

ТИПОВОЙ РАСЧЁТ №1
«АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

ЗАДАНИЯ

РАЗДЕЛ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Система линейных алгебраических уравнений задана расширенной матрицей $\tilde{A} = (a_{ij} | b_i)$, где $i = \overline{1;4}$, а $j = \overline{1;4}$. Необходимо найти: а) произведение основной матрицы системы $A = (a_{ij})$ на расширенную матрицу, если оно существует; б) алгебраическую сумму основной матрицы системы, умноженную на два, и её квадрат, умноженный на три; в) определитель матрицы, полученной из расширенной матрицы вычеркиванием первого столбца (вычисления определителя произвести путем разложения по второму столбцу, а также получением нулей в произвольном столбце или строке). Записать систему алгебраических уравнений и доказать ее совместность, используя теорему Кронекера – Капелли. Решить полученную систему уравнений: а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса. Найти решение системы линейных уравнений, которая получена из данной путем замены столбца свободных членов нулевым столбцом.

$$\begin{array}{lll}
 1.1. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) & 1.2. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 7 \end{array} \right) & 1.3. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \\
 1.4. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & -3 & 2 & 9 \end{array} \right) & 1.5. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -5 & 3 \end{array} \right) & 1.6. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \\
 1.7. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) & 1.8. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -4 & 7 \\ 6 & 3 & -1 & 0 & 11 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & 9 \end{array} \right) & 1.9. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \\
 1.10. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & 2 & -2 & 1 & 6 \end{array} \right) & 1.11. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 9 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & 8 \end{array} \right) & 1.12. A = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
1.13. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & 1.14. A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 2 & -1 & 1 & 9 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1.15. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\
1.16. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} & 1.17. A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 8 \\ 6 & 3 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & 1.18. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
1.19. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} & 1.20. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix} & 1.21. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
1.22. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & 1.23. A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & 1.24. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
1.25. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} & 1.26. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} & 1.27. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
1.28. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} & 1.29. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} & 1.30. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}
\end{array}$$

2. Найти фундаментальную систему решений и определить размерность линейного пространства решений однородной системы алгебраических уравнений $A \cdot X = 0$, у которой задана матрица A . Определить общее решение заданной однородной системы линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{array}{lll}
2.1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 2.2. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 5 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} & 2.3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
2.4. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 5 & 13 & 9 \end{pmatrix} & 2.5. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & 3 & 12 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix} & 2.6. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & -2 \\ 8 & 12 & 16 & 13 & 0 \end{pmatrix} \\
2.7. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 & -2 \\ 8 & -4 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} & 2.8. A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 28 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & -1 & 5 \end{pmatrix} & 2.9. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
2.10. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, & 2.11. A &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 11 & 6 & 11 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, & 2.12. A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & -10 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \\
2.13. A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 9 & 6 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & 2.14. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 7 & 7 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & 9 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}, & 2.15. A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 9 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \\
2.16. A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & 2.17. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, & 2.18. A &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \\
2.19. A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & -10 & 5 \end{pmatrix}, & 2.20. A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 7 \\ 7 & -7 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}, & 2.21. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\
2.22. A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, & 2.23. A &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, & 2.24. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\
2.25. A &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & 2.26. A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 15 & 5 & 10 & 15 & 30 \end{pmatrix}, & 2.27. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \\
2.28. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 12 & 4 & 4 \end{pmatrix}, & 2.29. A &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & 2.30. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 4 & 8 & 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Исследовать на совместность и найти общее решение системы линейных неоднородных алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned}
3.1. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} & 3.2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} & 3.3. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 2, \\ 8x_1 + 4x_2 + 22x_3 = 5. \end{cases} \\
3.4. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 14, \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 21. \end{cases} & 3.5. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 10. \end{cases} & 3.6. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 9x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9, \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases} \\
3.7. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 24. \end{cases} & 3.8. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9. \end{cases} & 3.9. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases} \\
3.10. \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 12x_2 + x_3 = 4. \end{cases} & 3.11. \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases} & 3.12. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 10, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
3.13. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} & 3.14. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases} & 3.15. \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases} \\
3.16. \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + 15x_3 = 4. \end{cases} & 3.17. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases} & 3.18. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ 12x_3 = 12. \end{cases} \\
3.19. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9, \\ x_1 - 12x_2 + 13x_3 = 14, \\ 4x_1 - 14x_2 + 18x_3 = 23. \end{cases} & 3.20. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 12, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases} & 3.21. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 12. \end{cases} \\
3.22. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12, \\ 10x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 24, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases} & 3.23. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 4. \end{cases} & 3.24. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases} \\
3.25. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4, \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 9. \end{cases} & 3.26. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 10. \end{cases} & 3.27. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 14, \\ 16x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 28. \end{cases} \\
3.28. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} & 3.29. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 12x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 23x_3 = -7. \end{cases} & 3.30. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 = -8. \end{cases}
\end{array}$$

РАЗДЕЛ 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = m \cdot \vec{p} + n \cdot \vec{q}$ и $\vec{b} = n \cdot \vec{p} - m \cdot \vec{q}$, где число m – номер варианта типового расчета, n – число равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки. Длины векторов: $|\vec{p}| = m \cdot n$, $|\vec{q}| = m + n$. Угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ совпадает с углом между векторами, $\vec{c} = n \cdot \vec{i} + m \cdot \vec{j}$ и $\vec{d} = m \cdot \vec{i} + n \cdot \vec{j}$. Определить также проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$ и направляющие косинусы вектора $\vec{c}$. Ответ не должен содержать тригонометрические и обратно тригонометрические выражения, а также иррациональность в знаменателе.

5. В декартовой системе координат на плоскости заданы три точки $A(n; m)$, $B\left(\frac{n+m}{2}; \frac{n-m}{2}\right)$ и $O\left(\frac{3n-m}{4}; \frac{n+3m}{4}\right)$, где число m – номер варианта типового расчета, n – число равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки. Записать координаты точек A, B, C и D , которые являются вершинами параллелограмма $ABCD$, а точка O – точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. Найти: 1) каноническое уравнение прямой AB , векторно-параметрическое и параметрические уравнения прямой BD , нормальное уравнение прямой AC ; 2) общее уравнение прямой перпендикулярной стороне AB и проходящей через точку C ; 3) каноническое уравнение прямой, проходящей через точку D , которая параллельна прямой AC ; 4) длину высоты параллелограмма, опущенной из вершины D на сторону AB ; 5) площадь параллелограмма $ABCD$; 6) угол φ между стороной AB и прямой соединяющую точку A с точкой, которая делит сторону BC в отношении два к пяти, считая от точки B ; 7) уравнение биссектрисы, проведенной из вершины A ; 8) уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $N(n; 0)$ и прямой $y = -n$, с указанием характеристик кривой после приведения уравнения к каноническому виду; 9) уравнение линии, каждая точка которой расположена в два раза дальше от точки $N(n; 0)$, чем к прямой $y = -n$, с указанием характеристик кривой после приведения полученного уравнения к каноническому виду; 10) уравнение линии, каждая точка которой расположена в два раза ближе к точке $N(n; 0)$, чем к прямой $y = -n$, с указанием характеристик кривой после приведения полученного уравнения к каноническому виду.

6. Заданы координаты четырех точек $A(m; n; p)$, $B(2m; n; p)$, $C(m; 2n + m; m + 2p)$ $D(m; m + n - p; 2p + m)$, которые являются вершинами пирамиды $ABCD$, где число m – номер варианта типового расчета, n – число равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки, а число p – удвоенная сумма всех корней уравнения $x^3 - (m + n + 1) \cdot x^2 + (mn + n + m) \cdot x - pm = 0$, с учетом кратности его корней.

Найти координаты вершины пирамиды $ABCD$. Доказать, что вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ образуют базис и определить координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ в этом базисе. Найти: 1) длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D на плоскость ABC ; 2) координаты точки пересечения медиан треугольника ABC ; 3) координаты точки D' симметричной точке D относительно плоскости ABC ; 4) угол между прямой AD и плоскостью ABC ; 5) уравнения прямых AB и AC , и угол между ними; 6) работу равнодействующей силы $\vec{F}$, для сил $\vec{F}_1 = \overrightarrow{DA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{DB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{DC}$, приложенных к материальной точке D , которая под их воздействием перемещается прямолинейно из точки D в точку пересечения медиан треугольника ABC .

7. Построить кривую линию, которая заданна уравнением $r = \delta(\varphi)$ в полярной системе координат, начиная от значения $\varphi = 0$ до значения $\varphi = 2\pi$ и придавая углу φ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$. Записать уравнение кривой линии в декартовой прямоугольной системе координат, в которой начало системы совпадает с полюсом, а положительное направление оси абсцисс совпадает с направлением полярной оси.

$$7.1. - 7.5. \quad \delta(\varphi) = n \cdot \sin m\varphi;$$

$$7.6. - 7.10. \quad \delta(\varphi) = n \cdot \cos m\varphi;$$

$$7.11. - 7.15. \quad \delta(\varphi) = n - \sin m\varphi;$$

$$7.16. - 7.20. \quad \delta(\varphi) = n - \cos m\varphi,$$

$$7.21. - 7.25. \quad \delta(\varphi) = n + \sin m\varphi;$$

$$7.26. - 7.30. \quad \delta(\varphi) = n + \cos m\varphi,$$

где число m – номер варианта типового расчета, n – число равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки.

РАЗДЕЛ 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

8. Из предположения, что на заданном множестве заданно сумма двух элементов a и b , а также произведение произвольного элемента этого множества на любое действительное число α , определить, образует ли данное пространство, векторное (линейное) пространство.

