
| 5.4.1.16 | a) $\int \frac{2x dx}{5-3\sqrt[3]{x+1}};$ | б) $\int x^2\sqrt{9-x^2} dx.$ |

5.4.1.17 a) $\int \frac{2x-4}{6-\sqrt{9x+2}} dx;$	б) $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-64}}.$
5.4.1.18 a) $\int \frac{3x dx}{4-3\sqrt[3]{x+2}};$	б) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{49+x^2}}.$
5.4.1.19 a) $\int \frac{3x-3}{5+\sqrt[4]{7x+1}} dx;$	б) $\int \frac{12x^3}{\sqrt{36-x^2}} dx.$
5.4.1.20 a) $\int \frac{dx}{6+2\sqrt[3]{6x+5}};$	б) $\int x^4 \sqrt{4-x^2} dx.$
5.4.1.21 a) $\int \frac{7x+6}{6+\sqrt{2x+7}} dx;$	б) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-25}}.$
5.4.1.22 a) $\int \frac{4x dx}{10+\sqrt[3]{x+1}};$	б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(36+x^2)^3}}.$
5.4.1.23 a) $\int \frac{x-1}{9+\sqrt[4]{6x+5}} dx;$	б) $\int \frac{4x^4}{\sqrt{64-x^2}} dx.$
5.4.1.24 a) $\int \frac{5x dx}{3-\sqrt[3]{x+1}};$	б) $\int \frac{\sqrt{x^2-16} dx}{x^3}.$
5.4.1.25 a) $\int \frac{3x}{8+\sqrt{2x+3}} dx;$	б) $\int x^3 \sqrt{9+x^2} dx.$
5.4.1.26 a) $\int \frac{2x dx}{2+7\sqrt[3]{x+2}};$	б) $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$
5.4.1.27 a) $\int \frac{4x-2}{2-\sqrt[4]{3x+4}} dx;$	б) $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-81}}.$
5.4.1.28 a) $\int \frac{dx}{3+\sqrt[3]{9x+1}};$	б) $\int \frac{6x^5 dx}{\sqrt{36+x^2}}.$
5.4.1.29 a) $\int \frac{2x-1}{3-5\sqrt{4x+1}} dx;$	б) $\int \frac{14x^3}{\sqrt{49-x^2}} dx.$
5.4.1.30 a) $\int \frac{x dx}{4+\sqrt[3]{6x+8}};$	б) $\int x^4 \sqrt{5-x^2} dx.$

6 ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Содержание: определённый интеграл и его свойства, геометрический и физический смысл определённого интеграла, формула Ньютона-Лейбница для вычисления определённого интеграла, методы интегрирования определённого интеграла.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a;b]$ на n элементарных частичных отрезков системой точек $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Длина частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, где $i = \overline{1, n}$, равна $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Обозначим длину наибольшего частичного отрезка разбиения через $\lambda_n = \max_i \{\Delta x_i\}$ и назовём *мелкостью разбиения*. На каждом элементарном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбираем точки ξ_i и вычисляем значения функции в них, то есть $f(\xi_i)$.

Определение 6.1.1 *Интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, соответствующей данному разбиению отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_i , называется алгебраическая сумма произведений значения функции, вычисленной в точке ξ_i на длину частичного отрезка, которому принадлежит эта точка, то есть сумма вида

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n. \quad (6.1.1)$$

Определение 6.1.2 *Определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм вида (6.1.1) при мелкости разбиения стремящегося к нулю, если этот предел существует и конечен.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (6.1.2)$$

Если указанный предел существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* (или интегрируемой на отрезке $[a;b]$). При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, a и b – *нижним и верхним пределами интегрирования*, соответственно.

Теорема 6.1.1 Если $\int_a^b f(x) dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Теорема 6.1.2 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, то есть определённый интеграл существует, в смысле существования предела интегральных сумм.

Теорема 6.1.3 Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нём всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

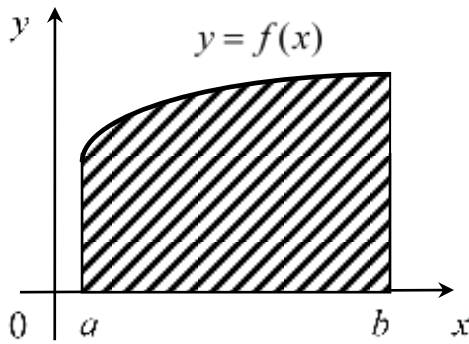


Рисунок 6.1.1 – Криволинейная трапеция

Геометрический смысл определённого интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(x) \geq 0$. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, а также осью Ox (рис. 6.1.1).

С геометрической точки зрения определённый интеграл от неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.1.3)$$

Физический смысл определённого интеграла.

Пусть точка движется прямолинейно вдоль числовой оси с непрерывно меняющейся скоростью $v(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau$. Смещение точки за малый промежуток времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ приближённо можно считать равным $v(\tau_i) \Delta t_i$, где $\tau_i \in [t_{i-1}; t_i]$. Тогда интегральная сумма $\sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i$ представляет собой приближённое значение пути, пройденного точкой от момента времени t_0 до τ . В пределе при $\lambda_n = \max \{ \Delta t_i \} \rightarrow 0$ получаем точное значение этого пути S , то есть

$$S = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i = \int_{t_0}^{\tau} v(t) dt. \quad (6.1.4)$$

Приведём основные свойства определённого интеграла:

- 1) $\int_a^a f(x) dx = 0$;
- 2) $\int_a^b dx = b - a$;
- 3) $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$;
- 4) $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$;

5) если на отрезке $[a; b]$ заданы непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, причём для каждой точки этого отрезка выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx;$$

6) если на отрезке $[a; b]$ непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0;$$

$$7) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$8) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

9) если $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$, $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ и $a < b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a);$$

10) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на отрезке найдётся такая точка $c \in [a; b]$, что $\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$.

Определённый интеграл вычисляется по **формуле Ньютона-Лейбница**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (6.1.5)$$

Данная формула устанавливает связь определённого и неопределённого интегралов. Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Рассмотрим основные *методы интегрирования определённого интеграла*.

Метод непосредственного интегрирования определённого интеграла

Данный метод основан на применении свойств определённого интеграла, таблицы неопределённых интегралов и формулы Ньютона-Лейбница.

Метод замены (подстановки) переменной в определённом интеграле

Применение замены переменной в определённом интеграле основывается на следующей теореме.

Теорема 6.1.4 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha; \beta]$, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (6.1.6)$$

Формула (6.1.6) называется *формулой замены переменной в определённом интеграле*. Для вычисления определённого интеграла по этой формуле необходимо выполнить замену $x = \varphi(t)$, вычислить $dx = \varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, найти пределы интегрирования по переменной t , решая уравнения $\varphi(t) = a$ и $\varphi(t) = b$.

Необходимо отметить, что при вычислении определённого интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения будут изменяться пределы интегрирования.

Метод интегрирования по частям в определённом интеграле

Данный метод основан на следующей теореме.

Теорема 6.1.5 Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны и дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (6.1.7)$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 x^2 dx$ как предел интегральных сумм.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Разобьём отрезок $[0; 1]$ на n равных частей точками $x_0 = 0$, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2 \cdot \Delta x$, ..., $x_n = n \cdot \Delta x = 1$, где $\Delta x = 1/n$. В качестве точек ξ_i возьмём крайние правые точки каждого из элементарных отрезков, то есть точки ξ_i совпадают с точками x_i . Составим интегральную сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i = (\Delta x)^2 \Delta x + (2 \cdot \Delta x)^2 \Delta x + \dots + (n \cdot \Delta x)^2 \Delta x = \\ &= (\Delta x)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

6.2.2 Вычислить определённый интеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4 \sin^2 x \, dx$.

Решение.
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} 8 \sin^2 x \, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (4 - 4 \cos 2x) \, dx = (4x - 2 \sin 2x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$
$$= \left(4 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left(4 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 2\pi - 0 - \pi + 2 = \pi + 2.$$

6.2.3 Вычислить определённый интеграл $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}$.

Решение.
$$\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}} = \left[\begin{array}{ll} x = t^3 & x = 8 \rightarrow t = 2 \\ dx = 3t^2 dt & x = 27 \rightarrow t = 3 \end{array} \right] = \int_2^3 \frac{3t^2 dt}{t^2 + t} =$$
$$= 3 \int_2^3 \frac{t dt}{t+1} = 3 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = (3t - 3 \ln |t+1|) \Big|_2^3 = (9 - 3 \ln 4) - (6 - 3 \ln 3) = 3 - \ln \frac{64}{27}.$$

6.2.4 Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 x e^x \, dx$.

Решение.
$$\int_0^1 x e^x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right] = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx =$$
$$= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$$

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Вычислить определённые интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интегрирования произвольным образом.

6.3.1.1 $\int_{-1}^2 x \, dx$. **6.3.1.2** $\int_1^3 x^2 \, dx$. **6.3.1.3** $\int_0^1 e^x \, dx$. **6.3.1.4** $\int_0^{\pi/2} e^x \, dx$.

6.3.2 Вычислить определённые интегралы.

6.3.2.1 $\int_1^2 (x^2 + 5x + 3) \, dx$. **6.3.2.2** $\int_0^{\pi} \cos^2 3x \, dx$. **6.3.2.3** $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

6.3.3 Вычислить определённые интегралы.

6.3.3.1 $\int_4^5 \frac{dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$. **6.3.3.2** $\int_{-1}^0 \frac{(4x+3)dx}{x^2 - 9x + 8}$. **6.3.3.3** $\int_1^2 \frac{(6x+7)dx}{x^2 + 3x + 2}$.

6.3.4 Вычислить определённые интегралы.

6.3.4.1 $\int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x-2}}$. **6.3.4.2** $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}$. **6.3.4.3** $\int_0^2 \sqrt{9 - x^2} \, dx$.

6.3.5 Вычислить определённые интегралы.

$$6.3.5.1 \quad \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$6.3.5.2 \quad \int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x \, dx.$$

$$6.3.5.3 \quad \int_1^e \ln^2 x \, dx.$$

$$6.3.5.4 \quad \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx.$$

$$6.3.5.5 \quad \int_0^{\pi/3} x^2 \sin 3x \, dx.$$

$$6.3.5.6 \quad \int_0^4 e^{\sqrt{x}} \, dx.$$

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Вычислить определённые интегралы.

$$6.4.1.1 \quad \text{a)} \quad \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^{\pi/4} x \sin 4x \, dx.$$

$$6.4.1.2 \quad \text{a)} \quad \int_{-\pi}^0 \sin^6 x \cos^2 x \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{16 + 9 \cos^2 x}.$$

$$6.4.1.3 \quad \text{a)} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_{\pi}^{2\pi} x \cos 3x \, dx.$$

$$6.4.1.4 \quad \text{a)} \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^8 x \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + 7 \sin^2 x}.$$

$$6.4.1.5 \quad \text{a)} \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^8 x \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_1^e x^2 \ln x \, dx.$$

$$6.4.1.6 \quad \text{a)} \quad \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + 7 \cos^2 x}.$$

$$6.4.1.7 \quad \text{a)} \quad \int_0^{9\pi} \sin^2 \frac{x}{3} \cos^6 \frac{x}{3} \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^{1/2} \arcsin x \, dx.$$

$$6.4.1.8 \quad \text{a)} \quad \int_0^{6\pi} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}.$$

$$6.4.1.9 \quad \text{a)} \quad \int_0^{2\pi} \sin^8 2x \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^{\sqrt{3}/2} \arccos x \, dx.$$

$$6.4.1.10 \quad \text{a)} \quad \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

$$6.4.1.11 \quad \text{a)} \quad \int_0^{3\pi} \sin^6 \frac{x}{6} \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^{1/\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$6.4.1.12 \quad \text{a)} \quad \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} \, dx; \quad \text{б)} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^3 + 8}.$$

- 6.4.1.13 a) $\int_0^{5\pi} \sin^2 \frac{x}{5} \cos^2 \frac{x}{5} dx;$ б) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx.$
- 6.4.1.14 a) $\int_0^{\pi/6} \sin^4 3x \cos^4 3x dx;$ б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 - 4\sin^2 x}.$
- 6.4.1.15 a) $\int_0^{\pi/4} \cos^8 x dx;$ б) $\int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx.$
- 6.4.1.16 a) $\int_0^{14\pi} \sin^2 \frac{x}{7} \cos^4 \frac{x}{7} dx;$ б) $\int_0^3 x^3 \sqrt{9 - x^2} dx.$
- 6.4.1.17 a) $\int_0^{10\pi} \sin^4 \frac{x}{5} \cos^4 \frac{x}{5} dx;$ б) $\int_0^{\pi/5} x \sin 5x dx.$
- 6.4.1.18 a) $\int_0^{4\pi} \sin^6 \frac{x}{4} dx;$ б) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{49 + x^2}}.$
- 6.4.1.19 a) $\int_0^{8\pi} \cos^6 \frac{x}{4} dx;$ б) $\int_{\pi/8}^{\pi/4} x \cos 4x dx.$
- 6.4.1.20 a) $\int_0^{10\pi} \sin^2 \frac{x}{5} \cos^4 \frac{x}{5} dx;$ б) $\int x^4 \sqrt{4 - x^2} dx.$
- 6.4.1.21 a) $\int_{-14\pi}^{-12\pi} \sin^2 \frac{x}{7} \cos^4 \frac{x}{7} dx;$ б) $\int_1^e x^3 \ln x dx.$
- 6.4.1.22 a) $\int_{\pi}^{4\pi} \sin^6 \frac{x}{8} dx;$ б) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}.$
- 6.4.1.23 a) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos^6 \frac{x}{8} dx;$ б) $\int_0^{1/4} \arcsin 2x dx.$
- 6.4.1.24 a) $\int_{-\pi/2}^{3\pi} \sin \frac{x}{2} \cos^{15} \frac{x}{2} dx;$ б) $\int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}.$
- 6.4.1.25 a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx;$ б) $\int_0^1 \arccos 2x dx.$
- 6.4.1.26 a) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 2x \cos^2 2x dx;$ б) $\int_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx.$
- 6.4.1.27 a) $\int_0^{\pi/12} \cos^8 3x dx;$ б) $\int_{-1}^0 \operatorname{arctg} 4x dx.$
- 6.4.1.28 a) $\int_0^{\pi/16} \sin^8 4x dx;$ б) $\int_8^{27} \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}.$

$$\begin{array}{ll}
6.4.1.29 & \text{a)} \quad \int_{9\pi}^{18\pi} \sin^2 \frac{x}{9} \cos^2 \frac{x}{9} dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^{\ln 3} x^4 e^{2x} dx. \\
6.4.1.30 & \text{a)} \quad \int_{-36\pi}^{36\pi} \sin^4 \frac{x}{6} \cos^6 \frac{x}{6} dx; \quad \text{б)} \quad \int_0^3 \frac{dx}{x^3 - 27}.
\end{array}$$

7 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Содержание: несобственные интегралы первого и второго рода, сходимость и расходимость несобственных интегралов.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

При введении понятия определённого интеграла как предела интегральных сумм предполагалось, что пределы интегрирования являются конечными, а подынтегральная функция непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода. При выполнении этих условий интегралы называются *собственными*. Если хотя бы одно из указанных условий нарушается, то интегралы называются *несобственными интегралами*.

