

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

1. Вычислить двойной интеграл, изобразив в декартовой системе координат область интегрирования G .

В I $\iint_G (2xy - y^2) dx dy$, где G – область, ограниченная параболой $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$.

В II $\iint_G (x + 4xy) dx dy$, где G – область, ограниченная гиперболой $xy = 1$ и прямыми $y = 4$, $x = 1$.

В III $\iint_G (x^2 - y^2 x) dx dy$, где G – область, ограниченная прямой $x = 1$ и кривыми $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$.

В IV $\iint_G (x^3 - y^3) dx dy$, где G – область, ограниченная прямой $x = 1$ и кривыми $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$.

В V $\iint_G (x^3 + y^3) dx dy$, где G – область, ограниченная прямыми $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $x = 4$.

В VI $\iint_G (y^3 - xy) dx dy$, где G – область, ограниченная параболой $y^2 = x$ и прямой $y = x$.

2. Вычислить тройной интеграл, изобразив в декартовой системе координат область интегрирования Ω .

В I $\iiint_{\Omega} (4x - y + z) dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная поверхностями $z = 2 - x^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

В II $\iiint_{\Omega} (5x + 3z) dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная поверхностями $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = x^2 + 15y^2$, $z = 0$.

В III $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная плоскостями $z = y$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$, $z = 0$.

В IV $\iiint_{\Omega} (3x + 4y) dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная поверхностями $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 5x^2 + 5y^2$, $z = 0$;

В V $\iiint_{\Omega} (3x^2 + y^2) dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная плоскостями $z = 10y$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

В VI $\iiint_{\Omega} (15x + 30z) dx dy dz$, где Ω – область, ограниченная поверхностями $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = x^2 + 3y^2$, $z = 0$;

3. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

В I $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

В II $z = x^2$, $x - 2y + 2 = 0$, $x + y - 7 = 0$, $z \geq 0$.

В III $z = 2 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$.

В IV $y = x^2$, $z + y = 2$, $z = 0$.

В V $2z = y^2$, $2x + 3y = 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

В VI $z = 2x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

4. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

В I $z = x^2, x + y = 2, y \geq 0, z \geq 0.$

В II $z = x^2, y = 2x, x = 4, y \geq 0, z \geq 0.$

В III $z = 2y, y = \sqrt{9 - x^2}, z \geq 0.$

В IV $z = y^2, 2x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

В V $z = x^2 + y^2, 5x + y = 5, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

В VI $z = 4 - x^2 - y^2, y = 2x, y = 4, x \geq 0, z \geq 0.$

5. Вычислить криволинейный интеграл первого рода.

В I $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sin^2(x+y)},$ где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $B(1,1).$

В II $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\cos^2(x+y)},$ где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,0)$ и $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

В III $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{x+y-10},$ где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(-1,1)$ и $B(3,5).$

В IV $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{x^2 + y^2 + 4},$ где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(2,3)$ и $B(3,-2).$

В V $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{8 + x^2 - y^2}},$ где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,0)$ и $B(3,2).$

В VI $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{14 - x^2 + y^2}},$ где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,-1)$ и $B(3,2).$

6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

В I $\int_{L_{AB}} ydx - xdy + (x+y)dz,$ где L_{AB} — отрезок прямой, соединяющий точки $A(-2,1,3)$ и $B(1,2,5).$

В II $\oint_L ydx - xydy,$ где L — контур треугольника с вершинами $A(-2,0), B(1,2), C(0,2)$ при положительном направлении обхода.

В III $\oint_L ydx - xdy,$ где L — контур треугольника с вершинами $A(0,0), B(2,0), C(2,2)$ при положительном направлении обхода.

В IV $\oint_L y^2dx - zdy + xdz,$ где L — контур треугольника с вершинами $A(0,0,0), B(1,2,4), C(3,2,9)$ при положительном направлении обхода.

В V $\oint_L xdx - xydy + 4zdz,$ где L — контур треугольника с вершинами $A(-1,0,5), B(1,2,4), C(8,1,9)$ при положительном направлении обхода.

В VI $\oint_L ydx - ydy,$ где L — контур треугольника с вершинами $A(2,0), B(4,1), C(7,3)$ при положительном направлении обхода.

7. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S , где S — часть плоскости α , отсеченная координатными плоскостями.

$$\text{B I} \quad \iint_S (2x+3y-z) dS, \quad \alpha: 2x+y-z-3=0.$$

$$\text{B II} \quad \iint_S (3x+2y+z) dS, \quad \alpha: 2x+y+z-4=0.$$

$$\text{B III} \quad \iint_S (-2x+y-z) dS, \quad \alpha: x+2y+4z-3=0.$$

$$\text{B IV} \quad \iint_S (x+z) dS, \quad \alpha: x+y+z+5=0.$$

$$\text{B V} \quad \iint_S (2x+3y+4z) dS, \quad \alpha: -x+y+z-1=0.$$

$$\text{B VI} \quad \iint_S (y-2z) dS, \quad \alpha: -x+2y+3z+4=0.$$

8. Вычислить поверхностный интеграл второго рода (III – II).

$$\text{B I} \quad \iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz, \text{ где } S \text{ — внешняя сторона сферы } z^2 = 16 - x^2 - y^2,$$

лежащая в первом октанте.

$$\text{B II} \quad \iint_S \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \right) dx dy, \text{ где } S \text{ — нижняя (внутренняя) сторона поверхности } z = 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9},$$

отсеченной плоскостью $z = 0$.

$$\text{B III} \quad \iint_S \frac{dx dy}{z} + \frac{dy dz}{x} + \frac{dx dz}{y}, \text{ где } S \text{ — внешняя сторона эллипсоида } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

$$\text{B IV} \quad \iint_S (2x+3y+4z) dx dy, \text{ где } S \text{ — верхняя сторона плоскости } x+y+z-6=0,$$

вырезанной цилиндром $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

$$\text{B V} \quad \iint_S y dx dz + z dx dy + x dy dz, \text{ где } S \text{ — внешняя сторона сферы } x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$

$$\text{B VI} \quad \iint_S (x^2 + y^2 + 3z^2) dx dy, \text{ где } S \text{ — внешняя сторона поверхности } z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

отсеченной плоскостями $z = 0, z = 2$.

9. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды $ABCO$ (точка O — начало координат) используя определение потока. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника ABC , при положительном направлении обхода относительно нормального (к плоскости треугольника ABC) вектора $\vec{n}$, составляющего с осью OZ острый угол, с помощью формулы Стокса.

$$\text{B I} \quad \vec{a}(M) = 3x\vec{i} - (y+z)\vec{j} + y\vec{k}, \quad A(3,0,0), B(0,2,0), C(0,0,-4).$$

$$\text{B II} \quad \vec{a}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + (z-x-2y)\vec{k}, \quad A(-1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,5).$$

$$\text{B III} \quad \vec{a}(M) = 2y\vec{i} - (x+y)\vec{j} + z\vec{k}, \quad A(5,0,0), B(0,-3,0), C(0,0,1).$$

$$\text{B IV} \quad \vec{a}(M) = y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}, \quad A(-4,0,0), B(0,-1,0), C(0,0,3).$$

$$\text{B V} \quad \vec{a}(M) = (x-z)\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}, \quad A(4,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2).$$

$$\text{B VI} \quad \vec{a}(M) = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}, \quad A(-2,0,0), B(0,-5,0), C(0,0,4).$$

10. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды $ABCO$ (точка O — начало координат) используя формулу Остроградского-Гаусса. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника ABC , при положительном направлении обхода относительно нормального (к плоскости треугольника ABC) вектора $\vec{n}$, составляющего с осью OZ острый угол, по определению циркуляции векторного поля.

В I $\vec{a}(M) = (x - z)\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$, $A(4, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$.

В II $\vec{a}(M) = 2y\vec{i} - (x + y)\vec{j} + z\vec{k}$, $A(5, 0, 0)$, $B(0, -3, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

В III $\vec{a}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + (z - x - 2y)\vec{k}$, $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 5)$.

В IV $\vec{a}(M) = y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$, $A(-4, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$, $C(0, 0, 3)$.

В V $\vec{a}(M) = 3x\vec{i} - (y + z)\vec{j} + y\vec{k}$, $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, -4)$.

В VI $\vec{a}(M) = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$, $A(-2, 0, 0)$, $B(0, -5, 0)$, $C(0, 0, 4)$.