- 8.1. Множество всех натуральных чисел; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.2. Множество всех целых чисел; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.3. Множество всех рациональных чисел; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.4. Множество всех иррациональных чисел; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.5. Множество всех действительных чисел; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.6. Множество всех натуральных чисел; сумма $a + b$, произведение a^α .
- 8.7. Множество всех целых чисел; сумма $a + b$, произведение a^α .
- 8.8. Множество всех рациональных чисел; сумма $a + b$, произведение a^α .
- 8.9. Множество всех иррациональных чисел; сумма $a + b$, произведение a^α .
- 8.10. Множество всех действительных чисел; сумма $a + b$, произведение a^α .
- 8.11. Множество всех векторов на плоскости, координаты которых являются действительными числами; сумма $\vec{a} + \vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.
- 8.12. Множество всех векторов в трехмерном пространстве, координаты которых являются действительными числами; сумма $\vec{a} + \vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.
- 8.13. Множество всех векторов на плоскости, которые лежат на одной оси; сумма $\vec{a} + \vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.
- 8.14. Множество всех векторов в пространстве, которые лежат на одной оси; сумма $\vec{a} + \vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.
- 8.15. Множество всех векторов трехмерного пространства; сумма $\vec{a} \times \vec{b}$, произведение $\alpha \cdot \vec{a}$.
- 8.16. Множество всех многочленов второй степени от переменной x ; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.17. Множество всех многочленов третьей степени от переменной x ; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.18. Множество всех многочленов не выше второй степени от переменной x ; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.19. Множество всех многочленов не выше третьей степени от переменной x ; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.20. Множество всех многочленов четвертой степени от переменной x ; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.21. Множество всех многочленов не выше четвертой степени от переменной x ; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.22. Множество всех многочленов третьей степени от переменной x ; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
- 8.23. Множество всех невырожденных матриц; сумма $a + b = (a_{ij} + b_{ij})$, произведение $\alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_{ij})$, $i = \overline{1;n}$, $j = \overline{1;n}$.

- 8.24. Множество всех диагональных матриц; сумма $a + b = (a_{ij} + b_{ij})$, произведение $\alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_{ij})$, $i = \overline{1;n}$, $j = \overline{1;n}$.
- 8.25. Множество всех симметрических матриц; сумма $a + b = (a_{ij} + b_{ij})$, произведение $\alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_{ij})$, $i = \overline{1;n}$, $j = \overline{1;n}$.
- 8.26. Множество всех невырожденных матриц; сумма $a + b = (a_{ij} \cdot b_{ij})$, произведение $\alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_{ij})$, $i = \overline{1;n}$, $j = \overline{1;n}$.
- 8.27. Множество всех диагональных матриц; сумма $a + b = (a_{ij} \cdot b_{ij})$, произведение $\alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_{ij})$, $i = \overline{1;n}$, $j = \overline{1;n}$.
- 8.28. Множество всех симметрических матриц; сумма $a + b = (a_{ij} \cdot b_{ij})$, произведение $\alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_{ij})$, $i = \overline{1;n}$, $j = \overline{1;n}$.
- 8.29. Множество всех отрицательных чисел; сумма $|a| \cdot |b|$, произведение $|a|^\alpha$.
- 8.30. Множество всех действительных чисел; сумма $a \cdot b$, произведение $\alpha \cdot a$.

9. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро линейного оператора в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$. Найти координаты вектора $\vec{x} = (m; n; p)$, а также матрицу линейного оператора в базисе $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, где координаты векторов $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3$ совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ которые заданны в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ и найдены в задаче №6, а числа $m; n; p$ определены в той же задаче.

- 9.1. проектирования на плоскость $2x - 3y + 6z - 2 = 0$;
- 9.2. проектирования на ось Oz ;
- 9.3. зеркального отображения относительно плоскости $3x + 4y = 1$;
- 9.4. проектирования на плоскость $6x - 3y + 2z - 1 = 0$;
- 9.5. проектирования на плоскость $3x + 4z - 5 = 0$;
- 9.6. проектирования на ось Ox ;
- 9.7. зеркального отображения относительно плоскости $3x - 6y - 2z = 2$;
- 9.8. проектирования на плоскость $3x - 2y + 6z - 4 = 0$;
- 9.9. проектирования на плоскость $2x + 6y + 3z - 5 = 0$;
- 9.10. зеркального отображения относительно плоскости $3x + 6y - 2z = 2$;
- 9.11. проектирования на ось Oy ;
- 9.12. проектирования на плоскость $12x - 4y + 3z - 9 = 0$;
- 9.13. проектирования на плоскость $4x - 12y + 3z - 1 = 0$;
- 9.14. зеркального отображения относительно плоскости $6x + 2y - 3z = 7$;
- 9.15. проектирования на плоскость $4x + 12y + 3z - 6 = 0$;
- 9.16. проектирования на плоскость $12x - 3y + 4z - 5 = 0$;
- 9.17. зеркального отображения относительно плоскости $2x + 6y - 3z = 8$;

- 9.18. проектирования на плоскость $-12x + 3y + 4z - 9 = 0$;
- 9.19. проектирования на плоскость $3x + 4y + 12z - 1 = 0$;
- 9.20. зеркального отображения относительно плоскости $3x + 4z = 2$;
- 9.21. проектирования на плоскость $2x + 3y + 6z - 10 = 0$;
- 9.22. проектирования на плоскость $6x + 3y - 2z + 4 = 0$;
- 9.23. зеркального отображения относительно плоскости $3y + 4z = 2$;
- 9.24. проектирования на плоскость $4x + 3y + 12z - 11 = 0$;
- 9.25. проектирования на плоскость $3x + 12y + 4z - 12 = 0$;
- 9.26. зеркального отображения относительно плоскости $3y - 4z = 4$;
- 9.27. проектирования на плоскость $-3x + 12y + 4z - 13 = 0$;
- 9.28. проектирования на плоскость $3x - 12y - 4z - 15 = 0$;
- 9.29. зеркального отображения относительно плоскости $-3x + 4y = 7$;
- 9.30. зеркального отображения относительно плоскости $4x + 3z = 3$.

10. Из предположения, что задан вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$, проверить, являются ли линейными указанные преобразования. В случае линейности найти матрицу линейного оператора, его ядро и образ. Определить координаты вектора $\vec{x} = (m; n; p)$, а также матрицу линейного оператора в базисе $B' = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$, где координаты векторов $\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3$ совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ которые заданы в базисе $B = \{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ и найдены в задаче №6, а числа $m; n; p$ определены в той же задаче.

- 10.1. $A\vec{x} = (2x_1 - x_2^2 + 3x_3; 0; x_1 + x_2 + x_3)$;
 $B\vec{x} = (3x_1 - x_2 + 1; x_1 + x_2; 4x_1 - x_2 + x_3)$;
 $C\vec{x} = (2x_1 + x_2 - x_3; x_1 + 3x_2 - x_3; 4x_1 + x_2 - x_3)$;
- 10.2. $A\vec{x} = (5x_1 + x_2 + x_3; x_1 - x_2 + 5; 0)$;
 $B\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; x_1 - x_2 + 4x_3; x_1 - x_3)$;
 $C\vec{x} = (x_1 + 3x_2; x_2 - x_3; x_1^3 + 2x_2 - x_3)$;
- 10.3. $A\vec{x} = (2x_1 - 5x_2 - 4x_3; x_1 - x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 3x_3)$;
 $B\vec{x} = (3x_1 + x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + 5x_3; x_1 - x_2 + 5x_3)$;
 $C\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3 - 4; 3x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - 9x_3)$;
- 10.4. $A\vec{x} = (x_1 - 7x_2 + 3x_3; x_1 - x_2^4 + 2x_3; x_1 + x_2 - 32x_3)$;
 $B\vec{x} = (x_1 + x_2^2 - 3; 2x_1 - x_2 + x_3; x_1 - x_2 + x_3)$;
 $C\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3; x_1 + x_2 - 2x_3; x_1 + x_2 - x_3)$;

- 10.5. $A\vec{x} = (2x_1 - x_2 + x_3; x_1^2 + x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 3x_3);$
 $B\vec{x} = (3x_1 + x_2 - 3x_3; 4x_1 - x_2 + 6x_3; x_1 - x_2 + 9x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5; 3x_1 + x_2 - 3x_3; 2x_1 + 7x_2 - 9x_3);$
- 10.6. $A\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 6x_3; x_1 - 7x_2 + 6x_3; x_1 + 5x_2 - x_3);$
 $B\vec{x} = (x_1 + x_2^2 - 13x_3; 21x_1 - x_2 + x_3; x_1 - x_2 + x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - x_2 + x_3 - 9; 5x_1 + 3x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - x_3);$
- 10.7. $A\vec{x} = (2x_3 - x_2 - 4x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + 7x_2 - 3x_3);$
 $B\vec{x} = (x_1 + x_2 - 3; x_1 - x_2 + 8x_3; x_1 - x_2 + 7x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - x_2; 3x_1 + x_2; 2x_1 + x_2 - 9x_3^3);$
- 10.8. $A\vec{x} = (2x_1 - 5x_2 - 4; x_1 - x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 3x_3);$
 $B\vec{x} = (3x_1 + x_2^2 + 3; 2x_1 - x_2 + 5x_3; x_1 - x_2 + 5x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - x_2 - 2x_3; 3x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - x_3);$
- 10.9. $A\vec{x} = (9x_1 - 7x_2 - 8x_3; x_1 + 9x_2 + 3x_3; x_1 + x_2 - 5x_3);$
 $B\vec{x} = (2x_1 + 9x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - 4x_2 + 9x_3; x_1 - 5x_2 + 5x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - x_2 - 2x_3 - 6; 3x_1 + x_2 - x_3; 3x_1 + x_2 - 9x_3);$
- 10.10. $A\vec{x} = (2x_1 - 4x_3; x_1 + 3; x_1 - 3x_3);$
 $B\vec{x} = (3x_1 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + x_3; x_1 + 5x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - x_2 - 3; 3x_1 + x_2^5 - x_3; 2x_1 + 6x_2 - x_3);$
- 10.11. $A\vec{x} = (x_1 - x_2^2 + 5x_3; 0; x_1 + 3x_2 + 4x_3);$
 $B\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 + 4; x_1 + 5x_2; 6x_1 - 7x_2 + 2x_3);$
 $C\vec{x} = (3x_1 + 4x_2 - 5x_3; x_1 + 2x_2 - x_3; 4x_1 + 6x_2 - x_3);$
- 10.12. $A\vec{x} = (3x_1 + x_2 + x_3; 2x_1 - x_2 + 5; 0);$
 $B\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - 3x_3; x_1 - 5x_2 + 4x_3; x_1 - 7x_3);$
 $C\vec{x} = (2x_1 + 3x_2; x_2 - 6x_3; 3x_1^3 + 2x_2 - 5x_3);$
- 10.13. $A\vec{x} = (x_1 - 12x_2 - 5x_3; x_1 - 3x_2 + 3x_3; x_1 + 4x_2 - 3x_3);$
 $B\vec{x} = (2x_1 + 3x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + 5x_3; x_1 - 4x_2 + 5x_3);$
 $C\vec{x} = (5x_1 - 3x_2 - x_3 - 3; 3x_1 + 6x_2 - x_3; 2x_1 + 7x_2 - x_3);$