Определим несобственные интегралы первого рода или интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Определение 7.1.1 *Несобственным интегралом первого рода с бесконечным верхним пределом интегрирования* от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ называется предел $f(b)$ при значении $b \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (7.1.1)$$

Определение 7.1.2 *Несобственным интегралом первого рода с бесконечным нижним пределом интегрирования* от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty; b]$ называется предел $f(a)$ при значении $a \rightarrow -\infty$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (7.1.2)$$

Если пределы в правых частях формул (7.1.1) и (7.1.2) существуют и конечны, то несобственные интегралы первого рода называются *сходящимися*, если пределы не существуют или бесконечны, то интегралы называются *расходящимися*.

Несобственный интеграл первого рода с двумя бесконечными пределами интегрирования вычисляется по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx, \quad (7.1.3)$$

где $-\infty < c < +\infty$.

Определим несобственные интегралы второго рода или интегралы от неограниченных подынтегральных функций.

Определение 7.1.3 Несобственным интегралом второго рода от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $[a; b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x = b$ называется предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ при значении $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (7.1.4)$$

Определение 7.1.4 Несобственным интегралом второго рода от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a; b]$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x = a$ называется предел интеграла $\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ при значении $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (7.1.5)$$

Если пределы в правых частях формул (7.1.4) и (7.1.5) существуют и конечны, то несобственные интегралы второго рода называются *сходящимися*, если пределы не существуют или бесконечны, то интегралы называются *расходящимися*.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой точке $c \in [a; b]$, то данный интеграл необходимо представить в виде суммы двух несобственных интегралов второго рода

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx. \quad (7.1.6)$$

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} \cos x dx$.

Решение. $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - 0)$. Данный предел не существует. Следовательно, несобственный интеграл расходится.

7.2.2 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \Big|_a^1 = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = -1$. Следовательно, несобственный интеграл сходится.

7.2.3 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$.

Решение. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = 2 \operatorname{arctg} b - 0 = \pi$.

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

7.2.4 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Решение. $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln |x| \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln |\varepsilon|) = +\infty$. Следовательно,

но, несобственный интеграл расходится.

7.2.5 Установить сходимость несобственного интеграла $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin \frac{2-\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

7.3.1.1 $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

7.3.1.2 $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{9+x^2}$.

7.3.1.3 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

7.3.1.4 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$.

7.3.1.5 $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

7.3.1.6 $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$

7.3.2 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

7.3.2.1 $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

7.3.2.2 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

7.3.2.3 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

7.3.2.4 $\int_0^1 \ln x dx$

7.3.2.5 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7.3.2.6 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x \cos x}$

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

7.4.1.1 а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1}$. **7.4.1.2** а) $\int_{-\infty}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2+x^2}$; б) $\int_5^6 \frac{dx}{\sqrt{x-5}}$.

7.4.1.3 а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{2x-1}$; б) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$. **7.4.1.4** а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.

7.4.1.5	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{4+64x^2}$;	б) $\int_{\sqrt{8}}^3 \frac{dx}{x^2-9}$.	7.4.1.6	a) $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{4+x^2}$;	б) $\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt{x-6}}$.
7.4.1.7	a) $\int_3^{\infty} \frac{x dx}{x-1}$;	б) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$.	7.4.1.8	a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$;	б) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.
7.4.1.9	a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$;	б) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-16}$.	7.4.1.10	a) $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{9+x^2}$;	б) $\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-6}}$.
7.4.1.11	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{3x-1}$;	б) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$.	7.4.1.12	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^3}$;	б) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$.
7.4.1.13	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{9+25x^2}$;	б) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2-1}$.	7.4.1.14	a) $\int_{-\infty}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2}$;	б) $\int_7^8 \frac{dx}{\sqrt{x-7}}$.
7.4.1.15	a) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^2-1}$;	б) $\int_{\pi/4}^{\pi} \operatorname{ctg} x dx$.	7.4.1.16	a) $\int_5^{\infty} \frac{dx}{x^5}$;	б) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{6-x}}$.
7.4.1.17	a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{16+x^2}$;	б) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-9}$.	7.4.1.18	a) $\int_{-\infty}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{5+x^2}$;	б) $\int_9^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-9}}$.
7.4.1.19	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{3x-1}$;	б) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \operatorname{tg} x dx$.	7.4.1.20	a) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^6}$;	б) $\int_5^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$.
7.4.1.21	a) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{9+64x^2}$;	б) $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x^2-4}$.	7.4.1.22	a) $\int_{-\infty}^{\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7} dx}{7+x^2}$;	б) $\int_8^9 \frac{dx}{\sqrt{x-8}}$.
7.4.1.23	a) $\int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{5x+2}$;	б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{ctg} x dx$.	7.4.1.24	a) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^7}$;	б) $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{8-x}}$.
7.4.1.25	a) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{1+9x^2}$;	б) $\int_3^6 \frac{dx}{x^2-36}$.	7.4.1.26	a) $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{4+x^2}$;	б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.
7.4.1.27	a) $\int_6^{\infty} \frac{dx}{5x-1}$;	б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$.	7.4.1.28	a) $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^7}$;	б) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$.
7.4.1.29	a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{64+x^2}$;	б) $\int_1^7 \frac{dx}{x^2-49}$.	7.4.1.30	a) $\int_{-\infty}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{5+x^2}$;	б) $\int_6^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-6}}$.

8 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Содержание: вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат, вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

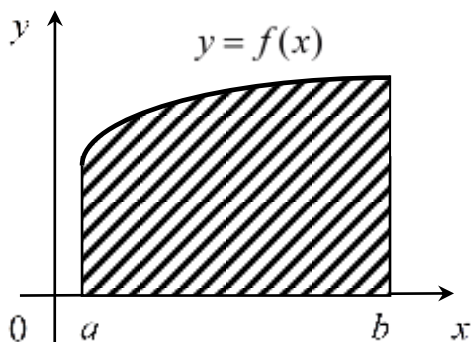


Рисунок 8.1.1 – Криволинейная трапеция

Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (8.1.1)$$

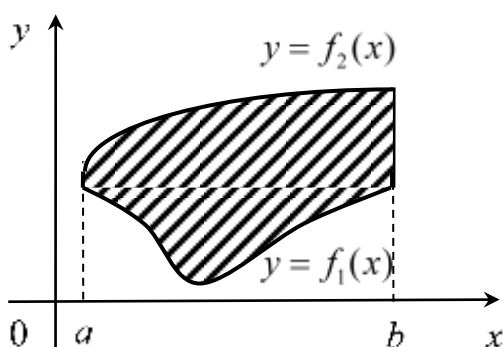


Рисунок 8.1.2 – Плоская фигура Φ

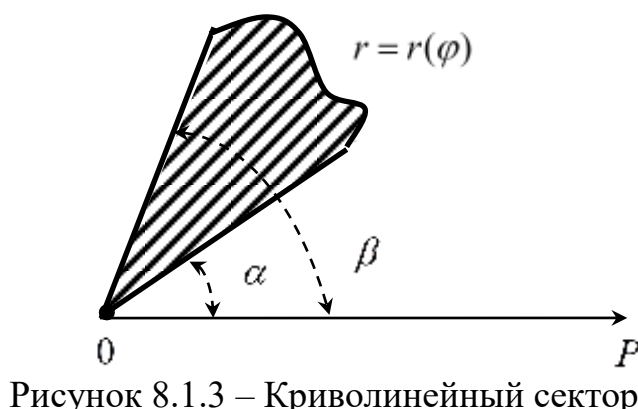
Площадь этой плоской фигуры находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (8.1.2)$$

Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox , то её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt, \quad (8.1.3)$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений $x(t_1) = a$, $y(t_2) = b$ ($y(t) \geq 0$ на отрезке $[t_1; t_2]$).



Пусть фигура ограничена непрерывной функцией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, где φ и r — полярные координаты. Полученная фигура называется *криволинейным сектором*, ограниченным дугой графика функции $r = r(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (рис. 8.1.3).

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi) d\varphi. \quad (8.1.4)$$

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Вычислить площадь фигуры $\Phi 1$, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.

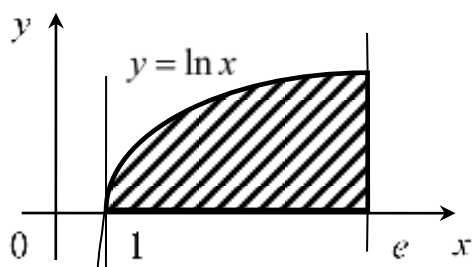


Рисунок 8.2.1.1 – Фигура $\Phi 1$

Решение. Находим площадь фигуры $\Phi 1$, которая является криволинейной трапецией (рис. 8.2.1.1) по формуле (8.1.1).

$$S = \int_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - 0 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1 \text{ (кв. ед).}$$

8.2.2 Вычислить площадь фигуры $\Phi 2$, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.

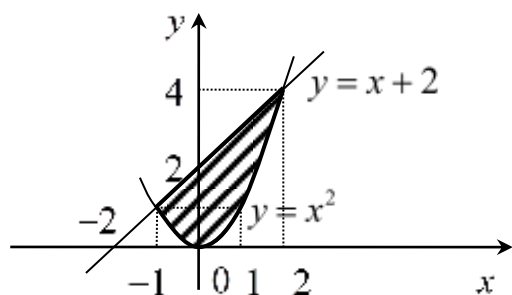


Рисунок 8.2.2.1 – Фигура $\Phi 2$

Решение. Находим точки пересечения данных линий и строим искомую фигуру $\Phi 2$ (рис. 8.2.2.1):

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 2, \\ x^2 = x + 2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Следовательно, согласно формуле (8.1.2), имеем

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (кв. ед)}.$$

8.2.3 Вычислить площадь фигуры $\Phi 3$, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox , где $a > 0$.

Решение. Поскольку все арки циклоиды одинаковы, рассмотрим первую её арку, вдоль которой параметр t изменяется от 0 до 2π (рис. 8.2.3.1).

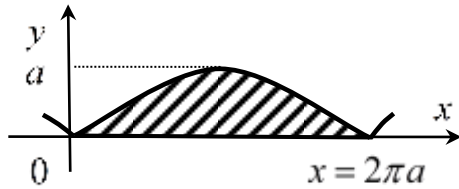


Рисунок 8.2.3.1 – Фигура $\Phi 3$

Для определения площади фигуры $\Phi 3$, ограниченной первой аркой циклоиды и осью Ox , воспользуемся формулой (8.1.3). Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) (a(t - \cos t))' dt = \\ &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \text{ (кв. ед)}. \end{aligned}$$

8.2.4 Вычислить площадь фигуры $\Phi 4$, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, где $a > 0$.

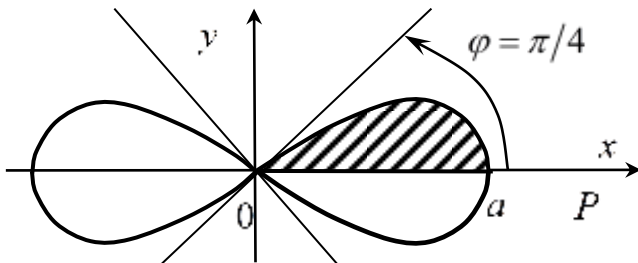


Рисунок 8.2.4.1 – Фигура $\Phi 4$

Решение. Так как в уравнении лемнискаты Бернулли переменные x и y имеют чётную степень, то кривая, ограничивающая заданную фигуру $\Phi 4$, симметрична относительно осей координат. Следовательно, для нахождения площади всей фигуры $\Phi 4$ достаточно вычислить площадь четвертой части этой фигуры, расположенной, например, в первой четверти, и полученный результат увеличить в четыре раза.

Запишем уравнение лемнискаты Бернулли в полярной системе координат, используя формулы перехода от декартовой системы координат к полярной системе координат: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда уравнение данной кривой примет вид: $(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = a^2(r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) \rightarrow r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ или $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Первой четверти декартовой системы координат соответствует

изменение полярного угла φ от 0 до $\pi/4$ (рис. 8.2.4.1). Используя формулу (8.1.4), находим площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = a^2 \text{ (кв. ед).}$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Вычислить площади фигур, ограниченными линиями, указанными в задачах 8.3.1.1–8.3.1.10.

8.3.1.1 $y = e^{2x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 2$.

8.3.1.2 $y = x^2 - 6x + 8$, $y = 0$.

8.3.1.3 $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$

8.3.1.4 $y = \frac{27}{x^2 + 9}$, $y = \frac{x^2}{6}$

8.3.1.5 $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

8.3.1.6 $y = \ln(x + 2)$, $y = 2 \ln x$, $y = 0$.

8.3.1.7 $y = 1 - \cos t$, $x = t - \sin t$, $y = 0$.

8.3.1.8 $y = 2t^2 - t^3$, $x = 2t - t^3$.

8.3.1.9 $r = a(1 + \sin \varphi)$, $a > 0$.

8.3.1.10 $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовых координатах.

8.4.1.1 $y = x^2 + x$, $y = 3 - x$.

8.4.1.2 $y = x^2 + 4x$, $y = x$.

8.4.1.3 $y = x^2$, $y = 2 - x$.

8.4.1.4 $y = \frac{2}{x}$, $y = 3 - x$.

8.4.1.5 $y = \frac{6}{x}$, $y + x = -5$.

8.4.1.6 $y = -\frac{2}{x}$, $y = 3 + x$.

8.4.1.7 $y = \sqrt{x}$, $y = x$.

8.4.1.8 $y = -\sqrt{x}$, $y = -x^2$.

8.4.1.9 $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$.

8.4.1.10 $y = \frac{2}{x^2 + 1}$, $y = x^2$.

8.4.1.11 $y = \frac{32}{x^2 + 4}$, $y = x^2$.

8.4.1.12 $y = \frac{90}{x^2 + 1}$, $y = x^2$.

8.4.1.13 $y = x^2 - 4x$, $y = -x^2$.

8.4.1.14 $y = x^2 - 1$, $y = x - x^2$.

8.4.1.15 $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

8.4.1.16 $y = x^2 - x$, $y = 2x + 2$.

8.4.1.17 $y = x^2 - x$, $y = 4x$.

8.4.1.18 $y = x^2 - 6$, $y = -x$.

8.4.1.19 $y = \frac{4}{x^2}$, $y = 5 - x^2$.

8.4.1.20 $y = \frac{8}{x^3}$, $y = 9 - x^3$.

8.4.1.21 $y = \frac{10}{x^2}$, $y = 8 - x^2$.

8.4.1.22 $y = \sqrt{x^3}$, $y = x^3$.

$$8.4.1.23 \quad y = -\sqrt{x^3}, y = -x^3.$$

$$8.4.1.25 \quad y = \frac{3}{x^2 - 4}, y = x^2 - 2.$$

$$8.4.1.27 \quad y = \frac{3}{4 - x^2}, y = x^2.$$

$$8.4.1.29 \quad y = x^2 - 1, y = 1 - x^2$$

$$8.4.1.24 \quad y = \sqrt{x^3}, y = 3x.$$

$$8.4.1.26 \quad y = \frac{5}{x^2 - 9}, y = x^2 - 5.$$

$$8.4.1.28 \quad y = x^2 + 8x, y = -x^2.$$

$$8.4.1.30 \quad y = x^2, y = 2 - x^2.$$

8.4.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, которые заданы параметрическим образом.

$$8.4.2.1 \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 4 \quad (y \geq 4).$$

$$8.4.2.3 \quad \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 6).$$

$$8.4.2.5 \quad \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}).$$

$$8.4.2.7 \quad \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \\ y = 4 \quad (y \geq 4).$$

$$8.4.2.9 \quad \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 6).$$

$$8.4.2.11 \quad \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \\ y = 2\sqrt{3} \quad (y \geq 2\sqrt{3}).$$

$$8.4.2.13 \quad \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 1 \quad (x \geq 1).$$

$$8.4.2.2 \quad \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 2 \quad (x \geq 2).$$

$$8.4.2.4 \quad \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 1 \quad (x \geq 1).$$

$$8.4.2.6 \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 3).$$

$$8.4.2.8 \quad \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}).$$

$$8.4.2.10 \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 2 \quad (y \geq 2).$$

$$8.4.2.12 \quad \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, y \geq 3).$$

$$8.4.2.14 \quad \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \\ y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}).$$

$$8.4.2.15 \quad \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 5 \quad (0 < x < 20\pi, y \geq 5).$$

$$8.4.2.17 \quad \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 5 \quad (y \geq 5).$$

$$8.4.2.19 \quad \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 3 \quad (y \geq 3).$$

$$8.4.2.21 \quad \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 9).$$

$$8.4.2.23 \quad \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}).$$

$$8.4.2.25 \quad \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 2 \quad (x \geq 2).$$

$$8.4.2.27 \quad \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, y \geq 1).$$

$$8.4.2.29 \quad \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}).$$

$$8.4.2.16 \quad \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \\ y = 2 \quad (y \geq 2).$$

$$8.4.2.18 \quad \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 2 \quad (0 < x < 16\pi, y \geq 2).$$

$$8.4.2.20 \quad \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \\ y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}).$$

$$8.4.2.22 \quad \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \\ y = 3 \quad (y \geq 3).$$

$$8.4.2.24 \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 2).$$

$$8.4.2.26 \quad \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 2 \quad (x \geq 2).$$

$$8.4.2.28 \quad \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}).$$

$$8.4.2.30 \quad \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4).$$

8.4.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

$$8.4.3.1 \quad r = 2 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi.$$

$$8.4.3.3 \quad r = \sin \varphi.$$

$$8.4.3.5 \quad r = \cos 2\varphi.$$

$$8.4.3.7 \quad r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi.$$

$$8.4.3.2 \quad r = \cos 3\varphi.$$

$$8.4.3.4 \quad r = \sin 3\varphi.$$

$$8.4.3.6 \quad r = 1/2 + \sin \varphi.$$

$$8.4.3.8 \quad r = 1/2 + \cos \varphi.$$

$$8.4.3.9 \quad r = 4 \cos 4\varphi.$$

$$8.4.3.11 \quad r = 2 \sin 4\varphi.$$

$$8.4.3.13 \quad r = \sin 6\varphi.$$

$$8.4.3.15 \quad r = 2 \cos 6\varphi.$$

$$8.4.3.17 \quad r = 4 \sin^2 \varphi.$$

$$8.4.3.19 \quad r = 3 \sin \varphi, r = 5 \sin \varphi.$$

$$8.4.3.21 \quad r = \sin 4\varphi.$$

$$8.4.3.23 \quad r = \sin 5\varphi.$$

$$8.4.3.25 \quad r = 6 \cos 6\varphi.$$

$$8.4.3.27 \quad r = 2 + 2 \cos \varphi.$$

$$8.4.3.29 \quad r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$$

$$8.4.3.10 \quad r = 2 + \cos \varphi.$$

$$8.4.3.12 \quad r = \cos \varphi - \sin \varphi.$$

$$8.4.3.14 \quad r = \cos \varphi + \sin \varphi.$$

$$8.4.3.16 \quad r = 6 \sin \varphi, r = 4 \sin \varphi.$$

$$8.4.3.18 \quad r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

$$8.4.3.20 \quad r = 3 \cos 5\varphi.$$

$$8.4.3.22 \quad r = \sqrt{\sin 2\varphi}.$$

$$8.4.3.24 \quad r = 8 \cos 8\varphi.$$

$$8.4.3.26 \quad r = 8 \sin 8\varphi.$$

$$8.4.3.28 \quad r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$$

$$8.4.3.30 \quad r = 4 \sin 3\varphi.$$

9 ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ДУГ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Содержание: вычисление длин дуг кривых заданных в декартовой и полярной системах координат.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$, дуга AB – график этой функции (рис. 9.1.1).

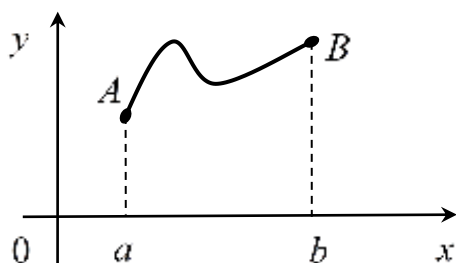


Рисунок 9.1.1 – Плоская дуга

Длина l плоской гладкой дуги AB , уравнение которой задано в аналитическом виде, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (9.1.1)$$

Предположим, что плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $t \in [t_1; t_2]$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причём $x'(t) \neq 0$ для любого значения $t \in [t_1; t_2]$, а t_1 и t_2 – значения параметра t , которые соответствуют концам дуги, то есть точкам A и B соответственно (рис. 9.1.1).

Длина l плоской гладкой дуги AB , уравнение которой задано параметрическими уравнениями, вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (9.1.2)$$

Рассмотрим пространственную кривую L , заданную параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и $t \in [t_1; t_2]$. Функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причём $x'(t) \neq 0$ для любого значения $t \in [t_1; t_2]$, а t_1 и t_2 – значения параметра t , которые соответствуют концам кривой L .

Длина l пространственной гладкой дуги L , уравнение которой задано параметрическими уравнениями, вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt. \quad (9.1.3)$$

Пусть плоская гладкая кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, а α и β – значения полярного угла φ , которые соответствуют концам кривой L . Если функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha; \beta]$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (9.1.4)$$

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсечённой прямой $x = 1$.

Решение. Линия $L1$, длину которой необходимо найти, изображена на

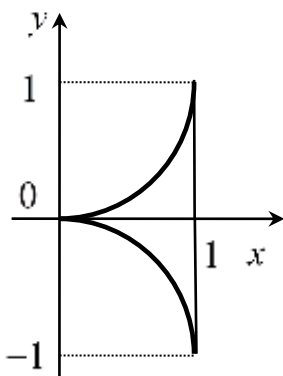


Рисунок 9.2.1.1 – Линия $L1$

рисунке 9.2.1.1. Найдём производную функции $y = f(x)$, заданной неявно соотношением $y^2 = x^3$, имеем $2yy' = 3x^2$, откуда

$$(y')^2 = \frac{9}{4}x.$$

В силу симметрии кривой относительно оси абсцисс достаточно вычислить длину дуги расположенной в первой четверти, и удвоить полученный результат. По формуле (9.1.1) получаем длину дуги заданной кривой

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \int_0^1 \sqrt{4 + 9x} dx = \\ &= \frac{1}{9} \int_0^1 \sqrt{4 + 9x} d(4 + 9x) = \frac{2}{27} \sqrt{(4 + 9x)^3} \Big|_0^1 = \frac{26}{27} \sqrt{13} - \frac{16}{27} = \frac{26\sqrt{13} - 16}{27} \approx 2,9 \text{ (лин. ед)}. \end{aligned}$$

9.2.2 Вычислить длину астроиды $y = a \sin^3 t$, $x = a \cos^3 t$, где $a > 0$.

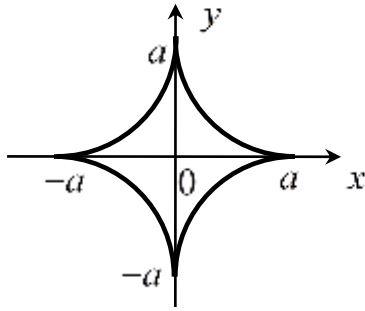


Рисунок 9.2.2.1 – Астроида

Решение. Ввиду симметрии астроиды (рис. 9.2.2.1) относительно осей координат достаточно вычислить длину её части, расположенной в первой четверти плоскости, а затем полученный результат умножить на четыре. Имеем $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t$, $y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$. Тогда, согласно формуле (9.1.2), имеем

$$l = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt =$$

$$= 12a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -3a \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = 6a \text{ (лин. ед)}.$$

9.2.3 Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 - \cos \varphi)$, где $a > 0$.

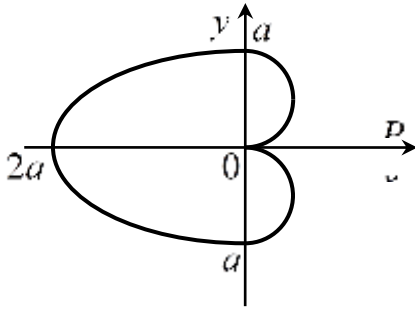


Рисунок 9.2.3.1 – Кардиоида

Решение. В силу симметрии кардиоиды (рис. 9.2.3.1) относительно полярной оси OP достаточно вычислить длину дуги, расположенной выше оси, а затем полученный результат увеличить в два раза. Имеем $r'_\varphi = a \sin \varphi$. Используя формулу (9.1.4), находим длину дуги кардиоиды.

$$l = 2 \int_0^\pi \sqrt{a^2 (1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^\pi \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} d\varphi = 2a^2 \int_0^\pi 2 \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -8a \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 0 + 8a = 8a \text{ (лин. ед)}.$$

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

9.3.2 Найти длину дуги кривой $y = \operatorname{ch} x$ от $x = 0$ до $x = 1$.

9.3.3 Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками её пересечения с осью Ox .

9.3.4 Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{5}{p}(x-p)^3$, отсекаемой прямой $x = 2p$.

9.3.5 Найти длину дуги кривой $y = e^t \sin t$, $x = e^t \cos t$ от $t = 0$ до $t = 1$.

9.3.6 Найти длину дуги кривой $y = 3\sin t - \sin 3t$, $x = 3\cos t - \cos 3t$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

9.3.7 Найти длину дуги петли кривой $y = \frac{1}{3}t - t^3$, $x = t^2$.

9.3.8 Найти длину дуги петли кривой $y = 2 - \frac{t^4}{4}$, $x = \frac{t^6}{6}$ между точками её пересечения с осями координат.

9.3.9 Найти длину дуги кривой $r = \varphi^2$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

9.3.10 Найти длину кардиоиды $r = 1 - \cos \varphi$.

9.3.11 Найти длину пространственной кривой $x = t^2$, $y = t + \frac{1}{3}t^3$, $z = t - \frac{1}{3}t^3$ от $t = 0$ до $t = \sqrt{3}$.

9.3.12 Найти длину пространственной кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ между плоскостями $z = e$ и $z = e^2$.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в декартовых координатах.

- | | |
|--|---|
| 9.4.1.1 $y = e^x + e$, $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$. | 9.4.1.2 $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$,
$1/4 \leq x \leq 1$. |
| 9.4.1.3 $y = e^x + 25$, $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$. | 9.4.1.4 $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1$,
$0 \leq x \leq 9/16$. |
| 9.4.1.5 $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$. | 9.4.1.6 $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4$,
$0 \leq x \leq 1/2$. |
| 9.4.1.7 $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \leq x \leq 2$. | 9.4.1.8 $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5$,
$1/9 \leq x \leq 1$. |
| 9.4.1.9 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \leq x \leq 2$. | 9.4.1.10 $y = e^x + 6$, $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$. |
| 9.4.1.11 $y = \ln \frac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$. | 9.4.1.12 $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$,
$0 \leq x \leq 3/4$. |
| 9.4.1.13 $y = -\ln \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/6$. | 9.4.1.14 $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$,
$0 \leq x \leq 8/9$. |

9.4.1.15 $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3.$	9.4.1.16 $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},$ $0 \leq x \leq 15/16.$
9.4.1.17 $y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq 1/4.$	9.4.1.18 $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},$ $0 \leq x \leq 1/4.$
9.4.1.19 $y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1.$	9.4.1.20 $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/6.$
9.4.1.21 $y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}.$	9.4.1.22 $y = 1 - \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$
9.4.1.23 $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4.$	9.4.1.24 $y = \ln \sin x, \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$
9.4.1.25 $y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$	9.4.1.26 $y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \leq x \leq 1.$
9.4.1.27 $y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \pi/6.$	9.4.1.28 $y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}.$
9.4.1.29 $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4}, 0 \leq x \leq 2.$	9.4.1.30 $y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}, 0 \leq x \leq 3.$

9.4.2 Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями с параметром.

9.4.2.1 $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$	9.4.2.2 $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
9.4.2.3 $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$	9.4.2.4 $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$
9.4.2.5 $\begin{cases} x = (1,5 \cdot t^2 - 3) \sin t + 3t \cos t, \\ y = (3 - 1,5 \cdot t^2) \cos t + 3t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$	9.4.2.6 $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$
9.4.2.7 $\begin{cases} x = 3(t + \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$	9.4.2.8 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \\ \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$

9.4.2.9	$\begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t), \\ y = 3(\cos t + t \sin t), \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$	9.4.2.10	$\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$
9.4.2.11	$\begin{cases} x = e^t (\cos t - \sin t), \\ y = e^t (\cos t + \sin t), \\ \pi/2 \leq t \leq \pi. \end{cases}$	9.4.2.12	$\begin{cases} x = e^{2t} (\cos 2t + \sin 2t), \\ y = e^{2t} (\cos 2t - \sin 2t), \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$
9.4.2.13	$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$	9.4.2.14	$\begin{cases} x = 10 \cos^3 2t, \\ y = 10 \sin^3 2t, \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$
9.4.2.15	$\begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^2 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$	9.4.2.16	$\begin{cases} x = 8 \cos^3 3t, \\ y = 8 \sin^3 3t, \\ 0 \leq t \leq \pi/18. \end{cases}$
9.4.2.17	$\begin{cases} x = \cos 2t + 2t \sin 2t, \\ y = \sin 2t - 2t \cos 2t, \\ 0 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$	9.4.2.18	$\begin{cases} x = 3,5 \cdot (2 \cos t + \cos 2t), \\ y = 3,5 \cdot (2 \sin t + \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$
9.4.2.19	$\begin{cases} x = e^t (\cos 3t - \sin 3t), \\ y = e^t (\cos 3t + \sin 3t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$	9.4.2.20	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 + \cos t), \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3. \end{cases}$
9.4.2.21	$\begin{cases} x = 2 \cdot (2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2 \cdot (2 \sin t + \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi/3. \end{cases}$	9.4.2.22	$\begin{cases} x = \left(\frac{t^2}{2} - 1 \right) \sin t + t \cos t, \\ y = \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) \cos t + t \sin t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$
9.4.2.23	$\begin{cases} x = 3(t + \sin t), \\ y = 3(1 + \cos t), \\ \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$	9.4.2.24	$\begin{cases} x = 2,5 \cdot (1 - \cos t), \\ y = 2,5 \cdot (t - \sin t), \\ \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

$$9.4.2.25 \quad \begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}, \\ y = \sin \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}, \\ 0 \leq t \leq \pi / 4. \end{cases}$$

$$9.4.2.26 \quad \begin{cases} x = 5 \cos^2 4t, \\ y = 5 \sin^2 4t, \\ \frac{\pi}{24} \leq t \leq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$9.4.2.27 \quad \begin{cases} x = e^{\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right), \\ y = e^{\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \right), \\ 0 \leq t \leq 3\pi. \end{cases}$$

$$9.4.2.28 \quad \begin{cases} x = 7(1 + \cos t), \\ y = 7(t + \sin t), \\ \pi / 2 \leq t \leq 3\pi / 2. \end{cases}$$

$$9.4.2.29 \quad \begin{cases} x = 4 \cdot (2 \cos t + \cos 2t), \\ y = 4 \cdot (2 \sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$9.4.2.30 \quad \begin{cases} x = \cos 5t + 5t \sin 5t, \\ y = 5 \sin t - 5t \cos 5t, \\ 0 \leq t \leq \pi / 4. \end{cases}$$