- 10.14. $A\vec{x} = (2x_1 - 2x_2 + 3x_3; x_1 - 2x_2^3 + 2x_3; x_1 + 2x_2 - x_1x_3);$
 $B\vec{x} = (x_2 + 3x_2^2 - 4; 2x_1 - x_2 + x_3; x_1 - 5x_2 + x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 4x_2 - x_3; x_1 + 5x_2 - 2x_3; x_1 + 4x_2 - x_3);$
- 10.15. $A\vec{x} = (2x_1x_3 - 5x_2 + x_3; x_1^2 + 3x_2 + 3x_3; x_1 + 12x_2 - 13x_3);$
 $B\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 - 4x_3; 4x_1 - 5x_2 + x_3; x_1 - x_2 + x_3);$
 $C\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 - 6; 3x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - x_3);$
- 10.16. $A\vec{x} = (x_1 - 13x_2 - 16x_3; x_1 - 17x_2 + 16x_3; x_1 + 15x_2 - x_3);$
 $B\vec{x} = (6x_1 + x_2^2 - 1x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 - 3x_2 + x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 4x_2 + x_3 - 1; 5x_1 + 3x_2 - x_3; 5x_1 + x_2 - x_3);$
- 10.17. $A\vec{x} = (5x_1^3 - 6x_2 - 4x_3; x_1 - 3x_2; x_1 + 2x_2 - 3x_3);$
 $B\vec{x} = (x_1 + 4x_2 - 3x_3; x_1 - 3x_2 + 2x_3; x_1 - 5x_2 + 6x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 2x_2; 3x_1 + 3x_2; 2x_1 + 4x_2 - 5x_3^3);$
- 10.18. $A\vec{x} = (2x_1 - 6x_2 - 1; x_1 - 3x_2 + 3x_3 \cdot x_2; x_1 + 4x_2 - 3x_3);$
 $B\vec{x} = (x_1 + x_2^2 + 3; 2x_1 - 2x_2 + 5x_3; 3x_1 - x_2 + 5x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - 2x_3);$
- 10.19. $A\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 - 4x_3; 2x_1 + 2x_2 + 2x_3; x_1 + 3x_2 - 5x_3);$
 $B\vec{x} = (2x_1 + 5x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - 2x_2 + 9x_3; x_1 - 2x_2 + 5x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2; 3x_1 + 7x_2 - x_3; 3x_1 + 4x_2 - 9x_3);$
- 10.20. $A\vec{x} = (x_1 - 5x_3; 3x_1 + 3; x_1 - 3x_3);$
 $B\vec{x} = (3x_1 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + 7x_3; x_1 + x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - x_2 - 3; 3x_1 + 3x_2^2 - x_3; 2x_1 + x_2 - x_3);$
- 10.21. $A\vec{x} = (3x_1 - 3x_2^2 + 3x_3; x_1; 2x_1 + 3x_2 + x_3);$
 $B\vec{x} = (5x_1 - x_2 + 2; x_1 + x_2; 6x_1 - 2x_2 + x_3);$
 $C\vec{x} = (3x_1 + x_2 - 2x_3; x_1 + 3x_2 - 2x_3; 4x_1 + 2x_2 - x_3);$
- 10.22. $A\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 + x_3; 3x_1 - x_2 + 5; x_2);$
 $B\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 - 3x_3; 4x_1 - 3x_2 + x_3; 2x_1 - x_2);$
 $C\vec{x} = (x_1 + x_2 + x_3; 3x_2 - 2x_3; x_1^2 + 2x_2 - 2x_3);$

- 10.23. $A\vec{x} = (x_1 - x_2 - 3x_3; x_1 - 2x_2 + 6x_3; x_1 + 7x_2 - 3x_3);$
 $B\vec{x} = (3x_1 + 4x_2^2 - 3x_3; 2x_1 - x_2 + 5x_3; x_1 - x_2 + 5x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - x_2 - x_3 - 4; 3x_1 + 8x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 - 19x_3);$
- 10.24. $A\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 + 4x_3; x_1 - 3x_2^4 + 2x_3; x_1 + 5x_2 - 24x_3);$
 $B\vec{x} = (x_1 + 21x_2; 2x_1 - x_2 + x_3 + 6; 3x_1 - x_2 + 2x_3);$
 $C\vec{x} = (2x_1 - 3x_2 - 4x_3; 5x_1 + x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - 5x_3);$
- 10.25. $A\vec{x} = (12x_1 - x_2 + 4x_3; 3x_1^2 + 2x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 13x_3);$
 $B\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 - 3x_3; 4x_1 - 3x_2 + 6x_3; x_1 - 2x_2 + 5x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 12x_2 - 2x_3 - 2; 3x_1 + 3x_2 - 3x_3; 2x_1 + 3x_2 - 10x_3);$
- 10.26. $A\vec{x} = (2x_1 - 2x_2 - 4x_3; 2x_1 - 2x_2; x_1 - x_3);$
 $B\vec{x} = (x_1 + 3x_2^2; x_1 - 3x_2 + 5x_3; x_1 - 4x_2 + 2x_3);$
 $C\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2; 4x_1 + 7x_2 - 3x_3; 2x_1 + 2x_2 - 2x_3);$
- 10.27. $A\vec{x} = (2x_1^3 - 3x_2^3 - 4x_3; x_1 - 3x_2 + 7x_3; x_1 + 9x_2 - 2x_3);$
 $B\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 12; x_1 - 8x_2 + 4x_3; x_1 - 5x_2 + 6x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 3x_2; 4x_1 + x_2; 2x_1 + x_2 - 9x_3);$
- 10.28. $A\vec{x} = (2x_1 - 6x_2 + 8; x_1 - 3x_2 + 3x_3; x_1 + 7x_2 - 8x_3);$
 $B\vec{x} = (2x_1 + 3x_2^2 + 5; 2x_1 - 3x_2 + 6x_3; 3x_1 - x_2 + 3x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3; 3x_1 + 4x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - 2x_3);$
- 10.29. $A\vec{x} = (x_1 - 5x_2 + 2x_3; x_1 + 3x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2 - 4x_3);$
 $B\vec{x} = (3x_1 + 4x_2^2 - 7x_3; 2x_1 - 3x_2 + 5x_3; x_1 - 3x_2 + 7x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3; 3x_1 + 2x_2 - x_3; 3x_1 + 4x_2 - 9x_3);$
- 10.30. $A\vec{x} = (3x_1 - 5x_3; 2x_1 + 9; 7x_1 - 4x_3);$
 $B\vec{x} = (7x_1 - 6x_3; 5x_1 - 4x_2 + 3x_3; 2x_1 + 1x_3);$
 $C\vec{x} = (x_1 - 3x_2 - 5; 3x_1 + 4x_2^4 - x_3; 2x_1 + 6x_2 - 2x_3).$

11. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы A линейного оператора A .

11.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix};$ 11.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$ 11.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

$$\begin{aligned}
11.4. \quad A &= \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}; 11.5. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 11.6. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
11.7. \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; 11.8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; 11.9. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \\
11.10. \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; 11.11. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}; 11.12. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}; \\
11.13. \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}; 11.14. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}; 11.15. \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \\
11.16. \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; 11.17. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 11.18. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \\
11.19. \quad A &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; 11.20. \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}; 11.21. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \\
11.22. \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}; 11.23. \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}; 11.24. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}; \\
11.25. \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; 11.26. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; 11.27. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \\
11.28. \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}; 11.29. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; 11.30. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

12. Привести заданную квадратичную форму к каноническому виду ортогональными преобразованиями.

12.1. $F = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

12.2. $F = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

12.3. $F = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

12.4. $F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;

12.5. $F = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

- 12.6. $F = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
 12.7. $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
 12.8. $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
 12.9. $F = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
 12.10. $F = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2$;
 12.11. $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$;
 12.12. $F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;
 12.13. $F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
 12.14. $F = -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;
 12.15. $F = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$;
 12.16. $F = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$;
 12.17. $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
 12.18. $F = 3x_1^2 - 9x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;
 12.19. $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$;
 12.20. $F = 4x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;
 12.21. $F = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_2x_3$;
 12.22. $F = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;
 12.23. $F = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;
 12.24. $F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 10x_1x_2$;
 12.25. $F = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$;
 12.26. $F = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$;
 12.27. $F = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2$;
 12.28. $F = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2$;
 12.29. $F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 18x_1x_2$;
 12.30. $F = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_3^2 + 36x_1x_2$.

13. Исследовать кривую второго порядка. Приведите, уравнение кривой к каноническому виду. Построить график кривой, приведенной в каноническом виде, в новой системе координат. Определить формулы перехода от старых координат, в которых заданна кривая, к новым координатам. Указать в старых координатах координаты начала новой системы координат. Определить характеристики, полученной кривой второго порядка, которая задана в каноническом виде в новой системе координат.

- 13.1. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$; 13.2. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x + 16y + 3 = 0$;
 13.3. $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 6y - 3 = 0$; 13.4. $4x^2 - 2xy + 4y^2 - 10x + 10y - 1 = 0$;
 13.5. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$; 13.6. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;

$$\begin{array}{ll}
13.7. 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0; & 13.8. x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0; \\
13.9. 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0; & 13.10. x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 9 = 0; \\
13.11. 19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0; & 13.12. 4xy - 8x - 8y - 1 = 0; \\
13.13. 25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0; & \\
13.14. 5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0; & \\
13.15. 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0; & 13.16. 2xy + 2x + 2y - 3 = 0; \\
13.17. 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0; & 13.18. x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0; \\
13.19. 7x^2 - 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0; & 13.20. 4xy + 4x - 4y - 6 = 0; \\
13.21. 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0; & 13.22. 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 2x - y + 1 = 0; \\
13.23. 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0; & 13.24. 2x^2 - 5xy + 2y^2 + 2x - y + 1 = 0; \\
13.25. 4x^2 + 17xy + 4y^2 - x - 4y - 3 = 0; & 13.26. 7x^2 - 50xy + 7y^2 + x - 2y + 7 = 0; \\
13.27. x^2 + 6xy + 9y^2 - 3x + 2y - 1 = 0; & 13.28. 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 6y + 2 = 0; \\
13.29. 9x^2 + 6xy + y^2 - x + 2y - 4 = 0; & 13.30. x^2 - 5xy + 6y^2 - x + y + 1 = 0.
\end{array}$$

РАЗДЕЛ 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

14. Доказать, что предел числовой последовательности (x_n) равен a . Определить номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N(\varepsilon)$, если $\varepsilon = 0,00035$, для номеров задач, которые заканчиваются четной цифрой, и $\varepsilon = 0,00065$, для номеров задач, которые заканчиваются нечетной цифрой.