9.4.3 Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах.

$$9.4.3.1 \quad r = 3e^{3\varphi/4}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$9.4.3.2 \quad r = 2e^{4\varphi/3}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$9.4.3.3 \quad r = \sqrt{2}e^\varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$9.4.3.4 \quad r = 5e^{5\varphi/12}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$9.4.3.5 \quad r = 6e^{12\varphi/5}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

$$9.4.3.6 \quad r = 3e^{3\varphi/12}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$9.4.3.7 \quad r = 4e^{4\varphi/3}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$9.4.3.8 \quad r = \sqrt{2}e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$9.4.3.9 \quad r = 5e^{5\varphi/12}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$9.4.3.10 \quad r = 12e^{12\varphi/5}, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$9.4.3.11 \quad r = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$9.4.3.12 \quad r = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}.$$

$$9.4.3.13 \quad r = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$9.4.3.14 \quad r = 4(1 - \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$9.4.3.15 \quad r = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

$$9.4.3.16 \quad r = 6(1 + \sin \varphi), -\pi/2 \leq \varphi \leq 0.$$

$$9.4.3.17 \quad r = 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$9.4.3.18 \quad r = 8(1 - \cos \varphi), -2\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$9.4.3.19 \quad r = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$9.4.3.20 \quad r = 1 - \sin \varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/6.$$

$$9.4.3.21 \quad r = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 5/12.$$

$$9.4.3.22 \quad r = 3(1 + \sin \varphi), -\pi/6 \leq \varphi \leq 0.$$

$$9.4.3.23 \quad r = 4\varphi, 0 \leq \varphi \leq 3/4.$$

$$9.4.3.24 \quad r = 5(1 - \cos \varphi), -\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$$

$$9.4.3.25 \quad r = 5\varphi, 0 \leq \varphi \leq 12/5.$$

$$9.4.3.26 \quad r = 7(1 - \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$9.4.3.27 \quad r = 8 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

$$9.4.3.28 \quad r = 6 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/3.$$

$$9.4.3.29 \quad r = 2 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

$$9.4.3.30 \quad r = 8 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/4.$$

10 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЁМОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ И ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Содержание: вычисление объёмов тел, вычисление объёмов тел вращения, вычисление площадей поверхностей.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

10.1.1 Вычисление объёмов пространственных тел

Пусть задано некоторое пространственное тело, ограниченное поверхностью, и известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной некоторой прямой, например, к оси абсцисс. Эти сечения называются *поперечными*. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox . Если площадь $S(x)$ поперечного сечения является непрерывной функцией на отрезке $[a; b]$, то объём тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (10.1.1.1)$$

Предположим, что пространственное тело получено путём вращения дуги L вокруг оси Ox , заданной на отрезке $[a; b]$ функцией $y = f(x)$. Тогда в сечении получаем круг, площадь которого равна $S(x) = \pi f^2(x)$. Следовательно, объём тела вращения такого тела можно определить по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (10.1.1.2)$$

Если же эта дуга будет вращаться вокруг оси Oy , то объём полученного тела можно вычислить по формуле

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx. \quad (10.1.1.3)$$

Пусть пространственное тело получено путём вращения дуги L вокруг оси Oy , заданной на отрезке $[c; d]$ функцией $x = f(y)$. Тогда в сечении получаем круг, площадь которого равна $S(y) = \pi \varphi^2(y)$. Следовательно, объём тела вращения такого тела можно определить по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (10.1.1.4)$$

Если дуга L , заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $t \in [t_1; t_2]$, вращается вокруг оси Ox или Oy , то объёмы тел вращения вычисляются по формулам:

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt, \quad (10.1.1.5)$$

$$V_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) |y(t)| x'(t) dt. \quad (10.1.1.6)$$

Предположим, что криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси. Тогда объём тела вращения находится по формуле

$$V_{OP} = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (10.1.1.7)$$

10.1.2 Вычисление площадей поверхности тел вращения

Рассмотрим дугу L , которая вращается вокруг произвольной оси l . Предположим, что известны расстояние ρ от произвольной точки дуги до оси вращения l и дифференциал дуги dl , которые выражаются через переменную интегрирования, а также пределы интегрирования A и B соответствующих концов дуги L . Тогда площадь поверхности вращения будет выражаться следующим интегралом

$$Q_l = 2\pi \int_A^B \rho dl. \quad (10.1.2.1)$$

На основании интеграла (10.1.2.1) приведём формулы площадей Q_x поверхностей вращения вокруг оси Ox , в зависимости от формулы задания дуги.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, где $x \in [a; b]$, вычисляется по формуле

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (10.1.2.2)$$

Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, то

$$Q_x = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (10.1.2.3)$$

Если дуга задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то

$$Q_x = 2\pi \int_a^b r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (10.1.2.4)$$

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Плоскость равнобедренного треугольника движется перпендикулярно к неподвижному диаметру круга радиуса R . Основание треугольника есть хорда круга, а вершина лежит на прямой, параллельной неподвижному диаметру, на расстоянии H от плоскости круга. Найти объём тела, образованного движением плоскости треугольника от одного конца диаметра до другого.

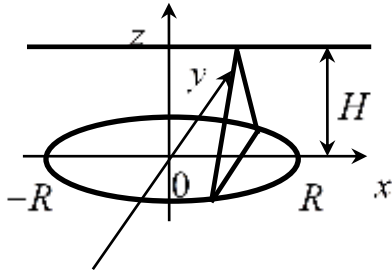


Рисунок 10.2.1.1 – Движение треугольника

Решение. Выберем систему координат так, чтобы центр круга был в начале координат, а неподвижный диаметр расположен на оси Ox (рисунок 10.2.1.1). Уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

Сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , есть равнобедренный треугольник с основанием $2y = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ и высотой H . Тогда площадь ортогонального сечения

оси Ox равна $S(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot H = H \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$.

Найдём объём полученного тела воспользовавшись формулой (10.1.1.1).

$$V = H \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 2H \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left(Hx\sqrt{R^2 - x^2} + HR^2 \arcsin \frac{x}{R} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

10.2.2 Вычислить объём тела T_1 , образованного вращением вокруг оси

Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

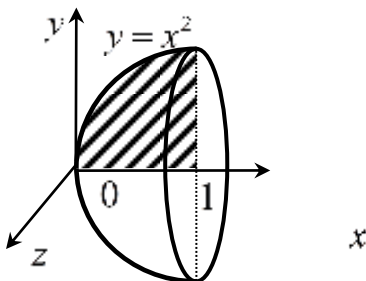


Рисунок 10.2.2.1 – Тело T_1

Решение. Находим точку пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $x = 1$: $M(1;0)$ (рис. 10.2.2.1).

Воспользуемся формулой (7.1.3.2).

$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \approx 0,628 \text{ (куб. ед.)}.$$

10.2.3 Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью Oy и прямыми $y = 1$, $y = 0$.

Решение. По формуле (10.1.1.4), учитывая, что

$$c = 0, d = 1, x^2 dy = y dy,$$

Имеем

$$V_y = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ (куб. ед.)}.$$

10.2.4 Вычислить площадь поверхности Π_1 , образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin 2x$ от точки $x=0$ до точки $x = \pi/2$.

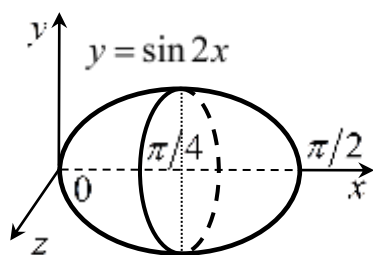


Рисунок 10.2.4.1 – Поверхность Π_1

Решение. Как видно из рисунка 10.2.1.1 и формулы (10.1.2.2) искомая площадь поверхности вращения

$$Q_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1 + 4\cos^2 2x} dx =$$

$$= -\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 4\cos^2 2x} d \cos 2x =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = 2 \cos 2x & x = 0 \rightarrow t = 2 \\ d \cos 2x = \frac{dt}{2} & x = \pi/2 \rightarrow t = -2 \end{array} \right] = -\frac{\pi}{2} \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{\ln|t + \sqrt{1+t^2}|}{2} \right) \Bigg|_{-2}^2 = \frac{\pi}{2} (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})) \approx 9,29 \text{ (кв. ед)}.$$

Для нахождения интеграла $\int \sqrt{1+t^2} dt$ воспользовались заменой $t = \operatorname{tg} z$, основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и формулой интегрирования по частям.

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 Найти объём клина, отсечённого от прямого кругового цилиндра радиуса R плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом φ к плоскости основания.

10.3.2 На хорде астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, параллельной оси Ox , построен квадрат, сторона которого равна длине хорды и плоскость которого перпендикулярна к плоскости Oxy . Найти объём тела, образованного при движении плоскости квадрата, если определяющая её хорда перемещается по астройде.

10.3.3 Вычислить объёмы тел, образованных вращением вокруг оси Ox , фигур, ограниченными линиями, указанными в задачах 10.3.3.1–10.3.3.2.

10.3.3.1 $2y = x^2$, $y = -x + 3/2$. **10.3.3.2** $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$.

10.3.4 Вычислить объёмы тел, образованных вращением вокруг оси Oy , фигур, ограниченными линиями, указанными в задачах 10.3.4.1–10.3.4.2.

10.3.4.1 $2y = x^2 + 4x + 4$, $y = 2$. **10.3.4.2** $y = a \sin 2t$, $x = a \cos t$, $t = \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

10.3.5 Вычислить площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси Ox , дуг кривых, которые указаны в задачах 10.3.5.1 – 10.3.5.2.

10.3.5.1 $y = \operatorname{ch} x$ от $x=0$ до $x=\ln 2$. **10.3.5.2** $y = x^3$ от $x=0$ до $x=\ln 2$.

10.3.6 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$ между точками её пересечения с осью Ox .

10.3.7 Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $x = 3\cos t - \cos 3t$, $y = 3\sin t - \sin 3t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, вокруг оси Ox .

10.3.8 Найти площадь поверхности, образованной вращением окружности $r = 2\sin \varphi$ вокруг полярной оси.

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными графиками функций вокруг заданной оси. В вариантах 1-15 осью вращения является ось абсцисс, а в вариантах 16-30 осью вращения является ось ординат.

10.4.1.1 $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$.

10.4.1.2 $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$.

10.4.1.3 $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

10.4.1.4 $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$.

10.4.1.5 $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{y-2}$.

10.4.1.6 $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

10.4.1.7 $y = x^2$, $y^2 - x = 0$.

10.4.1.8 $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

10.4.1.9 $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$.

10.4.1.10 $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

10.4.1.11 $x = \sqrt[3]{y-2}$, $x = 1$, $y = 1$.

10.4.1.12 $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.

10.4.1.13 $2x - x^2 - y = 0$, $2x^2 - 4x + y = 0$.

10.4.1.14 $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

10.4.1.15 $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x \geq 0$.

10.4.1.16 $y = (x-1)^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

10.4.1.17 $y = x^3$, $y = x$.

10.4.1.18 $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$.

10.4.1.19 $y = x^3$, $y = x^2$.

10.4.1.20 $y^2 = x - 2$, $y = 0$, $y = x^3$, $y = 1$.

10.4.1.21 $y = (x-1)^2$, $y = 1$.

10.4.1.22 $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$.

10.4.1.23 $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0,5$.

10.4.1.24 $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

10.4.1.25 $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

10.4.1.26 $x^2/9 + y^2/4 = 1$.

10.4.1.27 $y = x^2$, $8x = y^2$.

10.4.1.28 $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

10.4.1.29 $y = 2 - x^2/2$, $x + y = 2$.

10.4.1.30 $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.

11 МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Содержание: вычисление пути, пройденного материальной точкой с непрерывно меняющейся скоростью, работа переменной силы, работа электро-

двигателя переменной мощности, вычисление силы давления жидкости на пластину, моменты и центры масс плоских кривых, моменты и центры масс плоских фигур.

11.1 Теоретический материал по теме практического занятия

11.1.1 Вычисление пути пройденной материальной точкой с непрерывно меняющейся скоростью

Пусть материальная точка движется прямолинейно вдоль числовой оси с непрерывно меняющейся скоростью $v = v(t)$ в промежутке времени $[t_0; T]$.

Путь $S = S(t)$, пройденный материальной точкой, выражается формулой

$$S = \int_{t_0}^T v(t) dt. \quad (11.1.2.1)$$

11.1.2 Вычисление работы переменной силы

Предположим, что материальная точка движется по прямой под действием переменной силы $\vec{F}(x)$. Работа переменной силы на прямолинейном пути от точки a до точки b вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (11.1.2.1)$$

11.1.3 Вычисление работы электродвигателя переменной мощности

Работа электродвигателя переменной мощности $N(t)$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$ определяется по формуле

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt. \quad (11.1.3.1)$$

11.1.4 Вычисление силы давления на пластину

Пусть пластина, имеющая вид криволинейной трапеции, погружена вертикально в жидкость, плотность которой равна ρ . Определим силу давления жидкости на пластину.

Если пластина площадью S находится в горизонтальном положении, то сила давления F жидкости на пластину будет равна весу столба жидкости, основанием которого является данная пластина, а высотой – глубина h , то есть

$$F = \rho ghS$$

Если же пластина погружена в жидкость вертикально, то сила давления изменяется с глубиной погружения. Будем учитывать, что по закону Паскаля давление в жидкости передаётся одинаково по всем направлениям.

Пусть уравнение кривой AB имеет вид $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a; b]$. Для нахождения силы давления будем использовать алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определённом интегралу.

Сила давления жидкости на пластину вычисляется по формуле

$$F = \int_a^b \rho g x f(x) dx. \quad (11.1.4.1)$$

11.1.5 Моменты и центры масс плоских кривых

Для вывода формул используется алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определённом интегралу.

Пусть дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ и имеет плотность $\rho = \rho(x)$.

Статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (11.1.5.1)$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (11.1.5.2)$$

Моменты инерции этой дуги I_x и I_y относительно координатных осей Ox и Oy равны

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (11.1.5.3)$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (11.1.5.4)$$

Координаты центра масс дуги x_c и y_c вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (11.1.5.5)$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (11.1.5.6)$$

где $m = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ – масса дуги.

Если плотность $\rho = 1$, то

$$y_c = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \text{ или } l \cdot 2\pi y_c = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Теорема 11.1.5.1 (Гульдена) Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и её не пересекающей, равна произведению длины дуги кривой на длину окружности, описываемой её центром масс.

11.1.6 Моменты и центры масс плоских фигур

Для вывода формул используется алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определённом интегралу.

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и имеющую плотность $\rho = \rho(x)$.

Статические моменты этой фигуры M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy равны

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx, \quad M_y = \int_a^b \rho(x) x f(x) dx. \quad (11.1.6.1)$$

Моменты инерции этой дуги I_x , I_y и I_o относительно координатных осей Ox , Oy и начала координат равны

$$I_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho(x) f^3(x) dx, \quad I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 f(x) dx, \quad (11.1.6.2)$$

$$I_o = I_x + I_y. \quad (11.1.6.3)$$

Координаты центра масс дуги x_c и y_c вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}, \quad (11.1.6.4)$$

где $m = \int_a^b \rho(x) f(x) dx$ – масса пластины.

Если плотность $\rho = 1$, то

$$y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b f^2(x) dx \text{ или } S \cdot 2y_c = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Теорема 11.1.6.1 (Гульдена) Объём тела, образованной вращением фигуры вокруг оси той же плоскости и не пересекающей эту фигуру, равен произведению площади данной фигуры на длину окружности, описываемой её центром масс при указанном вращении.

11.2 Примеры решения типовых задач

11.2.1 Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 4 + 2t + 3t^2$ (м /с). Найти путь, пройденный телом за три секунды от начала движения.

Решение. Воспользуемся формулой (11.1.2.1)

$$S = \int_0^3 (4 + 2t + 3t^2) dt = \left(4t + t^2 + t^3 \right) \Big|_0^3 = 48 \text{ (м)}.$$

11.2.2 Вычислить работу, затраченную на растяжение пружины на 0,1 м, если известно, что для удлинения её на 0,05 м необходимо приложить силу в 2 Н.

Решение. По закону Гука $F(x) = k \cdot x$.

Исходя из условия $2 = k \cdot 0,05$ или $k = 40$. Следовательно, $F(x) = 40 \cdot x$.
Вычислим работу переменной силы по формуле (11.1.2.2):

$$A = \int_0^{0,1} 40x \, dx = 20x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,2 \text{ (Дж)}.$$

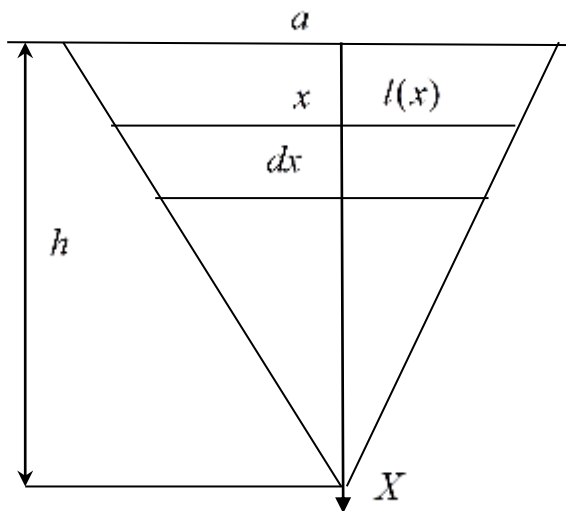
11.2.3 Вычислить работу и среднюю мощность переменного тока за промежуток времени $[0; 2\pi/\omega]$, если сила тока определяется формулой $I = I_0 \sin \omega t$, где I_0 – максимальное значение тока; ω – круговая частота; t – время, а сопротивление цепи равно R .

Решение. Мощность тока определим по формуле: $N = I^2 R$. Воспользуемся формулой (11.1.3.1). Тогда работа переменного тока равна

$$A = I_0^2 R \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t \, dt = \frac{I_0^2 R}{2} \int_0^{2\pi/\omega} (1 - \cos 2\omega t) \, dt = \frac{I_0^2 R \pi}{\omega}.$$

Средняя мощность переменного тока равна $N_{cp} = \frac{A}{2\pi/\omega} = \frac{I_0^2 R}{2}$.

11.2.4 Вычислить силу давления жидкости плотности ρ на пластину треугольной формы с основанием a и высотой h , верхнее основание которой расположено на уровне жидкости (рис. 11.2.4.1).



Решение. Воспользуемся законом Паскаля и формулой (11.1.4.1).

Сила давления равна

$$F = \int_a^h \rho g x l(x) \, dx$$

Из подобия треугольников:

$$\frac{l(x)}{a} = \frac{h-x}{h} \text{ или } l(x) = \frac{a}{h}(h-x).$$

Рисунок 11.2.4.1 – Давление на пластину

Откуда,

$$F = \frac{\rho g a}{h} \int_a^h x(h-x) \, dx = \frac{\rho g a}{h} \left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^h = \frac{\rho g a h^2}{6}.$$

11.2.5 Найти статический момент цепной линии $y = \operatorname{ch} x$, где $0 \leq x \leq 1$, относительно оси Ox .

Решение: Воспользуемся формулой (11.1.5.1):

$$M_x = \int_0^1 \operatorname{ch} x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \operatorname{ch} 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{2 + \operatorname{sh} 2}{4}.$$

11.3 Задания для решения на практическом занятии

11.3.1 Скорость точки задаётся формулой $v = \sqrt{1+t^2}$ м /с. Найти путь, пройденной точкой за первые 10 секунд после начала движения. Чему равна средняя скорость за этот промежуток времени?

11.3.2 Скорость движения точки $v = 0,1te^{-0,001t}$ (м /с). Найти путь, пройденной точкой от начала движения до полной остановки.

11.3.3 Найти кинетическую энергию однородного шара радиуса a и плотности ρ , который вращается вокруг его центра с угловой скоростью ω ?

11.3.4 Какую работу необходимо затратить, чтобы тело массой m поднять с поверхности Земли, радиус которой равен R , на высоту h ? Чему равна эта работа, если тело удаляется в бесконечность?

11.3.5 Какую работу необходимо затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила 1 Н растягивает её на 1 см?

11.3.6 Два электрических заряда $\varepsilon_1 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7}$ Кл и $\varepsilon_2 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7}$ Кл находятся на оси Ox соответственно в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ см. Какая работа будет произведена, если второй заряд переместится в точку $x_3 = 10$ см?

11.3.7 Котёл имеет форму параболоида вращения. Радиус основания равен r , глубина котла h . Котёл заполнен жидкостью с плотностью ρ . Найти работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать жидкость из котла?

11.3.8 Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой 10 м, имеющей в основании круг радиуса 5 м.

11.3.9 Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду из полусферического котла с радиусом 15 м.

11.3.10 Найти силу давления, который испытывает полукруг радиусом три метра, который погружён вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.

11.3.11 Найти силу давления воды на погружённую вертикально в неё пластину, которая имеет форму равнобедренного треугольника с основанием 24 метра и боковыми сторонами, равными 15 метрам, предполагая, что вершина этого треугольника лежит на свободной поверхности жидкости, а основание — параллельно ей.

11.3.12 Вертикальная пластина погружена в жидкость с плотностью $\rho = 1$. Пластина имеет форму трапеции с основаниями 15 и 5 м и высотой 4 м.

Найти силу давления жидкости на пластину, если верхнее основание трапеции совпадает с поверхностью жидкости.

11.3.13 Найти давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 3 см и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 9 см.

11.3.14 Вычислить статические моменты относительно осей координат дуги полуокружности с центром в начале координат и радиусом 5 метров.

11.3.15 Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ от $x = -2$ до $x = 2$.

11.3.16 Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей координат цепной линии $y = \operatorname{ch} 2x$, если $x \in [0; 1]$.

11.3.17 Найти статический момент синусоиды $y = \sin x$, которая расположена в первой и второй четвертях относительно оси абсцисс.

11.3.18 Найти декартовы координаты центра масс дуги кардиоиды $r = 1 + \cos \varphi$. Определить статический момент и момент инерции относительно оси абсцисс.

11.3.19 Найти статический момент и момент инерции относительно оси абсцисс первой арки циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

11.3.20 Пользуясь первой теоремой Гульдена, найти центр масс дуги астроида $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$, расположенной в первой четверти.

11.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

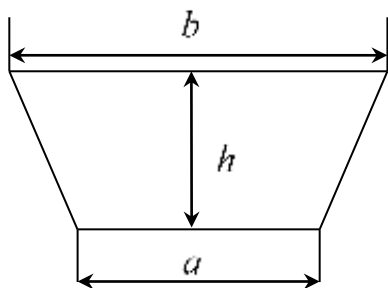


Рисунок 11.4.1.1 – Сечение плотины

11.4.1 Используя определенный интеграл, решить следующие задачи.

Задачи 11.4.1.1 – 11.4.1.10

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобокой трапеции (рис. 11.4.1.1). Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения g положить равным 10 м/с^2 .

Указание. Давление на глубине x равно $\rho g x$.

11.4.1.1 $a = 4.5 \text{ м}, b = 6.6 \text{ м}, h = 3.0 \text{ м}.$

11.4.1.3 $a = 5.1 \text{ м}, b = 7.8 \text{ м}, h = 3.0 \text{ м}.$

11.4.1.5 $a = 5.7 \text{ м}, b = 9.0 \text{ м}, h = 4.0 \text{ м}.$

11.4.1.7 $a = 6.3 \text{ м}, b = 10.2 \text{ м}, h = 4.0 \text{ м}.$

11.4.1.9 $a = 6.9 \text{ м}, b = 11.4 \text{ м}, h = 5.0 \text{ м}.$

11.4.1.2 $a = 4.8 \text{ м}, b = 7.2 \text{ м}, h = 3.0 \text{ м}.$

11.4.1.4 $a = 5.4 \text{ м}, b = 8.4 \text{ м}, h = 3.0 \text{ м}.$

11.4.1.6 $a = 6.0 \text{ м}, b = 9.6 \text{ м}, h = 4.0 \text{ м}.$

11.4.1.8 $a = 6.6 \text{ м}, b = 10.8 \text{ м}, h = 4.0 \text{ м}.$

11.4.1.10 $a = 7.2 \text{ м}, b = 12.0 \text{ м}, h = 5.0 \text{ м}.$

Задачи 11.4.1.11 – 11.4.1.20

Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту H км. Масса спутника равна m т, радиус Земли

$R_3 = 6380 \text{ км}$. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли положить равным 10 м/с^2 .

11.4.1.11 $m = 7.0 \text{ т.}, H = 200 \text{ км.}$

11.4.1.13 $m = 6.0 \text{ т.}, H = 300 \text{ км.}$

11.4.1.15 $m = 5.0 \text{ т.}, H = 400 \text{ км.}$

11.4.1.17 $m = 4.0 \text{ т.}, H = 500 \text{ км.}$

11.4.1.19 $m = 3.0 \text{ т.}, H = 600 \text{ км.}$

11.4.1.12 $m = 7.0 \text{ т.}, H = 250 \text{ км.}$

11.4.1.14 $m = 6.0 \text{ т.}, H = 350 \text{ км.}$

11.4.1.16 $m = 5.0 \text{ т.}, H = 450 \text{ км.}$

11.4.1.18 $m = 4.0 \text{ т.}, H = 550 \text{ км.}$

11.4.1.20 $m = 3.0 \text{ т.}, H = 650 \text{ км.}$

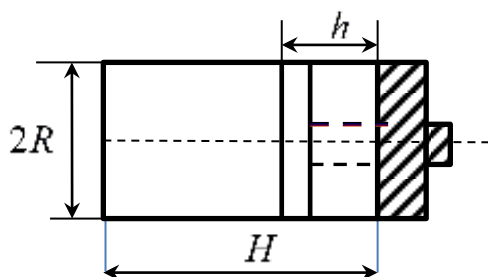


Рисунок 11.4.1.2 – Сжатие газа поршнем

Задачи 11.4.1.21 – 11.4.1.30

Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением $103,3 \text{ кПа}$. Считая газ идеальным, определить работу (в джоулях) при изотермическом сжатии газа поршнем, переместившимся внутрь цилиндра на $h \text{ м}$ (рис. 11.4.1.2).

Указание. Уравнение состояния газа $pV = \text{const}$, где p – давление, V – объем.

11.4.1.21 $H = 0.4 \text{ м}, h = 0.35 \text{ м}, R = 0.1 \text{ м.}$

11.4.1.23 $H = 0.4 \text{ м}, h = 0.2 \text{ м}, R = 0.1 \text{ м.}$

11.4.1.25 $H = 0.8 \text{ м}, h = 0.6 \text{ м}, R = 0.2 \text{ м.}$

11.4.1.27 $H = 1.6 \text{ м}, h = 1.4 \text{ м}, R = 0.3 \text{ м.}$

11.4.1.29 $H = 1.6 \text{ м}, h = 0.8 \text{ м}, R = 0.3 \text{ м.}$

11.4.1.22 $H = 0.4 \text{ м}, h = 0.3 \text{ м}, R = 0.1 \text{ м.}$

11.4.1.24 $H = 0.8 \text{ м}, h = 0.7 \text{ м}, R = 0.2 \text{ м.}$

11.4.1.26 $H = 0.8 \text{ м}, h = 0.4 \text{ м}, R = 0.2 \text{ м.}$

11.4.1.28 $H = 1.6 \text{ м}, h = 1.2 \text{ м}, R = 0.3 \text{ м.}$

11.4.1.30 $H = 2.0 \text{ м}, h = 1.5 \text{ м}, R = 0.4 \text{ м.}$

12 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Содержание: неопределённый интеграл и его методы интегрирования, интегрирование рациональных дробей, интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений, определённый интеграл и его методы интегрирования, несобственный интеграл, приложения определённого интеграла.

12.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Теоретический материал для выполнения контрольной работы приведён в практических занятиях разделов курса, рассмотренных выше

12.2 Примеры решения типовых задач

Примеры решения типовых задач для выполнения контрольной работы приведены в предыдущих разделах практикума.

12.3 Задания для решения на практическом занятии

12.3.1 Найти неопределённый интеграл.

В I $\int x \cdot 5^{x^2} \cdot 3^{x^2} dx.$

В II $\int x^2 \cdot 7^{x^3} \cdot 4^{x^2} dx.$

В III $\int \frac{\sin^4 7x}{\cos^2 7x} dx.$

В IV $\int \frac{\cos^4 9x}{\sin^2 9x} dx..$

В V $\int \frac{4x+6}{x^2+3x+5} dx.$

В VI $\int \frac{6x-15}{x^2-5x+9} dx.$

12.3.2 Найти неопределённый интеграл.

В I $\int \operatorname{arctg} x dx.$

В II $\int \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x dx.$

В III $\int \arcsin x dx.$

В IV $\int \arccos x dx.$

В V $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx.$

В VI $\int x \cdot \operatorname{arcctg} x dx.$

12.3.3 Найти неопределённый интеграл.

В I $\int \frac{x-2}{x^2-4x+3} dx.$

В II $\int \frac{x+1}{x^2+6x+8} dx.$

В III $\int \frac{x}{x^2+6x+13} dx.$

В IV $\int \frac{x}{x^2+4x+25} dx.$

В V $\int \frac{dx}{(x^2+1) \cdot (x-2)}.$

В VI $\int \frac{dx}{(x^2+4) \cdot (x+1)}.$

12.3.4 Найти неопределённый интеграл.

В I $\int \cos 5x \cdot \sin 3x dx.$

В II $\int \cos 6x \cdot \sin 2x dx.$

В III $\int \frac{dx}{1-\sin x}.$

В IV $\int \frac{dx}{2-\sin x}.$

В V $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}.$

В VI $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}.$

12.3.5 Найти неопределённый интеграл.