$$\begin{aligned}
 &14.1. x_n = \frac{2n-3}{3n+2}, \quad a = \frac{2}{3}; \quad 14.2. x_n = \frac{3n-4}{4n+5}, \quad a = \frac{3}{4}; \quad 14.3. x_n = \frac{4n-1}{5n-2}, \quad a = \frac{4}{5}; \\
 &14.4. x_n = \frac{7n-3}{3n+5}, \quad a = \frac{7}{3}; \quad 14.5. x_n = \frac{2-8n}{n+5}, \quad a = -8; \quad 14.6. x_n = \frac{n+1}{5n-2}, \quad a = \frac{1}{5}; \\
 &14.7. x_n = \frac{4n-8}{9n+2}, \quad a = \frac{4}{9}; \quad 14.8. x_n = \frac{6n-1}{4n+3}, \quad a = \frac{3}{2}; \quad 14.9. x_n = \frac{6-7n}{2+4n}, \quad a = -\frac{7}{4}; \\
 &14.10. x_n = \frac{4n-9}{2n+2}, \quad a = 2; \quad 14.11. x_n = \frac{3n-4}{4n+5}, \quad a = \frac{3}{4}; \quad 14.12. x_n = \frac{3n-1}{6n-2}, \quad a = \frac{1}{2}; \\
 &14.13. x_n = \frac{5n-1}{2n+5}, \quad a = \frac{5}{2}; \quad 14.14. x_n = \frac{n-4}{n+5}, \quad a = 1; \quad 14.15. x_n = \frac{9n-1}{3n-1}, \quad a = 3; \\
 &14.16. x_n = \frac{n-7}{3n+5}, \quad a = \frac{1}{3}; \quad 14.17. x_n = \frac{2n+6}{6n+9}, \quad a = \frac{1}{3}; \quad 14.18. x_n = \frac{4n-1}{n-2}, \quad a = 4; \\
 &14.19. x_n = \frac{5n+3}{7n+2}, \quad a = \frac{5}{7}; \quad 14.20. x_n = \frac{8n+64}{3n+5}, \quad a = \frac{8}{3}; \quad 14.21. x_n = \frac{9n-1}{2n+2}, \quad a = \frac{9}{2}; \\
 &14.22. x_n = \frac{11n-3}{3n+2}, \quad a = \frac{11}{3}; \quad 14.23. x_n = \frac{8n-9}{9n-8}, \quad a = \frac{8}{9}; \quad 14.24. x_n = \frac{2n-1}{2n+1}, \quad a = 1; \\
 &14.25. x_n = \frac{n-3}{3n+9}, \quad a = \frac{1}{3}; \quad 14.26. x_n = \frac{7n-4}{8n+5}, \quad a = \frac{7}{8}; \quad 14.27. x_n = \frac{6n-6}{5n-2}, \quad a = \frac{6}{5}; \\
 &14.28. x_n = \frac{8n-7}{9n+6}, \quad a = \frac{8}{9}; \quad 14.29. x_n = \frac{5n-4}{4n-5}, \quad a = \frac{5}{4}; \quad 14.30. x_n = \frac{3n+1}{2n-2}, \quad a = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

15. Доказать (определить существование $\delta(\varepsilon)$ и указать значение числа δ для значения $\varepsilon = 0,001 \cdot m$, где m – номер варианта), что

$$\begin{aligned}
 &15.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3; \quad 15.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5; \quad 15.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = 7; \\
 &15.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = 6; \quad 15.5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = 8; \quad 15.6. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2; \\
 &15.7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4x - 21}{x - 3} = 10; \quad 15.8. \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x - 2} = 4; \quad 15.9. \lim_{x \rightarrow -\frac{6}{7}} \frac{49x^2 - 36}{7x + 6} = -12; \\
 &15.10. \lim_{x \rightarrow -\frac{4}{5}} \frac{25x^2 - 16}{5x + 4} = -8; \quad 15.11. \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{9x^2 - 25}{3x + 5} = -10; \quad 15.12. \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} \frac{16x^2 - 9}{4x - 3} = 6;
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
15.13. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = -2; & 15.14. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = -1; & 15.15. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = -1; \\
15.16. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = 1; & 15.17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = 7; & 15.18. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = 3; \\
15.19. \lim_{x \rightarrow \frac{5}{6}} \frac{36x^2 - 25}{6x - 5} = 10; & 15.20. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{16x^2 - 1}{4x + 1} = -2; & 15.21. \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{9x^2 - 16}{3x - 4} = 8; \\
15.22. \lim_{x \rightarrow \frac{3}{8}} \frac{64x^2 - 9}{8x - 3} = 6; & 15.23. \lim_{x \rightarrow \frac{5}{9}} \frac{81x^2 - 25}{9x - 5} = 10; & 15.24. \lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} \frac{4x^2 - 49}{2x - 7} = 14; \\
15.25. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 30}{x - 5} = 11; & 15.26. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x - 4} = 9; & 15.27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1; \\
15.28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = 8; & 15.29. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = 7; & 15.30. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 7x + 6}{x + 1} = 5.
\end{array}$$

16. Найти предел числовой последовательности или предел функции. В четвертом пункте (г) предположите формулу общего члена числовой последовательности, который удовлетворяет первым трем указанным членам, записанным под знаком предела, а заменив им параметр T , найти указанный предел последовательности.

16.1. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^3 - (3n+2)^3}{n^3 + 3n - 2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+2}) \right)$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-1}{4n+2} \right)^{3n-1}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + T \right)$; д) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^3 + x - 30}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + x - 2}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 2x}$; з) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{7-2x}{x-2} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$; и) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{30x-1}{x+2} \right)^{30x-1}$.

16.2. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-2)^3 - (2n-4)^3}{3n^3 + 5n + 6}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{3}{2}} \cdot (\sqrt{n^3-1} - \sqrt{n^3-5}) \right)$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n+8}{9n-4} \right)^{3n-7}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + T \right)$; д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 9x - 22}{x^3 - x^2 - 4}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 29} \frac{\sqrt{x-28} - 1}{x^2 + x - 870}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 3x}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin 4x}}$; и) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{3x-1}{29x+2} \right)^{29x-1}$.

16.3. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+8)^3 - (3n-5)^3}{15n^3 + 7n - 9}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{7}{2}} \cdot (\sqrt{n^7+8} - \sqrt{n^7-7}) \right)$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n^2+8}{8n^2-3} \right)^{6n^2-5}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + T \right)$; д) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + x^2 - 80}$;

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-6}-2}{x^2+2x-35}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{\operatorname{tg} 7x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin 4x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{32x-6}{26x+2} \right)^{28x-1}.$$

$$16.4. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n-1)^3 - (2n-7)^3}{24n^3 + 9n + 8}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{n+6} - \sqrt{2n-9}) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9-5n}{1-5n} \right)^{4n+9}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 13} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 28} \frac{3x^2 + 28x - 3136}{x^3 - 5x^2 - 18032};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 28} \frac{\sqrt{x^2 - 775} - 3}{5x^2 + x - 3948}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 6x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 9x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{38x-8}{9x+9} \right)^{27x-7}.$$

$$16.5. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (2n-7)^3}{15n^2 + 9n + 3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{9}{2}} \cdot (\sqrt{n^9-4} - \sqrt{2n^9+8}) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8-7n}{6-7n} \right)^{5n+8}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{12 \cdot 14} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 27} \frac{2x^2 + x - 1485}{x^3 + 3x^2 - 21870};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt{x-2} - 5}{3x^2 + 2x - 2241}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin x}{\sin 6x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{4-x}{x-2} \right)^{\frac{1}{\sin \pi x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x-8}{7x+9} \right)^{7x}.$$

$$16.6. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 3n - 2}{(2n+5)^3 + (5n+2)^3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((8n-1)^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[3]{8n-3} - \sqrt[3]{125n+8}) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n-4}{9n+7} \right)^{5n-1}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^3 - x - 120};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 25} \frac{x^2 - 10x - 375}{\sqrt{x} - 5}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{tg} 2x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{24x-1}{x+5} \right)^{27x-1}.$$

$$16.7. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 5n^2 - 4}{(3n+4)^3 + (2n+1)^3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n-1)^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[3]{n-3} - \sqrt[3]{8n+8}) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+4}{5n-2} \right)^{2n-5}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+2}{6} + \frac{9+4}{36} + \frac{27+8}{216} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 7x - 9}{4x^3 - 3x^2 + 7};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{\sqrt{x+4} - 3}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 6x}{5x \cdot \operatorname{tg} 4x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{17x-1}{9x+2} \right)^{29x-1}.$$

$$16.8. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - n^2 - n + 2}{(3n+1)^4 + n}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n+9)^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[3]{625n-3} - 1) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-5n^2 + 8}{-5n^2 - 1} \right)^{2n-6}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{9} + \frac{6}{16} + \frac{9}{25} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 3x^2 + 2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 + 4x - 60}{\sqrt{2x-4} - 2\sqrt{2}}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^2 - x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x-6}{7x+2} \right)^{28x-1}.$$

$$16.9. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2}{(n+1)^4 + n}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n-7)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{216n^2} - \sqrt[3]{n^2 + 8} \right) \right);$$

$$\text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9+8n}{1+8n} \right)^{7n+9}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3}{x^3 + x^2 - 12};$$

$$\text{ е) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt[3]{7 \cdot x + 6} - 3}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{arcsin} 7x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x}{6x+2} \right)^{8x-1}.$$

$$16.10. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 4n^2 - n}{3(n+4)^3 + 2(4-3n)^3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n+1)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{343n^2 - 1} - \sqrt[3]{27n^2 + 2} \right) \right);$$

$$\text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8+7n}{6+6n} \right)^{6n-8}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{4} + \frac{4}{5} + \frac{6}{6} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{3x^3 + x^2 - 28};$$

$$\text{ е) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 9}{\sqrt[3]{4 \cdot x + 7} - 3}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + \sin 5x}{\operatorname{tg} 7x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{1}{x-1}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{9x-8}{5x+9} \right)^{5x^3+8}.$$

$$16.11. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (2n+1)^3}{2n^3 + n - 2}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\sqrt{2n^2 + 2} - \sqrt{2n^2 + 6} \right) \right);$$

$$\text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+3} \right)^{2n-1}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 11} \frac{x^2 + x - 132}{x^3 + x - 1342};$$

$$\text{ е) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 + x - 30}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{7-2x}{7x-20} \right)^{\operatorname{tg} \frac{7\pi x}{2}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{28x-1}{3x+2} \right)^{28x+1}.$$

$$16.12. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-2)^3 - (4n-4)^3}{4n^3 + 6n + 7}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{7}{2}} \cdot \left(\sqrt{n^7 + 6} - \sqrt{n^7 - 25} \right) \right);$$

$$\text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n+9}{10n-7} \right)^{8n-6}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 9x - 36}{x^3 + x^2 - 36};$$

$$\text{ е) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{4x^2 + x - 39}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 4x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin 5x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{3x-1}{29x+2} \right)^{29x-1}.$$

$$16.13. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+8)^3 - (n-5)^3}{5n^2 + 7n - 9}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\sqrt{32n^5 + 8} - \sqrt{n^5 - 4} \right) \right);$$

$$\text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n^2 + 3}{9n^2 - 6} \right)^{2n^2 + n - 5}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - x - 20}{x^3 - x^2 - 100};$$

$$\text{ е) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{5x+6} - 6}{x^2 + x - 42}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\operatorname{tg} x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{\sin x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{31x-6}{22x+2} \right)^{27x+91}.$$

$$16.14. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^3 + (2n-3)^3}{4n^3 + 9n^2 - 8}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\sqrt{n^5 + 16} - \sqrt{4n^5 + 9} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4n}{2-4n} \right)^{3n+1}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 8x - 28}{3x^3 - x^2 - 20};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x^2 - 64} - 8}{5x^2 + x - 328}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 7x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 5\pi x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{9x-1}{8x+9} \right)^{7x-9}.$$

$$16.15. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)^3 - (3n+5)^3}{15n^4 + 9n + 3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\sqrt{n^3 - 4} - \sqrt{27n^3 + 1} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-5n}{2-5n} \right)^{6n+8}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 17} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 27} \frac{2x^2 + x - 1485}{x^3 + 3x^2 - 21870};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x^2 + 2x - 63}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + \sin 3x}{\sin 5x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{7-2x}{4-x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} \pi x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{7x-1}{2x+12} \right)^{6x}.$$

$$16.16. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 4n - 2}{(5n+1)^3 + (5n+6)^3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((32n-1)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{64n-4} - \sqrt[3]{64n+5} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-5}{3n+1} \right)^{2n}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{(n-1)^2} + \frac{4}{(n-1)^2} + \frac{5}{(n-1)^2} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 10x - 56}{\sqrt{x} - 2}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\operatorname{tg} 2x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3-2x}{2x-1} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4x-1}{3x+5} \right)^{7x-1}.$$

$$16.17. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^4 + 5n^2 - 4}{(2n+4)^3 + (5n+1)^3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((64n+8)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{125n^2 + 9} - \sqrt[3]{8n^2 - 4} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n+9}{6n-1} \right)^{2n-9}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+1}{1} + \frac{1+8}{4} + \frac{1+27}{9} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{4x^3 - x - 3};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x+33} - 6}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 9x}{5x \cdot \operatorname{tg} 6x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 7x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x-1}{4x-3} \right)^{27x+8}.$$

$$16.18. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - n^2 - 3n + 1}{(3n+1)^3 + 2n}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((625n+1)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{8n^2 + 3} - 1 \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-5n^2}{7-5n^2} \right)^{2n^2+1}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{16} + \frac{8}{25} + \frac{11}{36} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 7x^2 - 8}{x^3 - x^2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - x - 42}{\sqrt{2x-5} - 3}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{3x^2 - 2x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+8x^2)^{\frac{1}{3x^2}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{9x-9}{10x+1} \right)^{8x-5}.$$

$$16.19. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{(2n+1)^4 + n^4}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((8n-4)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{8n^2} - \sqrt[3]{n^2 + 1} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+6n}{5+6n} \right)^{3n+4}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 15} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 3x^3}{x^3 + x^2 - 36};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt[3]{7 \cdot x + 29} - 4}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 6x}{\arcsin 9x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{7x}{8x+1} \right)^{9x-8}.$$

$$16.20. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 + 9n^2 - 6n - 7}{4(2n+7)^3 + 3(7-2n)^3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((8n+1)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{64n^2 + 21} - \sqrt[3]{27n^2 + 21} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9+2n}{8+2n} \right)^{3n-7}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{7}{7} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^3 + x^2 - 80};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 + x - 42}{\sqrt[3]{4 \cdot x + 3} - 3}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x + \sin x}{\operatorname{tg} x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi(x-2)}{4} \right)^{\frac{1}{x-3}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5x-1}{x+2} \right)^{5x}.$$

$$16.21. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)^3 - (3n+2)^3}{4n^3 + 5n - 1}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((9n)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\sqrt{4n^2 + 2} - \sqrt{9n^2 + 1} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-5}{6n+2} \right)^{3n-1}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 + x - 110}{x^3 + x - 1010};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x^2 + 4x - 12}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5+2x}{7x-5} \right)^{\operatorname{tg} \frac{3\pi x}{4}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{7x-1}{3x+2} \right)^{2x+1}.$$

$$16.22. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)^3 - (2n+2)^3}{2n^3 + 3n - 1}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{7}{2}} \cdot \left(\sqrt{9n^7 + 1} - \sqrt{4n^7 - 5} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12n+4}{12n-3} \right)^{7n-5}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 7x - 60}{x^3 - x^2 - 100};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+8} - 4}{x^2 + x - 20}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 4x}{2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} 3x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 7x)^{\frac{1}{\sin 3x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x-1}{9x+2} \right)^{9x-8}.$$

$$16.23. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n-8)^3}{3n^2 + 6n - 9}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\sqrt{16n^5 + 1} - \sqrt{8n^5 - 5} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 + 1}{7n^2 - 5} \right)^{3n^2 + 2n - 4}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{2x^3 - x^2 - 112};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x^2 - x - 30}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 5} (6-x)^{\frac{1}{\sin 5\pi x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{11x-6}{6x+2} \right)^{9x+9}.$$

$$16.24. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-6)^3 + (n-9)^3}{9n^3 + 6n^2 - 1}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((9n)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\sqrt{16n^5 + 1} - \sqrt{4n^5 + 5} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-5n}{3-5n} \right)^{4n+2}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 15} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 7x - 26}{5x^3 - x^2 - 36};$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x^2 - 80} - 1}{x^2 - 81}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 9x}{\operatorname{tg} 6x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 6\pi x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{8x-7}{9x+7} \right)^{3x-5}.$$

$$16.25. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n-5)^3 - (6n+2)^3}{5n^2 + 7n + 1}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((9n)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\sqrt{25n^3 - 4} - \sqrt{36n^3 + 1} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5-6n}{3-6n} \right)^{7n+9}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{9 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 18} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^3 + x^2 - 28};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x^2 + 2x - 99}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x + \sin 7x}{\sin 4x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{10-x}{42-5x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} \pi x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{8x-7}{5x+19} \right)^{2x}.$$

$$16.26. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 4n^2 - 1}{(3n+9)^3 + (2n+3)^3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((125n-1)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{n-7} - \sqrt[3]{8n+9} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-3}{5n+3} \right)^{3n-9}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{(n-2)^2} + \frac{5}{(n-2)^2} + \frac{6}{(n-2)^2} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 16}{x - 4}.$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 + x - 90}{\sqrt{x} - 3}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 7x}{\operatorname{tg} 2x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5-2x}{2x-3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{5x-3}{4x+8} \right)^{6x-5}.$$

$$16.27. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^3 + 5n - 9}{(3n+1)^3 + (5n+1)^2}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n-8)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{125n^2 + 8} - \sqrt[3]{8n^2 - 27} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+7}{8n-1} \right)^{3n-1}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{4x^3 - x - 475};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+35} - 6}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 9x - \cos 6x}{2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} 4x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 9x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 4x}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{3x-7}{5x-6} \right)^{24x+5}.$$

$$16.28. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 3n^2 - 9n + 6}{(5n+2)^3 + 2n}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((625n+8)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{27n^2 + 8} - 1 \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8-6n^2}{4-6n^2} \right)^{9n^2+8}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{25} + \frac{9}{36} + \frac{12}{49} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^4 + x^2 - 36}{2x^4 - 16x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - x - 56}{\sqrt{3x-8} - 4}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - \sin 7x}{2x^2 - 5x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^2)^{\frac{1}{8x^2}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{10x-5}{11x+7} \right)^{3x-9}.$$

$$16.29. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 5}{(3n+8)^4 + 2n^4}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n-4)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n^2 + 5} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4+7n}{6+7n} \right)^{4n+5}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 16} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 4x^3}{x^3 + 2x^2 - 96};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{\sqrt[3]{x+19} - 3}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 9x}{\operatorname{arcsin} 8x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{4x^2}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{9x}{5x+6} \right)^{3x-7}.$$

$$16.30. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - n - 30}{2(3n+1)^3 + 6(5-n)^3}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((125n+6)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{8n^2 + 2} - \sqrt[3]{64n^2 + 1} \right) \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10+3n}{9+3n} \right)^{4n-9}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{7}{7} + \frac{9}{8} + \dots + T \right); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 12x^2 - 13};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + x - 56}{\sqrt[3]{4 \cdot x - 1} - 3}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x + \sin 6x}{\operatorname{tg} 4x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 5} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi(x-4)}{4} \right)^{\frac{1}{x-5}}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-1}{x+9} \right)^{7x}.$$

17. Пусть заданы функции $\varphi(x) = (m+1)^{\frac{(-1)^m \cdot m}{x^2 + (-1)^m \cdot (2 \cdot m + 4) \cdot x + m^2 + 4 \cdot m + 3}}$,

$$\psi(x) = \log_{m+4} \left| \frac{x-m-1}{x-m-3} \right|, \quad g_1(x) = (-1)^m \frac{x-m-2}{x-m-2}, \quad g_2(x) = (-1)^m \frac{\sin(x-m-2)}{\sin(x-m-2)},$$

$$g_3(x) = (-1)^m \frac{\cos(x-m-2)}{\cos(x-m-2)}, \quad g_4(x) = (-1)^m \frac{\operatorname{tg}(x-m-2)}{\operatorname{tg}(x-m-2)}, \quad g_5(x) = (-1)^m \frac{\operatorname{ctg}(x-m-2)}{\operatorname{ctg}(x-m-2)},$$

где число m – номер варианта выполнения типового расчета. Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность на множестве действительных чисел.