В I $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} dx.$

В II $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx.$

В III $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2\sqrt[3]{x+1}} dx.$

В IV $\int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx.$

В V $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}.$

В VI $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$

12.3.6 Вычислить определённый интеграл.

$$\text{В I} \quad \int_0^{\pi/3} (2x+1) \cdot e^{4x-3} dx.$$

$$\text{В II} \quad \int_0^e 2x \cdot \ln 3x dx.$$

$$\text{В III} \quad \int_0^{\pi/2} (2x+3) \cos 4x dx.$$

$$\text{В IV} \quad \int_0^{\pi/2} (3x+2) \cos 9x dx.$$

$$\text{В V} \quad \int_0^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx.$$

$$\text{В VI} \quad \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

12.3.7 Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\text{В I} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{4x^2+1}.$$

$$\text{В II} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}.$$

$$\text{В III} \quad \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}}.$$

$$\text{В IV} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^3+8}.$$

$$\text{В V} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

$$\text{В VI} \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x-3}.$$

12.3.8 Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

$$\text{В I} \quad y = x^2, y = 4 - 3x.$$

$$\text{В II} \quad y = x^2, y = 3 - 2x.$$

$$\text{В III} \quad r = \sin 3\varphi.$$

$$\text{В IV} \quad r = \sin 2\varphi.$$

$$\text{В V} \quad x = 6\cos^3 t, y = 6\sin^3 t.$$

$$\text{В VI} \quad x = 8\sin^3 t, y = 8\cos^3 t.$$

12.3.9 Вычислить длину дуги заданной линии.

$$\text{В I} \quad y = 3x^2, 0 \leq x \leq 2.$$

$$\text{В II} \quad y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{В III} \quad r = 2\sin \varphi.$$

$$\text{В IV} \quad r = 2\cos \varphi.$$

$$\text{В V} \quad x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t.$$

$$\text{В VI} \quad x = 4\sin^3 t, y = 4\cos^3 t$$

12.3.10 Вычислить объём тела вращения вокруг оси Ox фигуры ограниченной указанными линиями.

$$\text{В I} \quad y = x^2, x = y^2.$$

$$\text{В II} \quad x = y^3, x^3 = y.$$

$$\text{В III} \quad x = 2\cos t, y = \sqrt{3}\sin t.$$

$$\text{В IV} \quad x = \cos^3 t, y = \sin^3 t.$$

$$\text{В V} \quad y^2 = \frac{4}{3}x, x = 3.$$

$$\text{В VI} \quad x = 0, y^2 = (x+1)^3$$

12.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

Задания для контролируемой самостоятельной работы соответствуют заданиям предыдущего практического занятия.

13 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Содержание: арифметическое точечное пространство R^n , понятие функции нескольких переменных, предел и непрерывность функции нескольких переменных, дифференцирование функций нескольких переменных, предельная производительность факторов производства, предельная норма замещения двух факторов производства, частный коэффициент эластичности выпуска продукции.

13.1 Теоретический материал по теме практического занятия

В дифференциальном и интегральном исчислении функции нескольких переменных используется понятие n -мерного арифметического пространства.

Определение 13.1.1 Множество всех упорядоченных наборов $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ действительных чисел $x_1; x_2; \dots; x_n$ называется n -мерным арифметическим точечным пространством R^n , а его элементы – точками пространства R^n . Числа $x_1; x_2; \dots; x_n$ называются координатами точки $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Определение 13.1.2 Расстоянием ρ между точками $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $P'(x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$ n -мерного пространства называется число

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}. \quad (13.1.1)$$

Пусть $D \subset R^n$ – произвольное множество точек n -мерного арифметического пространства. Если каждой точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое, вполне определённое действительное число $f(P) = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция $f: R^n \rightarrow R$ от n переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$. Множество D называется областью определения, а множество $E = \{u \in R | u = f(P), P \in D\}$ – областью значений функции $u = f(P)$.

В частном случае $n = 2$ функция двух переменных $z = f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости трёхмерного геометрического пространства с фиксированной системой координат $Oxyz$. Графиком этой функции называется множество точек $\Gamma = \{(x, y, z) \in R^n | z = f(x, y)\}$.

Определение 13.1.3 Число A называется *пределом функции* $u = f(P)$ при стремлении точки $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ к точке $P_0(a_1; a_2; \dots; a_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

следует

$$|f(x_1; x_2; \dots; x_n) - A| < \delta.$$

При этом записывают

$$A = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Определение 13.1.4 Функция $u = f(P)$ называется *непрерывной* в точке P_0 , если выполняются следующие три условия:

- 1) функция $f(P)$ определена в точке P_0 ;
- 2) существует $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$;
- 3) $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области. Если в точке P_0 хотя бы одно из условий 1) – 3) нарушено, то точка P_0 называется точкой разрыва функции $u = f(P)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и так далее.

Рассмотрим произвольную фиксированную точку $P(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)$ из области определения функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$. Если придать переменной x_i приращение Δx_i , то функция также получит приращение $\Delta_{x_i} u = f(x_1; \dots; x_i + \Delta x_i; \dots; x_n) - f(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)$.

Определение 13.1.5 Частной производной функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$ в произвольно фиксированной точке $P(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)$ по переменной x_i называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x_i} u$ к соответствующему приращению аргумента Δx_i , при стремлении последнего к нулю, то есть

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1; \dots; x_i + \Delta x_i; \dots; x_n) - f(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)}{\Delta x_i}.$$

Обозначение: $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(x_1; \dots; x_n)$.

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме переменной x_i , считаются постоянными величинами.

Частными производными второго порядка функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка. Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''_{x_i x_i}(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j} (x_1; \dots; x_i; \dots; x_n).$$

Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Результат многократного дифференцирования по различным переменным не зависит от очерёдности дифференцирования при условии, что возникающие при этом «смешанные» частные производные непрерывны.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$. Частные производные первого и второго порядка от этой функции имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

13.2 Примеры решения типовых задач

13.2.1 Найти область определения функции $y = \arcsin(y/x)$

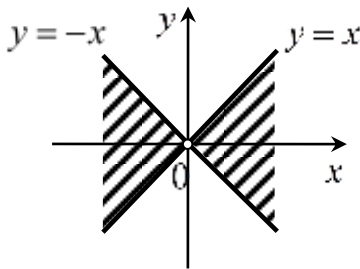


Рисунок 13.2.1.1 – Область определения функции

Решение: Функция $y = \arcsin(y/x)$

определена при $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$, $x \neq 0$. Следовательно, $-x \leq y \leq x$ при $x > 0$, и $x \leq y \leq -x$ при $x < 0$.

Область определения функции изображена на рисунке 13.2.1.1 и содержит границы области, за исключением начала координат.

13.2.2 Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{3}{x^2 + xy}}$

$$\text{Решение. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{3}{x^2 + xy}} = (1^\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy} \cdot \frac{3xy}{x^2 + xy}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{3y}{x+y}} = e^3.$$

13.2.3 Найти точки разрыва функции $u = \frac{x + y + z}{3x + 2y - z - 4}$.

Решение. Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Поэтому она имеет поверхность разрыва – плоскость $3x + 2y - z - 4 = 0$.

13.2.4 Найти частные производные первого и второго порядков от функции $z = x^5 + y^5 - x^3 y^3$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:
 $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^5 + y^5 - x^3 y^3)'_x = 5x^4 - 3x^2 y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^5 + y^5 - x^3 y^3)'_y = 5y^4 - 3x^3 y^2$. Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (5x^4 - 3x^2 y^3)'_x = 20x^3 - 6xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (5x^4 - 3x^2 y^3)'_y = -9x^2 y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (5y^4 - 3x^3 y^2)'_y = 20y^3 - 6x^3 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (5y^4 - 3x^3 y^2)'_x = -9x^2 y^2.$$

13.2.5 Имеется производственная функция $z = 6x^3 - x^2 y^2 + 5y^3$, где x – затраты живого труда, а y – затраты овеществлённого труда. Найти частные коэффициенты эластичности выпуска продукции по заданным факторам при значениях $x = 1$, $y = 2$.

Решение. Находим частные производные от производственной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2 - 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 15y^2 - 2x^2 y. \text{ Тогда частные коэффициенты эластичности}$$

выпуска продукции по заданным факторам равны: $\varepsilon_x = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{18x^3 - 2x^2 y^2}{6x^3 - x^2 y^2 + 5y^3}$,

$$\varepsilon_y = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{15y^3 - 2x^2 y^2}{6x^3 - x^2 y^2 + 5y^3}. \text{ Найдём значения коэффициентов при } x = 1, y = 2:$$

$\varepsilon_x(1; 2) \approx 0,24$, $\varepsilon_y(1; 2) \approx 2,67$. Таким образом, с увеличением затрат живого труда на 1 % объём производства возрастет на 0,24 %, а с увеличением затрат овеществлённого труда на 1 % объём производства увеличится на 2,67 %.

13.3 Задания для решения на практическом занятии

13.3.1 Найти области определения функций двух переменных.

$$13.3.1.1 \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \quad 13.3.1.2 \quad \arccos \frac{x}{y}. \quad 13.3.1.3 \quad z = \ln(x - y).$$

13.3.2 Вычислить пределы

$$13.3.2.1 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + y^2)^{\frac{4x^2 + x}{xy^2}}. \quad 13.3.2.2 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}. \quad 13.3.2.3 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy^2 - 4x}{x}.$$

13.3.3 Найти частные производные первого и второго порядков функций, заданных в задачах 13.3.3.1–13.3.3.6. В задаче 13.3.3.1 найти значения частных производных в точке $M_0(4; 3)$.

$$13.3.3.1 \quad z = x + y^4 - x^5 y^5. \quad 13.3.3.2 \quad z = xy - \frac{y}{x}. \quad 13.3.3.3 \quad z = e^{2x} \cos 5y.$$

$$13.3.3.4 \quad z = \ln(x^2 + y^2). \quad 13.3.3.5 \quad z = \cos(x^2 y^2) \quad 13.3.3.6 \quad z = x^y.$$

$$13.3.4 \text{ Показать, что } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \text{ если } z = x \sin(ax + by).$$

$$13.3.5 \text{ Показать, что } y \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ если } z = \ln(x^2 + y^2).$$

13.3.6 Имеется производственная функция $z = 3x^4 - x^3 y^2 + 5y^2$, где x – затраты живого труда, а y – затраты овеществлённого труда. Найдите частные коэффициенты эластичности выпуска продукции по заданным факторам при значениях $x=3$, $y=2$.

13.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

13.4.1 Найти частные производные первого и второго порядков для функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(3; 2)$.

$$13.4.1.1 \quad z = x^5 - x^3 y^4 + y^6.$$

$$13.4.1.2 \quad z = x - x^3 y^4 + y^6.$$

$$13.4.1.3 \quad z = x^5 - xy^4.$$

$$13.4.1.4 \quad z = x^6 + x^7 y^5 - y^4.$$

$$13.4.1.5 \quad z = x^5 + x^2 y^3 - y.$$

$$13.4.1.6 \quad z = x^9 - x^3 y.$$

$$13.4.1.7 \quad z = x^4 - x^3 y^2 + y^3.$$

$$13.4.1.8 \quad z = x + x^4 y^3 + y^7.$$

$$13.4.1.9 \quad z = x^6 + x^3 y.$$

$$13.4.1.10 \quad z = x^4 + x^6 y^5 - y^2.$$

$$13.4.1.11 \quad z = x - xy^5 + y^4.$$

$$13.4.1.12 \quad z = xy^3 + y^4.$$

$$13.4.1.13 \quad z = x^3 - x^2 y^3 + y^4.$$

$$13.4.1.14 \quad z = x^7 - x^3 y^2 - y.$$

$$13.4.1.15 \quad z = x^5 - x^3 y.$$

$$13.4.1.16 \quad z = x^6 + x^5 y^2 + y^5.$$

$$13.4.1.17 \quad z = x - x^2 y^3 + y^5.$$

$$13.4.1.18 \quad z = x^2 y + y^3.$$

$$13.4.1.19 \quad z = x^2 - x^2 y^3 + y^4.$$

$$13.4.1.20 \quad z = x^4 + x^5 y^2 + y.$$

$$13.4.1.21 \quad z = xy^5 - y^3.$$

$$13.4.1.22 \quad z = x^4 + x^6 y^3 - y^4.$$

$$13.4.1.23 \quad z = x - x^3 y^4 + y^5.$$

$$13.4.1.24 \quad z = x^2 + xy^7.$$

$$13.4.1.25 \quad z = x^4 - x^5 y^5 + y^4.$$

$$13.4.1.26 \quad z = x^4 + x^5 y^2 - y.$$

$$13.4.1.27 \quad z = 4x^4 + y^5.$$

$$13.4.1.28 \quad z = x^6 + x^5 y^5 + y^2.$$

$$13.4.1.29 \quad z = x + x^5 y^6 + y^4.$$

$$13.4.1.30 \quad z = xy^3 + y^2.$$

14 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Содержание: производные функции, заданной неявно, уравнения касательной и нормали к поверхности, полный дифференциал функции и его применение.

14.1 Теоретический материал по теме практического занятия

14.1.1 Неявные функции одной и нескольких независимых переменных. Геометрические приложения частных производных

Пусть уравнение $f(x; y) = 0$, где f – дифференцируемая функция переменных x и y , определяет y как функцию от переменной x . Тогда первая производная этой неявной функции $y = y(x)$ в точке x определяется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x; y)}{f'_y(x; y)} \quad (14.1.1.1)$$

при условии $f'_y(x; y) \neq 0$. Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием формулы (14.1.1.1).

Пусть уравнение $F(x_1; \dots; x_n; u) = 0$, где F – дифференцируемая функция переменных $x_1, \dots, x_n, u$, определяет u как функцию от переменных $x_1, \dots, x_n$. Частные производные этой неявной функции $u = u(x_1; \dots; x_n)$ в точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определяются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1; \dots; x_n; u)}{F'_u(x_1; \dots; x_n; u)} \quad (i = \overline{1; n}) \quad (14.1.1.2)$$

при условии $F'_u(x_1; \dots; x_n; u) \neq 0$. Частные производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием формул (14.1.1.2).

Определение 14.1.1.1 Касательной плоскостью к поверхности в её точке P_0 (точка касания) называется плоскость, содержащая все касательные к кривым, проведённым на поверхности через эту точку.

Определение 14.1.1.2 Нормалью к поверхности в её точке P_0 называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (14.1.1.3)$$

Уравнение нормали

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (14.1.1.4)$$

В случае задания поверхности в явной форме $z = f(x; y)$, уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) (y - y_0), \quad (14.1.1.5)$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (14.1.1.6)$$

14.1.2 Полный дифференциал функции и его применение

Полным приращением функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ называется разность $\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2; \dots; x_n + \Delta x_n) - f(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Определение 9.1.2.1 Функция $u = f(P)$ называется дифференцируемой в точке $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$, если всюду в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$, $A_1, A_2, \dots, A_n$ – некоторые действительные числа, не зависящие от приращений аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Определение 14.1.2.2 Полным дифференциалом функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в точке $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется главная линейная часть полного приращения функции в рассматриваемой точке, которая линейна относительно приращений аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, то есть выражение вида

$$du = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n.$$

Дифференциалы независимых переменных по определению принимаются равными их приращению ($dx_i = \Delta x_i$, $i = \overline{1; n}$), а значения действительных чисел A_i равны значению частных производных в рассматриваемой точке ($A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$).