Установить точки разрыва функции $y = f(x)$, указав ее аналитический вид, и провести классификацию точек разрыва, если они существуют. Выполнить схематический чертеж графика функции $y = f(x)$. Исходя из вариантов выполнения типового расчета, функция $y = f(x)$ определяется следующим образом:

- $f(x) = -\psi(x) + g_1(x)$, если номер вашего варианта $m \in \{5k - 4 | k \in \mathbb{N}\}$;
- $f(x) = \varphi(x) + g_2(x)$, если номер варианта $m \in \{5k - 3 | k \in \mathbb{N}\}$;
- $f(x) = -5 \cdot \psi(2x) + 4 \cdot g_3(3x)$, если номер варианта $m \in \{5k - 2 | k \in \mathbb{N}\}$;
- $f(x) = 3 \cdot \varphi(3x) - 3 \cdot g_4(2x)$, если номер варианта $m \in \{5k - 1 | k \in \mathbb{N}\}$;
- $f(x) = \varphi(4x) + 2 \cdot g_5(x)$, если номер варианта $m \in \{5k | k \in \mathbb{N}\}$;

18. Определить точки разрыва функции $y = f(x)$, если они существуют. Выполнить схематический чертеж графика функции. Для определения функции $y = f(x)$ заданы функции: $\varphi_1(x) = (-1)^m \cdot x$, $\varphi_2(x) = (-1)^m \cdot \cos x$, $\varphi_3(x) = (-1)^m \cdot \sin x$, $\varphi_4(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{tg} x$, $\varphi_5(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{ctg} x$, $\varphi_6(x) = (-1)^{m+1} \cdot \log_{m+1} x$, $\varphi_7(x) = (-1)^m \cdot m^x$. Исходя из номеров m , вариантов выполнения типового расчета, функция $y = f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_1^{-1}(mx), & x < 0; \\ \varphi_2(mx), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2m}; \\ (-1)^m \cdot \varphi_1^2\left(mx - \frac{\pi}{2}\right) + m, & x > \frac{\pi}{2m}, \end{cases} \quad \text{если номер варианта } m \in \{5k - 4 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_1(m^2 x^2), & \text{если } x < \frac{\pi}{2m}; \\ \varphi_5(mx), & \text{если } \frac{\pi}{2m} \leq x \leq \frac{\pi}{m}; \\ \varphi_1(mx) + (-1)^{m+1} \pi, & \text{если } x > \frac{\pi}{m}, \end{cases}$$

если номер варианта $m \in \{5k - 3 | k \in \mathbb{N}\}$;

$$f(x) = \begin{cases} -\varphi_1(m^3 x^3), & \text{если } x \leq 0; \\ \varphi_6\left(\frac{x}{m}\right), & \text{если } 0 \leq x \leq m; \\ \varphi_7\left(\frac{x}{m}\right), & \text{если } x > m, \end{cases}$$

если номер варианта $m \in \{5k - 2 | k \in \mathbb{N}\}$;

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \varphi_1(m^2 x^2), & \text{если } x < 0; \\ \varphi_4\left(\frac{x}{m}\right), & \text{если } 0 \leq x < \frac{m\pi}{2}; \\ \sqrt[3]{\varphi_1\left(\frac{x}{m}\right)}, & \text{если } x > \frac{m\pi}{2}, \end{cases}$$

если номер варианта $m \in \{5k - 1 | k \in \mathbb{N}\}$;

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_1(m^2 x^2) + 1, & \text{если } x \leq 0; \\ \varphi_3\left(\frac{x}{m}\right), & \text{если } 0 < x \leq \frac{m\pi}{2}; \\ \varphi_1^{-1}\left(\frac{x}{m} - \frac{\pi}{2}\right), & \text{если } x > \frac{m\pi}{2}, \end{cases}$$

если номер варианта $m \in \{5k | k \in \mathbb{N}\}$.

РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

19. Пусть заданы функции: $\varphi_1(x) = (-1)^m \cdot x$, $\varphi_2(x) = (-1)^m \cdot \cos x$, $\varphi_3(x) = (-1)^m \cdot \sin x$, $\varphi_4(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{tg} x$, $\varphi_5(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{ctg} x$, $\varphi_6(x) = (-1)^{m+1} \cdot \log_{m+1} x$, $\varphi_7(x) = (-1)^m \cdot m^x$, $\varphi_8(x) = (-1)^m \cdot \arccos x$, $\varphi_9(x) = (-1)^m \cdot \arcsin x$, $\varphi_{10}(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{arctg} x$, $\varphi_{11}(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{arcctg} x$, $\varphi_{12}(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{sh} x$, $\varphi_{13}(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{ch} x$, $\varphi_{14}(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{th} x$, $\varphi_{15}(x) = (-1)^m \cdot \operatorname{cth} x$, где число m – номер варианта. Записать условие задания исходя из номера варианта.

1) Найти производную функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = m$, по определению.

$$f(x) = \varphi_1^{-m}(mx), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 4 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \varphi_2(mx), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 3 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \varphi_3(mx), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 2 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \varphi_6(mx), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 1 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \varphi_7(mx), \text{ если номер варианта } m \in \{5k | k \in \mathbb{N}\}.$$

2) Найти производные и дифференциалы функции $y = f(x)$ первого и второго порядков.

$$f(x) = \varphi_2(\varphi_7(mx)) \cdot \varphi_{12}(mx + 2m) + \varphi_7^m(\pi), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 4 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \varphi_3(\varphi_1^m(mx)) \cdot \varphi_{13}(mx - m) + \varphi_1^m(\pi), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 3 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \varphi_7(\varphi_{12}(mx)) \cdot \varphi_2(mx + \pi) + \varphi_8(0), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 2 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \varphi_1(\varphi_2^m(mx)) \cdot \varphi_{12}(mx + m) + \varphi_9\left(\frac{1}{m}\right), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 1 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \varphi_{13}(\varphi_3(mx)) \cdot \varphi_1^m(mx - m) - \varphi_{15}(m), \text{ если номер варианта } m \in \{5k | k \in \mathbb{N}\}.$$

3) Найти производную функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 0$.

$$f(x) = \frac{e^{\varphi_{10}^m(mx)}}{\varphi_8^m(mx)} + \varphi_3^{2m}(m), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 4 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \frac{\varphi_1^{\frac{m}{3}}(mx^2 + mx + 1)}{\varphi_{13}^m(mx)} + \varphi_{12}^{2m}(m + 1), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 3 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \frac{\varphi_4^{\frac{m}{5}}(mx^2)}{\varphi_7\left(\frac{x^m}{m}\right)} + \varphi_9^m\left(\frac{2}{m}\right), \text{ если номер варианта } m \in \{5k - 2 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \frac{\varphi_{14}^{\frac{m}{5}}(mx+1)}{\varphi_2^m(mx^{m-2})} + 3 \cdot \varphi_5\left(\frac{\pi m}{5}\right), \text{ если номер варианта } m \in \{5k-1 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \frac{\varphi_{12}^{\frac{m}{4}}(mx^3)}{\varphi_{11}^m(mx)} - 2 \cdot \varphi_4\left(\frac{m\pi}{3}\right), \text{ если номер варианта } m \in \{5k | k \in \mathbb{N}\}.$$

4) Найти производную первого порядка функции $y = f(x)$.

$$f(x) = \left(\varphi_{15}(mx^m)\right)^{\varphi_8(mx^{-m})}, \text{ если номер варианта } m \in \{5k-4 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \left(\varphi_{14}(mx^{m-1})\right)^{\varphi_5(m(x+m)^m)}, \text{ если номер варианта } m \in \{5k-3 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \left(\varphi_{13}(mx^{2m})\right)^{\varphi_9\left(\frac{m}{x}\right)}, \text{ если номер варианта } m \in \{5k-2 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \left(\varphi_{12}\left(\frac{m}{x}\right)\right)^{\varphi_4(mx^2+mx+1)}, \text{ если номер варианта } m \in \{5k-1 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \left(\varphi_{11}((m+1)x^{m+1})\right)^{\varphi_3(mx^m)}, \text{ если номер варианта } m \in \{5k | k \in \mathbb{N}\}.$$

5) Продифференцировать функцию, которая задана неявно.

$$\varphi_1^m(mx) \cdot \varphi_{15}(y^m + m) + \varphi_6^m(x^m \cdot y^{m+1}) = e^\pi, \text{ если номер варианта } m \in \{5k-4 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$\varphi_2^m\left(\frac{m}{x}\right) \cdot \varphi_{14}(my^m) + \varphi_7^{1/m}(x^m + 2y^{m-1}) = \pi^e, \text{ если номер варианта } m \in \{5k-3 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$\varphi_3^m(x^m) \cdot \varphi_{13}(y^{-m}) + \varphi_8^m(x^m \cdot y^m) = \log_2 m, \text{ если номер варианта } m \in \{5k-2 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$\varphi_4^{-m}(x^m) \cdot \varphi_{12}(my^m) - m \cdot \varphi_6^m\left(\frac{x^{\frac{1}{m}}}{y^m}\right) = \operatorname{tg} \frac{m\pi}{3}, \text{ если номер варианта } m \in \{5k-1 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$\varphi_5^{-m}\left(\frac{m}{x}\right) \cdot \varphi_{11}\left(\frac{y^m}{m}\right) + \varphi_{10}^{1/m}(x^m - y^m) = \cos \frac{m\pi}{3}, \text{ если номер варианта } m \in \{5k | k \in \mathbb{N}\}.$$

6) Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$x(t) = \varphi_2^m(mt), y(t) = \varphi_3^m(mt), \text{ если номер варианта } m \in \{5k-4 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$x(t) = \varphi_{12}^m(mt), y(t) = \varphi_{13}^m(mt), \text{ если номер варианта } m \in \{5k-3 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$x(t) = \varphi_1^m(mt), y(t) = \varphi_1^{m+2}(mt), \text{ если номер варианта } m \in \{5k-2 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$x(t) = \varphi_7^m(mt), y(t) = \varphi_1(mt), \text{ если номер варианта } m \in \{5k-1 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$x(t) = \varphi_6(mt), y(t) = \varphi_1(mt^2 + mt + m), \text{ если номер варианта } m \in \{5k | k \in \mathbb{N}\}.$$

7) Найти производную n-го порядка. Доказать полученную формулу методом математической индукции.

$$f(x) = \varphi_1^{-1}(mx), \text{ если номер варианта } m \in \{5k-4 | k \in \mathbb{N}\};$$

$$f(x) = \varphi_7(mx), \text{ если номер варианта } m \in \{5k-3 | k \in \mathbb{N}\};$$

$f(x) = \varphi_2(mx)$, если номер варианта $m \in \{5k - 2 | k \in \mathbb{N}\}$;

$f(x) = \varphi_{12}(mx)$, если номер варианта $m \in \{5k - 1 | k \in \mathbb{N}\}$;

$f(x) = \varphi_6(mx)$, если номер варианта $m \in \{5k | k \in \mathbb{N}\}$.

20. С помощью дифференциала функции приближенно вычислить заданные величины, с точностью до четырех знаков после запятой. Оценить абсолютную погрешность и относительную погрешность вычисления.