Тогда для полного дифференциала функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ справедлива формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot dx_n. \quad (14.1.2.1)$$

Функции u и v подчиняются обычным правилам дифференцирования: $d(u + v) = du + dv$, $d(uv) = vdu + u dv$, $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$.

Полный дифференциал находит широкое применение в приближённых вычислениях. При достаточно малом значении $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ для

дифференцируемой функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ имеет место приближённое равенство $\Delta u \approx du$. Следовательно, справедлива приближённая формула

$$f(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2; \dots; x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1; x_2; \dots; x_n) + df(x_1; x_2; \dots; x_n). \quad (14.1.2.2)$$

Определение 14.1.2.3 Дифференциалом второго порядка d^2u функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется дифференциал от её дифференциала первого порядка, рассматриваемого как функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ при фиксированных значениях $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$: $d^2u = d(du)$.

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка: $d^3u = d(d^2u)$, $d^4u = d(d^3u)$, ..., $d^ku = d(d^{k-1}u)$.

Дифференциал k -го порядка функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – независимые переменные, выражается символической формулой

$$d^ku = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k u. \quad (14.1.2.2)$$

Записанная формула формально раскрывается по биномиальному закону.

Например, в случае функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y для дифференциалов второго и третьего порядков справедливы формулы

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2, \quad (14.1.2.3)$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \quad (14.1.2.4)$$

14.2 Примеры решения типовых задач

14.2.1 Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через функцию $f(x, y)$. Тогда $f'_x(x, y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$, $f'_y(x, y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$.

По формуле (14.1.1.2) получаем $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x; y)}{f'_y(x; y)} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}$. Диффе-

ренцируем вторично, учитывая, что y есть функция от переменной x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{y}{x} \right) = -\frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = -\frac{y - x \left(-\frac{y}{x} \right)}{x^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

14.2.2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + 3z^3 - 4xyz - 3 = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через функцию $F(x, y, z)$. Тогда $F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 4yz$, $F'_y(x, y, z) = 6y^2 - 4xz$, $F'_z(x, y, z) = 9z^2 - 4xy$.

По формуле (14.1.1.2) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{4yz - 3x^2}{9z^2 - 4xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{4xz - 6y^2}{9z^2 - 4xy}.$$

14.2.3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, 2, 5)$.

Решение. Находим частные функции в заданной точке $M_0(1, 2, 5)$: $z'_x(1, 2) = 2x|_{x=1, y=2} = 2$, $z'_y(1, 2) = 2y|_{x=1, y=2} = 4$. По формуле (14.1.1.5) уравнение касательной плоскости имеет вид $z - 5 = 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2)$ или $2x + 4y - z - 5 = 0$.

По формуле (14.1.1.6) находим уравнение нормали: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

14.2.4 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точке $M_0(2, 3, 6)$.

Решение. Обозначим через $F(x, y, z)$ левую часть уравнения сферы. Находим значения частных производных функции $F(x, y, z)$ в точке $M_0(2, 3, 6)$: $F'_x(M_0) = 2x|_{x=2, y=3, z=6} = 4$, $F'_y(M_0) = 2y|_{x=2, y=3, z=6} = 6$, $F'_z(M_0) = 2z|_{x=2, y=3, z=6} = 12$.

По формуле (14.1.1.3) уравнение касательной плоскости имеет вид $4 \cdot (x - 2) + 6 \cdot (y - 3) + 12 \cdot (z - 6) = 0$ или $2x + 3y + 6z - 49 = 0$. По формуле (14.1.1.4) находим уравнение нормали: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-6}{6}$.

14.2.5 Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = y^3 e^{2x}$.

Решение. Найдём частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^3 e^{2x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4y^3 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y^2 e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6ye^{2x}.$$

По формулам (14.1.2.1) и (14.1.2.3) имеем

$$dz = 2y^3 e^{2x} dx + 3y^2 e^{2x} dy, \quad d^2 z = 4y^3 e^{2x} dx^2 + 12y^2 e^{2x} dx dy + 6ye^{2x} dy^2.$$

14.2.6 Вычислить приближённо $\sqrt{(3,97)^2 + (3,02)^2}$.

Решение. Заданное число будем рассматривать как значение функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, при значениях $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, если $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = -0,03$, $\Delta y = 0,02$. Имеем

$$f(4,3)=5, \Delta f(x,y) \approx df(x,y) = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \Delta f(x_0,y_0) = \frac{-4 \cdot 0,03 + 3 \cdot 0,02}{\sqrt{4^2+3^2}} = -0,012$$

Следовательно, $\sqrt{(3,97)^2 + (3,02)^2} \approx 5 - 0,012 = 4,988$.

14.3 Задания для решения на практическом занятии

14.3.1 Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x + y - e^{y-x} = 0$.

14.3.2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^4 - 3y^2 + 2z^3 - 5xyz + 7 = 0$.

14.3.3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin x \cos y$ в точке $M_0(\pi/4, \pi/4, 1/2)$.

14.3.4 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллипсоиду $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$ в точке $M_0(3, 2, 3\sqrt{2}/2)$.

14.3.5 Найти дифференциалы первого и второго порядков для заданных функций: а) $z = y^3 - 2x^2y^4 + x^4$; б) $z = x/y - y/x$; в) $z = x \ln(y/x)$.

14.3.6 Используя понятие полного дифференциала, вычислить приближённо значения числовых выражений: а) $\sqrt{(1,05)^3 + (1,96)^3}$; б) $\sin 32^\circ \cos 59^\circ$.

14.3.7 Период T колебания маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где l – длина маятника, g – ускорение силы тяжести. Найти ошибку в определении T , которая получается в результате небольших ошибок $\Delta l = \alpha$ и $\Delta g = \beta$ при измерениях длины маятника и ускорения силы тяжести.

14.3.8 Одна сторона прямоугольника равна шести метрам, а другая равна восьми метрам. Как изменится диагональ прямоугольника, если первую сторону увеличить на четыре сантиметра, а другую сторону – на два сантиметра?

14.3.9 К эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, которые были бы параллельны плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

14.3.10 На сфере $(x-1)^2 + y^2 - z^2 = 1$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости Oxz .

14.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

14.4.1 Используя понятие полного дифференциала вычислить приближённое значение заданного числового выражения. Найти дифференциалы первого и второго порядка для функции $z = f(x, y)$, которую надо составить для вычисления значения данного числового выражения. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$, которая была выбрана для вычисления значения функции, в точке $P_0(x_0, y_0)$.

14.4.1.1 $\sqrt{(2,9)^2 + (4,1)^2}$.

14.4.1.2 $\sin 32^\circ \cos 55^\circ$.

14.4.1.3	$3,01^{4,98}$.	14.4.1.4	$\ln(1,03 \cdot 0,97)$.
14.4.1.5	$\cos 58^0 \sin 29^0$.	14.4.1.6	$\operatorname{tg} 43^0 \operatorname{ctg} 46^0$.
14.4.1.7	$(3,05)^3 + (6,98)^2$.	14.4.1.8	$\sqrt[3]{(0,8)^3 + (2,1)^3}$.
14.4.1.9	$\operatorname{arctg}(0,96 \cdot 1,02)$.	14.4.1.10	$3,95^{-3,03}$.
14.4.1.11	$\sqrt{(6,1)^2 + (7,9)^2}$.	14.4.1.12	$\sqrt{(1,1)^3 + (1,9)^3}$.
14.4.1.13	$1,96^{5,04}$.	14.4.1.14	$e^{1,03^2 + 2,99^2}$.
14.4.1.15	$\cos 56^0 \sin 31^0$.	14.4.1.16	$(2,03)^3 (3,98)^2$.
14.4.1.17	$(4,03)^3 + (2,95)^2$.	14.4.1.18	$(5,05)^3 - (1,9)^4$.
14.4.1.19	$\operatorname{arctg}(0,98 \cdot 1,01)$.	14.4.1.20	$\operatorname{ch} 0,1 \cdot \operatorname{sh} 0,2$.
14.4.1.21	$\sin 28^0 \cos 59^0$.	14.4.1.22	$\sqrt{(0,8)^3 + (1,8)^3}$.
14.4.1.23	$\ln(1,02 \cdot 0,98)$.	14.4.1.24	$e^{1,04^2 + 2,96^2}$.
14.4.1.25	$\operatorname{tg} 44^0 \operatorname{ctg} 47^0$.	14.4.1.26	$(3,04)^3 (5,97)^2$.
14.4.1.27	$\sqrt[3]{(0,9)^3 + (2,2)^3}$.	14.4.1.28	$(6,2)^4 - (2,9)^4$.
14.4.1.29	$4,99^{-3,02}$.	14.4.1.30	$\operatorname{ch} 0,2 \cdot \operatorname{sh} 0,1$.

15 ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Содержание: локальный экстремум функции двух переменных.

15.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим понятие локального экстремума функции двух переменных, как частного случая функции нескольких переменных.

Определение 15.1.1 Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ *локальный максимум (локальный минимум)*, если существует такая окрестность точки P_0 , что для всех точек $P(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(P_0) \geq f(P)$ ($f(P_0) \leq f(P)$).

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*.

Теорема 15.1.1 Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ локальный экстремум, то в этой точке частные производные равны нулю, то есть $\frac{\partial z(P_0)}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z(P_0)}{\partial y} = 0$.

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными*.

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$, причём эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все вторые частные производные непрерывны в точке P_0 . Введём обозначения:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Вычисляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда:

- 1) если $\Delta > 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум, а именно – максимум при значении $A < 0$ ($C < 0$) и минимум при значении $A > 0$ ($C > 0$);
- 2) если $\Delta < 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;
- 3) если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

15.2 Примеры решения типовых задач

15.2.1 Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Находим частные производные первого порядка и составляем систему $z'_x = 3x^2 - 3y = 0$, $z'_y = 3y^2 - 3x = 0$. Решая полученную систему, найдём две стационарные точки $M_0(0, 0)$ и $M_1(1, 1)$. Найдём частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{yy} = 6y$. Составляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \text{ для каждой стационарной точки.}$$

Для точки $M_0(0, 0)$ определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$, следовательно, в этой точке экстремума нет. Для точки $M_1(1, 1)$ определитель равен $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$, следовательно, в этой точке экстремум есть. Так как $A = 6 > 0$, то в точке M_1 функция достигает минимума, причём $z_{\min} = z(1, 1) = -1$.

15.2.2 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны 6 и 9 условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описываются функцией $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При каких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия.

Решение. Пусть x и y – количество товаров двух видов, их цены – соответственно p_1 и p_2 . Затраты на производство этих товаров являются дифференцируемой функцией издержек $C = C(x, y)$. Тогда функция прибыли имеет вид:

$$\Pi = \Pi(x, y) = p_1x + p_2y - C(x, y).$$

В условиях данной задачи прибыль предприятия будет выражаться функцией $\Pi(x, y) = 6x + 9y - x^2 - xy - y^2$. Так как в данном случае частные производные от функции прибыли всегда существуют, то для нахождения стационарных точек получаем систему уравнений: $\Pi'_x = 6 - 2x - y = 0$, $\Pi'_y = 9 - x - 2y = 0$. Решением этой системы является точка $P_0(1; 4)$.

Находим частные производные второго порядка от функции прибыли в стационарной точке: $A = \Pi''_{xx}(1, 4) = -2$, $B = \Pi''_{xy}(1, 4) = -1$, $C = \Pi''_{yy}(1, 4) = -2$.

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ и $A = -2 < 0$, то найденная точка $P_0(1; 4)$ является точкой максимума функции прибыли $\Pi(x, y)$, а максимальная прибыль предприятия равна $\Pi_{\max} = \Pi(1, 4) = 6 \cdot 1 + 9 \cdot 4 - 1^2 - 1 \cdot 4 - 4^2 = 21$ у.е.

15.3 Задания для решения на практическом занятии

15.3.1 Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 111x - 36y$.

15.3.2 Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - x\sqrt{y} - 9x + y + 5$.

15.3.3 Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

15.3.4 Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

15.3.5 Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, при $x > 0$, $y > 0$.

15.3.6 Некоторое предприятие производит два вида товаров, цены на которые равны 140 и 200 условных единиц, соответственно. Затраты на производство этих товаров описывается функцией $C(x, y) = 3x^2 + 4xy + 4y^2$, где x – объём выпуска товаров первого вида, y – объём выпуска товаров второго вида. При каких объёмах выпуска товаров прибыль будет наибольшей. Найти максимальную прибыль предприятия.

15.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

15.4.1 Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

15.4.1.1 $z = x^3 + y^2x - 3xy$.

15.4.1.2 $z = y^3 + x^2y - 3yx$.

15.4.1.3 $z = 12y^3 + 18x^3 - 2yx$.

15.4.1.4 $z = 18y^3 + 12x^3 - 2yx$.

15.4.1.5 $z = 8y^3 + x^3 - 6yx - 9$.

15.4.1.6 $z = 2y^3 + 2x^3 - 6yx - 4$.

15.4.1.7 $z = 3y^3 + 3x^3 - 9yx + 9$.

15.4.1.8 $z = y^3 + 3x^2y - 15y - 12x$.

15.4.1.9 $z = y^2 + x^2 + yx + x - y + 2$.

15.4.1.10 $z = -2y^2 - 3x^2 + 2yx - 5$.

15.4.1.11 $z = 8x - 8y - y^2 - x^2 - 7$.

15.4.1.12 $z = 2xy - \frac{2}{3}x^3 - y^2 - 12$.

$$15.4.1.13 \quad z = -y^4 - x^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4yx + 2.$$

$$15.4.1.14 \quad z = y^3 + x^3 - 6yx + 1.$$

$$15.4.1.15 \quad z = y^2 + x^2 - 2x + 4y + 3.$$

$$15.4.1.16 \quad z = x^2y + xy^2 - yx + 4.$$

$$15.4.1.17 \quad z = y^2 + x^2 + yx - 13x - 11y + 5.$$

$$15.4.1.18 \quad z = y^3 + x^3 + 6yx - 2.$$

$$15.4.1.19 \quad z = x^3 - y^2 - 7x^2 + yx + 9x + 3y - 9.$$

$$15.4.1.20 \quad z = 2x^3 + 2y^3 - 14xy + 5.$$

$$15.4.1.21 \quad z = y^3 - x^2 - 7y^2 + xy + 9y + 3x + 5.$$

$$15.4.1.22 \quad z = 7 - 6y^2 - 10x^2 + 4yx.$$

$$15.4.1.23 \quad z = 5 - 2x\sqrt{y} + 2x^2 + 2y - 12x.$$

$$15.4.1.24 \quad z = 9xy - 3y^3 - 3x^2y.$$

$$15.4.1.25 \quad z = 3 + 2x^2y + 2y^2x - 24xy.$$

$$15.4.1.26 \quad z = 3y^3 + 3x^3 + 18yx - 7.$$

$$15.4.1.27 \quad z = 3y^2 + 3x^2 - 6x + 12y - 1.$$

$$15.4.1.28 \quad z = 2xy - x^3 - y^2x.$$

$$15.4.1.29 \quad z = 4 - 3y\sqrt{x} + 3y^2 + 3x - 18y.$$

$$15.4.1.30 \quad z = y^3 + x^3 + 9yx$$

16 УСЛОВНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Содержание: Условный экстремум функции нескольких переменных, наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

16.1 Теоретический материал по теме практического занятия

16.1.1 Условный экстремум функции нескольких переменных

Рассмотрим понятие условного экстремума функции двух переменных, как частного случая функции нескольких переменных.