- | | | |
|--|---|-------------------------------------|
| 20.1. $\sin 28^0$. | 20.2. $\cos 57^0$. | 20.3. $\operatorname{tg} 43^0$. |
| 20.4. $\operatorname{ctg} 46^0$. | 20.5. $\arcsin 0,43$. | 20.6. $\arccos 0,62$. |
| 20.7. $\operatorname{arctg} 0,91$. | 20.8. $\operatorname{arcctg} 1,22$. | 20.9. $\ln(e^3 + 0,15)$. |
| 20.10. $\sqrt{15,94}$. | 20.11. $\sqrt[3]{8,15}$. | 20.12. $\sqrt[5]{31,95}$. |
| 20.13. $5^{2,01}$. | 20.14. $\sqrt[4]{80,78}$. | 20.15. $\lg 100,02$. |
| 20.16. $\sqrt{\sin 33^0}$. | 20.17. $\cos^3 62^0$. | 20.18. $\operatorname{tg}^2 48^0$. |
| 20.19. $\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 44^0}$. | 20.20. $\arcsin^2 0,54$. | 20.21. $\arccos^3 0,57$. |
| 20.22. $\operatorname{arctg}^2 1,05$. | 20.23. $\operatorname{arcctg}^3 0,93$. | 20.24. $\ln(e^4 - 0,25)$. |
| 20.25. $\sqrt{(8,97)^3}$. | 20.26. $\sqrt[3]{(26,75)^2}$. | 20.27. $\sqrt[10]{(1023,99)^9}$. |
| 20.28. $e^{3,91}$. | 20.29. $\sqrt[4]{(624,87)^5}$. | 20.30. $\lg^2 999,92$. |

21. Используя правило Лопиталю, найти указанные пределы.

- | | | |
|---|---|--|
| 21.1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 2x}$. | 21.2. $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$. | 21.3. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \sin x)^{x^2}$. |
| 21.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)^{\operatorname{tg} \pi x}$. | 21.5. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg} 3x}$. | 21.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} 2x} \right)^{\sin 2x}$. |
| 21.7. $\lim_{x \rightarrow 2} (2 - x)^{x^3 - 5x + 2}$. | 21.8. $\lim_{x \rightarrow 0} (\lg(10 + x))^{1/x}$. | 21.9. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{ctg} 3x}$. |
| 21.10. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^{x^2 - 4}$. | 21.11. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 3x)^{1/\operatorname{tg} 2x}$. | 21.12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin 7x}$. |
| 21.13. $\lim_{x \rightarrow 4} (\ln(5 - x))^{\operatorname{sh}(4 - x)}$. | 21.14. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3)^{1/\ln(3 - x)}$. | 21.15. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)^{x^2 - 1}$. |
| 21.16. $\lim_{x \rightarrow 8} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8} \right)^{\sin \pi x}$. | 21.17. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{1/\operatorname{ctg}(x)}$. | 21.18. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2)^{2/\ln x}$. |
| 21.19. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{th} 3x)^{x^3}$. | 21.20. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{1/(4x - \pi)}$. | 21.21. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\lg 7x)^{1/x}$. |
| 21.22. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sh} x)^{\ln x^2}$. | 21.23. $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \sin x)^{\operatorname{ctg} 5x}$. | 21.24. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)^{\ln x}$. |

$$\begin{array}{lll}
21.25. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\cos(\pi x/4)} & 21.26. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 6x)^{1/\operatorname{sh} 6x} & 21.27. \quad \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{1}{x-9} \right)^{2x-18} \\
21.28. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x)^{x-1} & 21.29. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{ctg} x)^{1/(8x-2\pi)} & 21.30. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{ctg} 3x}
\end{array}$$

22. Дана функция $y = f(x)$. Необходимо: а) составить уравнение касательной и нормали к графику функции в точке $x = x_0$; б) определить под каким углом пересекаются кривая $y = f(x)$ и прямая $y = kx + b$; в) найти кинетическую энергию и ускорение тела массой m_0 килограмм, которое движется прямолинейно по закону движения $s = f(t)$, через t_0 секунды после начала движения.

$$22.1. \quad f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1, \quad x_0 = 2, \quad k = 3, \quad b = 8, \quad m_0 = 10 \text{ êã}, \quad t_0 = 5 \text{ ñ}.$$

$$22.2. \quad f(x) = \sqrt{x+6}, \quad x_0 = 3, \quad k = 1, \quad b = 4, \quad m_0 = 8 \text{ êã}, \quad t_0 = 30 \text{ ñ}.$$

$$22.3. \quad f(x) = \sqrt[3]{16-x^3}, \quad x_0 = \sqrt[3]{15}, \quad k = -1, \quad b = 4, \quad m_0 = 11 \text{ êã}, \quad t_0 = 3 \text{ ñ}.$$

$$22.4. \quad f(x) = \frac{2^{3-x}}{\ln 2}, \quad x_0 = 1, \quad k = 3, \quad b = \frac{2-6\ln 2}{\ln 2}, \quad m_0 = 10 \text{ êã}, \quad t_0 = 3 \text{ ñ}.$$

$$22.5. \quad f(x) = \ln 2 \cdot \log_2(3x+4), \quad x_0 = 4, \quad k = -1, \quad b = 2\ln 2, \quad m_0 = 100 \text{ êã}, \quad t_0 = 20 \text{ ñ}.$$

$$22.6. \quad f(x) = \arcsin(x-1), \quad x_0 = 1, \quad k = -2, \quad b = \frac{6-\pi}{6}, \quad m_0 = 50 \text{ êã}, \quad t_0 = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \text{ ñ}.$$

$$22.7. \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x_0 = 1, \quad k = 1, \quad b = -\frac{9}{5}, \quad m_0 = 28 \text{ êã}, \quad t_0 = 3 \text{ ñ}.$$

$$22.8. \quad f(x) = \frac{2^{x-4}}{\ln 2}, \quad x_0 = 2, \quad k = -4, \quad b = \frac{1+32\ln 2}{4\ln 2}, \quad m_0 = 5 \text{ êã}, \quad t_0 = 5 \text{ ñ}.$$

$$22.9. \quad f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \quad x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad k = -1, \quad b = \frac{\pi+1}{2}, \quad m_0 = 70 \text{ êã}, \quad t_0 = \frac{2\pi}{3} \text{ ñ}.$$

$$22.10. \quad f(x) = \operatorname{arcctg}(x+1), \quad x_0 = -1, \quad k = -2, \quad b = \frac{\pi}{4}, \quad m_0 = 105 \text{ êã}, \quad t_0 = (\sqrt{3}-1) \text{ ñ}.$$

$$22.11. \quad f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 3, \quad x_0 = 3, \quad k = 1, \quad b = 23, \quad m_0 = 12 \text{ êã}, \quad t_0 = 7 \text{ ñ}.$$

$$22.12. \quad f(x) = \sqrt{2x+2}, \quad x_0 = 1, \quad k = -1, \quad b = 11, \quad m_0 = 6 \text{ êã}, \quad t_0 = 17 \text{ ñ}.$$

$$22.13. \quad f(x) = \sqrt[3]{35-x^3}, \quad x_0 = 3, \quad k = -1, \quad b = 5, \quad m_0 = 13 \text{ êã}, \quad t_0 = 1 \text{ ñ}.$$

$$22.14. \quad f(x) = \frac{3^{5-x}}{\ln 3}, \quad x_0 = 2, \quad k = 2, \quad b = \frac{9-6\ln 3}{\ln 3}, \quad m_0 = 20 \text{ êã}, \quad t_0 = 5 \text{ ñ}.$$

$$22.15. \quad f(x) = \ln 4 \cdot \log_4(x+5), \quad x_0 = 59, \quad k = -3, \quad b = \ln 4 - 3, \quad m_0 = 90 \text{ êã}, \quad t_0 = 11 \text{ ñ}.$$

$$22.16. \quad f(x) = \arccos(x-1), \quad x_0 = 1, \quad k = 2, \quad b = \frac{2\pi-3}{3}, \quad m_0 = 25 \text{ êã}, \quad t_0 = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \text{ ñ}.$$

$$22.17. \quad f(x) = \frac{1}{4+x^2}, \quad x_0 = 2, \quad k = 2, \quad b = \frac{11}{5}, \quad m_0 = 24 \text{ êã}, \quad t_0 = 4 \text{ ñ}.$$

$$22.18. f(x) = \frac{3^{x-3}}{\ln 3}, x_0 = -1, k = -1, b = \frac{1+9\ln 3}{9\ln 3}, m_0 = 30 \text{ \AA}, t_0 = 4 \text{ \AA}.$$

$$22.19. f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right), x_0 = \frac{2\pi}{3}, k = 1, b = \frac{1-\pi}{2}, m_0 = 80 \text{ \AA}, t_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ \AA}.$$

$$22.20. f(x) = \arctg(x-1), x_0 = 1, k = -2, b = -\frac{\pi}{4}, m_0 = 175 \text{ \AA}, t_0 = (\sqrt{3}+1) \text{ \AA}.$$

$$22.21. f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2, x_0 = 4, k = 2, b = 50, m_0 = 14 \text{ \AA}, t_0 = 9 \text{ \AA}.$$

$$22.22. f(x) = \sqrt{3x+19}, x_0 = 2, k = -1, b = 3, m_0 = 4 \text{ \AA}, t_0 = 10 \text{ \AA}.$$

$$22.23. f(x) = \sqrt[4]{128-x^4}, x_0 = -2, k = 1, b = 0, m_0 = 15 \text{ \AA}, t_0 = 2 \text{ \AA}.$$

$$22.24. f(x) = \frac{4^{2-x}}{\ln 4}, x_0 = 0, k = 1, b = \frac{4-\ln 4}{\ln 4}, m_0 = 16 \text{ \AA}, t_0 = 2 \text{ \AA}.$$

$$22.25. f(x) = \ln 3 \cdot \log_3(2x+5), x_0 = 11, k = -2, b = 2\ln 3 + 4, m_0 = 10 \text{ \AA}, t_0 = 38 \text{ \AA}.$$

$$22.26. f(x) = \arctg(x+1), x_0 = -1, k = -1, b = \frac{\pi}{4}, m_0 = 75 \text{ \AA}, t_0 = (\sqrt{3}-1) \text{ \AA}.$$

$$22.27. f(x) = \frac{1}{9+x^2}, x_0 = 3, k = 3, b = -\frac{29}{10}, m_0 = 20 \text{ \AA}, t_0 = 4 \text{ \AA}.$$

$$22.28. f(x) = \frac{4^{x-5}}{\ln 4}, x_0 = 5, k = -2, b = \frac{1+96\ln 4}{16\ln 4}, m_0 = 12 \text{ \AA}, t_0 = 6 \text{ \AA}.$$

$$22.29. f(x) = \frac{16+x^4}{x^4}, x_0 = -2, k = 1, b = 16, m_0 = 256 \text{ \AA}, t_0 = 2 \text{ \AA}.$$

$$22.30. f(x) = \arcsin(2-x), x_0 = 2, k = 2, b = \frac{\pi-18}{6}, m_0 = 125 \text{ \AA}, t_0 = \frac{4-\sqrt{3}}{2} \text{ \AA}.$$