Функция $z = f(x; y)$ имеет *условный максимум (условный минимум)* в точке $P_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность точки P_0 , что для всех точек P из окрестности точки P_0 , удовлетворяющих уравнению связи $\varphi(x; y) = 0$, выполняется неравенство

$$f(P) \leq f(P_0) \text{ (соответственно } f(P) \geq f(P_0)).$$

Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум *функции Лагранжа*:

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y). \quad (16.1.1.1)$$

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой трёх уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x; y) = 0. \quad (16.1.1.2)$$

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ и λ_0 являются решением системы (16.1.1.2)

Достаточное условие экстремума связано с изучением знака определителя

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(x_0; y_0) & \varphi'_y(x_0; y_0) \\ \varphi'_x(x_0; y_0) & L''_{xx}(x_0; y_0; \lambda_0) & L''_{xy}(x_0; y_0; \lambda_0) \\ \varphi'_y(x_0; y_0) & L''_{xy}(x_0; y_0; \lambda_0) & L''_{yy}(x_0; y_0; \lambda_0) \end{vmatrix}. \quad (16.1.1.3)$$

1) Если $\Delta > 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x; y)$ имеет условный минимум;

2) если $\Delta < 0$, то в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x; y)$ имеет условный максимум;

3) если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

16.1.2 Глобальный экстремум функции нескольких переменных

Если функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема и ограничена в замкнутой области G , то она достигает глобального экстремума (наибольшего $\max_G f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и наименьшего $\min_G f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ значения) либо в стационарных точках, принадлежащих области, либо на границе области.

16.2 Примеры решения типовых задач

16.2.1 Найти условный экстремум функции $z = xy^2$ при выполнении уравнения связи $x + 2y = 1$.

Решение. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = xy^2 + \lambda \cdot (x + 2y - 1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (xy^2 + \lambda \cdot (x + 2y - 1))'_x = y^2 + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = (xy^2 + \lambda \cdot (x + 2y - 1))'_y = 2xy + 2\lambda.$$

$$\text{Система уравнений (16.1.1.2) принимает вид: } \begin{cases} y^2 + \lambda = 0, \\ 2xy + 2\lambda = 0, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x_1 = 1, y_1 = 0, \lambda_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = -\frac{1}{9}$.

Найдём частные производные второго порядка функции Лагранжа и частные производные первого порядка уравнения связи.

$$\varphi'_x = (x + 2y - 1)'_x = 1, \quad \varphi'_y = (x + 2y - 1)'_y = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = (y^2 + \lambda)'_x = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = (y^2 + \lambda)'_y = 2y, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = (2xy + 2\lambda)'_y = 2x.$$

Рассмотрим точку $P_1(1; 0)$, при значении $\lambda_1 = 0$.

$$\varphi'_x(1; 0) = 1, \quad \varphi'_y(1; 0) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L(1; 0; 0)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(1; 0; 0)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(1; 0; 0)}{\partial y^2} = 2.$$

Вычислим определитель (16.1.1.3) для точки P_1 и параметра λ_1 .

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Следовательно, в точке $P_1(1;0)$ функция $z = xy^2$ имеет условный минимум, а значение функции в этой точке равно $z_{\min} = z(1;0) = 1 \cdot 0^2 = 0$.

Рассмотрим точку $P_2\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ при значении $\lambda_2 = -\frac{1}{9}$.

$$\varphi'_x\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = 1, \quad \varphi'_y\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)}{\partial x \partial y} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 L\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right)}{\partial y^2} = \frac{2}{3}.$$

Вычислим определитель (16.1.1.3) для точки P_2 и параметра λ_2 .

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -2 < 0$$

Следовательно, в точке $P_2\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ функция $z = xy^2$ имеет условный мини-

мум, а значение функции в этой точке равно $z_{\max} = z\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{27}$.

16.2.2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в замкнутой области G , ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Решение. Находим стационарные точки, которые принадлежат области G , из системы: $z'_x = 2x + 2y - 4 = 0$, $z'_y = 2x + 8 = 0$. Стационарная точка $P_0(6, -4) \notin G$. Исследуем функцию на границе области.

На границе области G , заданной прямой $x=0$, функция z принимает вид $z = 8y$, причём $y \in [0, 6]$. $z' = 8 \neq 0$, $z(0, 6) = 8 \cdot 6 = 48$, $z(0, 0) = 8 \cdot 0 = 0$.

На границе области G , заданной прямой $y=0$, функция z принимает вид $z = x^2 - 4x$, причём $x \in [0, 6]$. $z' = 2x - 4 = 0$, $x = 2 \in [0, 6]$, $z(2, 0) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$, $z(0, 0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$, $z(6, 0) = 6^2 - 4 \cdot 6 = 12$.

На границе области G , заданной прямой $y = 6 - x$, функция z принимает вид $z = -x^2 + 48$, причём $x \in [0, 6]$. $z' = -2x = 0$, $x = 0 \in [0, 6]$, $z(0, 6) = -0^2 + 48 = 48$, $z(6, 0) = -6^2 + 48 = 12$.

Среди полученных значений функции z выбираем наибольшее и наименьшее значения: $\max_G z = z(0,6) = 48$, $\min_G z = z(2,0) = -4$.

16.3 Задания для решения на практическом занятии

16.3.1 Найти условные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 5$, удовлетворяющей уравнению связи $x + y + 3 = 0$.

16.3.2 Найти условные экстремумы функции $z = \frac{x+y}{xy}$ удовлетворяющей уравнению связи $x + y = 2$.

16.3.3 Найти условные экстремумы функции $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - 2\sqrt{2}$, удовлетворяющей уравнению связи $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

16.3.4 Найти условные экстремумы функции $z = 2x + y + 3$, удовлетворяющей уравнению связи $x^2 + y^2 = 4$.

16.3.5 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в замкнутой области G , ограниченной прямыми $x = 3$, $y = 0$, $y - x = 1$.

16.3.6 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области G , ограниченной прямой $y = 2$ и параболой $2y = x^2$.

16.3.7 В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.

16.3.8 В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.

16.3.9 Внутри четырёхугольника найти точку, сумма расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

16.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

16.4.1 Найти условные экстремумы функции $z = f(x; y)$, удовлетворяющей уравнению связи $\varphi(x; y) = 0$.

16.4.1.1 $f(x; y) = \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$, $\varphi(x; y) = 2x + 2y - 4$.

16.4.1.2 $f(x; y) = 2xy^2$, $\varphi(x; y) = 2x + 4y - 2$.

16.4.1.3 $f(x; y) = x + y$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 1$.

16.4.1.4 $f(x; y) = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 1$.

16.4.1.5 $f(x; y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, $\varphi(x; y) = x + y - 7$.

16.4.1.6 $f(x; y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$, $\varphi(x; y) = x + y - 4$.

- 16.4.1.7 $f(x; y) = x^2 - y^2$, $\varphi(x; y) = x + 2y - 6$.
- 16.4.1.8 $f(x; y) = x^2 y$, $\varphi(x; y) = 2x + y - 1$.
- 16.4.1.9 $f(x; y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x; y) = x + y - 2$.
- 16.4.1.10 $f(x; y) = xy$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 2$.
- 16.4.1.11 $f(x; y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\varphi(x; y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{9}$.
- 16.4.1.12 $f(x; y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\varphi(x; y) = x + y - 2$.
- 16.4.1.13 $f(x; y) = xy^2$, $\varphi(x; y) = x + 2y - 5$.
- 16.4.1.14 $f(x; y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, $\varphi(x; y) = x - y + \frac{\pi}{4}$.
- 16.4.1.15 $f(x; y) = 2x + 2y$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 8$.
- 16.4.1.16 $f(x; y) = 2x - 2y$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 18$.
- 16.4.1.17 $f(x; y) = \frac{3}{x} + \frac{3}{y}$, $\varphi(x; y) = \frac{3}{x^2} + \frac{3}{y^2} - 6$.
- 16.4.1.18 $f(x; y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, $\varphi(x; y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}$.
- 16.4.1.19 $f(x; y) = x^2 - 2\sqrt{y}$, $\varphi(x; y) = x - y + 0,5$.
- 16.4.1.20 $f(x; y) = y^2 - 2\sqrt{x}$, $\varphi(x; y) = y - x - 0,75$.
- 16.4.1.21 $f(x; y) = \sin^2 x + \sin^2 y$, $\varphi(x; y) = x + y + \frac{3\pi}{4}$.
- 16.4.1.22 $f(x; y) = 3x^2 + 4y^2$, $\varphi(x; y) = 12x + 16y + 56$.
- 16.4.1.23 $f(x; y) = 2x + 4y$, $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 20$.
- 16.4.1.24 $f(x; y) = \sin^2 x + \cos^2 y$, $\varphi(x; y) = x - y - \frac{5\pi}{4}$.
- 16.4.1.25 $f(x; y) = 2x^2 - 3y^2$, $\varphi(x; y) = 12(x - y) + 120$.
- 16.4.1.26 $f(x; y) = 3x + 5y$, $\varphi(x; y) = 9x^2 - 10y^2 + 54$.
- 16.4.1.27 $f(x; y) = \sin^2 x - \sin^2 y$, $\varphi(x; y) = x - y + \frac{7\pi}{4}$.
- 16.4.1.28 $f(x; y) = x^2 + 6y^2$, $\varphi(x; y) = 6x + 24y - 60$.
- 16.4.1.29 $f(x; y) = 2x + y$, $\varphi(x; y) = 4x^2 + y^2 - 8$.
- 16.4.1.30 $f(x; y) = \cos^2 x - \cos^2 y$, $\varphi(x; y) = x + y - \frac{\pi}{4}$.

16.4.2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ в замкнутой области G , заданной системой неравенств. Сделать чертёж.

- 16.4.2.1 $f(x; y) = x^2 + xy + x, \quad x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -2.$
- 16.4.2.2 $f(x; y) = 2x^2 + 3xy - 7x - 3y, \quad x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$
- 16.4.2.3 $f(x; y) = 3x^2 + 4xy + 4y - 2x, \quad x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 3.$
- 16.4.2.4 $f(x; y) = 4x^2 + 2xy - 16x - 6y, \quad x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 8.$
- 16.4.2.5 $f(x; y) = x^2 + y^2 - 9xy + 27, \quad 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3.$
- 16.4.2.6 $f(x; y) = x^2 + 2y^2 + 1, \quad x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$
- 16.4.2.7 $f(x; y) = 3 - 2x^2 - xy - y^2, \quad x \leq 1, y \geq 0, x - y \geq 0.$
- 16.4.2.8 $f(x; y) = x^2 + 3y^2 + x - y, \quad x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 1.$
- 16.4.2.9 $f(x; y) = 5x^2 + y^2 - 3xy + 4, \quad x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1.$
- 16.4.2.10 $f(x; y) = x^2 - y^2 + 2xy + 4x, \quad x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -2.$
- 16.4.2.11 $f(x; y) = x^2 + xy - 2, \quad 4x^2 - 4 \leq y \leq 0.$
- 16.4.2.12 $f(x; y) = 10 + 4xy - x^2, \quad 0 \leq y \leq 4 - x^2.$
- 16.4.2.13 $f(x; y) = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 9.$
- 16.4.2.14 $f(x; y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$
- 16.4.2.15 $f(x; y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2, \quad x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6.$
- 16.4.2.16 $f(x; y) = 2x^2 - 2y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 16.$
- 16.4.2.17 $f(x; y) = x^3 + y^3 + 6xy, \quad -3 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 2.$
- 16.4.2.18 $f(x; y) = 2x^2y - x^3y - x^2y^2, \quad x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6.$
- 16.4.2.19 $f(x; y) = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$
- 16.4.2.20 $f(x; y) = x^2 - y^2 + 2xy - 4x, \quad x \leq 3, y \geq 0, x - y \geq -1.$
- 16.4.2.21 $f(x; y) = 4 - 2x^2 - y^2, \quad y \geq 0, y \leq \sqrt{1 - x^2}.$
- 16.4.2.22 $f(x; y) = 1 + 2x^2 + 3y^2, \quad y \geq 0, y \leq \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}.$
- 16.4.2.23 $f(x; y) = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad 2x^2 \leq y \leq 8.$
- 16.4.2.24 $f(x; y) = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$
- 16.4.2.25 $f(x; y) = xy - 3x - 2y, \quad 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4.$
- 16.4.2.26 $f(x; y) = xy^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$
- 16.4.2.27 $f(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2.$
- 16.4.2.28 $f(x; y) = (2x^2 + 3y^2) \cdot e^{-(x^2 + y^2)}, \quad x^2 + y^2 \leq 9.$
- 16.4.2.29 $f(x; y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2.$
- 16.4.2.30 $f(x; y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – 254 с.
2. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / А. В. Ефимов [и др.]. – Москва : Наука, 1984. – 460 с.
3. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск. : Новое знание, 2008. – 263 с.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – 270 с.
5. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.
6. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математике (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.
7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. школа, 1983. – 168 с.
8. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. школа, 1967. – 350.
9. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.
10. Герасимович, А. И. Математический анализ. В 2 ч. / А. И. Герасимович, П. П. Кеда, М. Б. Суган. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 1–2.
11. Математика. Линейные операторы векторных пространств. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Практикум для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)» / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 120 с.
12. Математика. Аналитическая геометрия. Линейная и векторная алгебра: методические указания по к практическим занятиям для студентов первого курса специальностей 1-40 05 01-01 «Информационные системы и технологии (в проектировании и производстве)», 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-53 01 01-01 «Автоматизация технологических процессов и производств (машиностроение и приборостроение)» / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 103 с.
13. Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов первого курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2010. – 71 с.
14. Чернов, В. П. Теория массового обслуживания / В. П. Чернов, В. Б. Ивановский. – Москва : Инфра-М, 2000. – 158 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А1 – Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C' = 0$, где $C = Const$;	2)	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0, a \neq 1$;	4)	$(e^x)' = e^x$
5)	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0, a \neq 1, x > 0$;	6)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, где $x > 0$;
7)	$(\sin x)' = \cos x$;	8)	$(\cos x)' = -\sin x$;
9)	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;	10)	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
11)	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $ x < 1$;	12)	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $ x < 1$;
13)	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	14)	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
15)	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;	16)	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
17)	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	18)	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, где $x \neq 0$.

Таблица А2 – Таблица основных неопределённых интегралов

1)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$;	2)	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$;
3)	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, x > 0$;	4)	$\int e^x dx = e^x + C$;
5)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;	6)	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
7)	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;	8)	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
9)	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$;	10)	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$;
11)	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$;	12)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, x < a $;
13)	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$;	14)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$;
15)	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;	16)	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;
17)	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;	18)	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$, где $x \neq 0$.

Учебное издание

**МАТЕМАТИКА.
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Практикум

Составители:

Коваленко Александр Вильямович
Джежора Александр Александрович
Дмитриев Александр Петрович
Завацкий Юрий Александрович

Редактор *Н. В. Медведева*
Корректор *Т. А. Осипова*
Компьютерная верстка *А. В. Коваленко*

Подписано к печати _____. Формат _____. Усл. печ. листов _____.
Уч.-изд. листов _____. Тираж _____ экз. Заказ № _____.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

210038, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.