23. Найти наибольшее $\max_{[a;b]} f(x)$ и наименьшее $\min_{[a;b]} f(x)$ значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

$$23.1. f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - 3\cos x - 2x, [0; \pi].$$

$$23.2. f(x) = \sin x + \sin 2x - x, [0; 2\pi].$$

$$23.3. f(x) = -\cos x + \sin x - 1, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

$$23.4. f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 2x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$23.5. f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 8x - \frac{1}{6}\sin 6x - x, [0; \pi].$$

$$23.6. f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x, [-\pi; \pi].$$

$$23.7. f(x) = 12\cos x + 6\cos 2x + 4\cos 3x + 3\cos 4x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$23.8. f(x) = 3\cos 5x - 5\sin 3x, \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$23.9. f(x) = \cos 3x - \sin 3x, [0; \pi].$$

$$23.10. f(x) = 3x - \frac{5}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 4x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right].$$

$$23.11. f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos x, [-\pi; \pi].$$

$$23.12. f(x) = \cos 2x + \sin x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

$$23.13. f(x) = \cos 6x - 15\cos 2x + 8, \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$23.14. f(x) = 5\cos x + 2,5\sin 2x + 3x, \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$23.15. f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos x, [-\pi; \pi].$$

$$23.16. f(x) = 2\sin^2 x \cdot \cos x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

$$23.17. f(x) = \sin 2x - 2\cos x - 2x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$23.18. f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + 6 \cdot \cos x + 6 \cdot \sin x + 6 \cdot x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right].$$

$$23.19. f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos x - 4\sin x + 4x, \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right].$$

$$23.20. f(x) = -\frac{5}{2} \cdot \cos 2x + 11 \cdot \cos x - 11 \cdot \sin x + 7 \cdot x, \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right].$$

$$23.21. f(x) = -2\cos 2x + 5 \cdot \sin 2x - 6x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$23.22. f(x) = \frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{6}\sin 6x - \frac{\sqrt{3}}{6}\cos 6x + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 8x, \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

$$23.23. f(x) = -\frac{1}{10}\cos 10x + \frac{1}{10}\sin 10x + \frac{\sqrt{2}}{15}\cos 15x, \left[-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}\right].$$

$$23.24. f(x) = -\frac{1}{11}\cos 11x - \frac{\sqrt{3}}{14}\cos 7x + \frac{1}{14}\sin 7x, \left[-\frac{\pi}{54}; \frac{7\pi}{12}\right].$$

$$23.25. f(x) = 4\sin x - 3\cos x - 5x, [0; 5\pi].$$

$$23.26. f(x) = -\cos 3x + \sin 3x, [0; \pi].$$

$$23.27. f(x) = -\cos x + \sin x - 0,5 \cdot \cos 2x - x, \left[-3\pi; \frac{11\pi}{6}\right].$$

$$23.28. f(x) = -\cos x + \sin x + \cos 2x - x, \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right].$$

$$23.29. f(x) = -\cos x + \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2x, [-\pi; \pi].$$

$$23.30. f(x) = -\cos x + \sin x - \sqrt{2} \cdot x, \left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right].$$

24. Решить следующие задачи.

24.1. Найти наибольший объём конуса, длина образующей которого равна $3\sqrt{3}$.

24.2. Найти высоту цилиндра, который можно вписать в шар радиуса $5\sqrt{2}$ и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

24.3. Найти радиус основания конуса с боковой поверхностью равной $(\sqrt{2} + 1) \cdot \pi$, если шар, вписанный в этот конус, имеет наибольший объём.

24.4. Найти наибольшую площадь боковой поверхности конуса, который вписан в шар радиуса $R = 3$.

24.5. Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около полушара радиуса $\sqrt{27}$, при этом центр шара совпадает с центром основания конуса.

24.6. Найти наибольший объём цилиндра, который вписан в шар радиуса $3\sqrt{3}$.

24.7. Найти отношение радиуса шара, описанного около цилиндра, с наибольшей площадью боковой поверхности, к радиусу основания этого цилиндра.

24.8. Во сколько раз объём шара, описанного около цилиндра наибольшего объёма, больше объёма этого цилиндра?

24.9. Найти отношение радиуса шара, который описан около конуса наибольшего объёма, к высоте этого конуса.

24.10. Найти радиус основания конуса наименьшего объёма, в который вписан цилиндр, радиус основания которого равен 4. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

24.11. В конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол величиной 2φ , вписана сфера, радиуса $R = 4$. При каких значениях угла φ площадь боковой поверхности конуса будет наименьшей. Найти эту наименьшую площадь.

24.12. Найти наибольшее значение объёма правильной четырёхугольной пирамиды, вершины которой принадлежат описанной сфере радиуса $R = 9$.

24.13. Найти наибольшее значение объёма правильной треугольной призмы, если расстояние от центра основания до одной из вершин другого основания равно $4\sqrt{3}$.

24.14. Найти отношение высоты конуса, описанного около цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, к высоте этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

24.15. Найти отношение радиуса основания конуса, описанного около цилиндра наибольшего объёма, к радиусу основания этого цилиндра. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают.

24.16. В правильной шестиугольной пирамиде, боковое ребро равно $l = 2$. При какой длине стороны основания объём пирамиды будет наибольшим? Найти наибольший объём пирамиды.

24.17. Найти наибольший объём цилиндра, если площадь его полной поверхности равна $S = 12\pi$.

24.18. Найти наименьшую площадь полной поверхности прямой правильной треугольной призмы объёмом $V = 36$.

24.19. Найти наибольший объём правильной четырёхугольной пирамиды с боковым ребром $l = \sqrt{2}$.

24.20. Из всех правильных треугольных призм, с заданным объёмом $V = 16\sqrt{3}$, найти призму с наименьшей суммой длин всех её рёбер. Чему равна длина стороны основания этой призмы?

24.21. Найти площадь прямоугольника наибольшей площади, который вписан в окружность радиуса $R = 4\sqrt{2}$.

24.22. Найти наименьший периметр прямоугольника с площадью $S = 36$.

24.23. Найти наибольшую площадь прямоугольника, основание которого лежит на гипотенузе длиной 13 см, описанного прямоугольного треугольника с углом составляющим 30° .

24.24. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольную трапецию с длинами оснований 24 см и 8 см и длиной высоты 12 см.

24.25. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами длиной 18 см, 24 см 30 см и имеющего с ними общий острый угол.

24.26. Первый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен десяти. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_6$.

24.27. Пятый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен двенадцати. Найти наименьшее значение произведения $S = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5$.

24.28. Четвёртый член арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$ равен четырём. Найти наименьшее значение суммы $S = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_3$.

24.29. Определить размеры открытого бассейна объёмом 64 с квадратным дном таким образом, чтобы на облицовку дна и стен плиткой пошло наименьшее количество материала.

24.30. Через какую точку на кривой $y = -x^2 + 2x$ должна проходить касательная к этой кривой, чтобы трапеция, образованная касательной, осями координат и прямой $x = 1$, имела наименьшую площадь?

25. Определить число корней уравнения $f(x) = a$, где параметр $a \in \mathbb{R}$, проведя полное исследование графика функции $y = f(x)$.

$$\begin{array}{ll}
25.1. & \text{a) } f(x) = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}; \quad \text{б) } f(x) = (3-x) \cdot e^{x-2}. \\
25.2. & \text{a) } f(x) = \frac{x^3 + 4}{(x+1)^3}; \quad \text{б) } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \\
25.3. & \text{a) } f(x) = \frac{8x^3 + 8x}{(2x-1)^3}; \quad \text{б) } f(x) = (4-x) \cdot e^{x-3}. \\
25.4. & \text{a) } f(x) = \frac{8x^3 + 8x}{(2x+1)^3}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{\ln x}{x}. \\
25.5. & \text{a) } f(x) = \frac{x^4 - 8}{(x+1)^4}; \quad \text{б) } f(x) = (-1-x) \cdot e^{x+2}. \\
25.6. & \text{a) } f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}; \quad \text{б) } f(x) = x^2 \ln x. \\
25.7. & \text{a) } f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 1}; \quad \text{б) } f(x) = (4+x) \cdot e^{-x-3}. \\
25.8. & \text{a) } f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{x \ln x}. \\
25.9. & \text{a) } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}; \quad \text{б) } f(x) = (3+2x) \cdot e^{-2x-2}. \\
25.10. & \text{a) } f(x) = \frac{x}{2-x^3}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{\ln x}{x^2}. \\
25.11. & \text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } f(x) = (x-2) \cdot e^{3-x}. \\
25.12. & \text{a) } f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}; \quad \text{б) } f(x) = x^2 \cdot \ln^2 x. \\
25.13. & \text{a) } f(x) = \frac{x^2}{x-2}; \quad \text{б) } f(x) = (5+2x) \cdot e^{-2x-4}. \\
25.14. & \text{a) } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{x^2}{\ln x}. \\
25.15. & \text{a) } f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 4}; \quad \text{б) } f(x) = (2x-1) \cdot e^{\frac{2}{x}}. \\
25.16. & \text{a) } f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}; \quad \text{б) } f(x) = x \cdot \ln^2 x. \\
25.17. & \text{a) } f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{e^{2x+2}}{2x+2}. \\
25.18. & \text{a) } f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 4x + 2}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}.
\end{array}$$

$$25.19. \text{ a) } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x}.$$

$$25.20. \text{ a) } f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \ln \frac{x}{x+2} + 2.$$

$$25.21. \text{ a) } f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{e^{5x-5}}{5x-5}.$$

$$25.22. \text{ a) } f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \ln \frac{x}{x-3} - 3.$$

$$25.23. \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{e^{7-x}}{7-x}.$$

$$25.24. \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x-4}; \quad \text{б) } f(x) = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3.$$

$$25.25. \text{ a) } f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2}; \quad \text{б) } f(x) = -\frac{e^{-3-x}}{3+x}.$$

$$25.26. \text{ a) } f(x) = \frac{8x-8}{x^2 + 2x + 1}; \quad \text{б) } f(x) = 3 \cdot \ln \frac{x}{x+3} - 7.$$

$$25.27. \text{ a) } f(x) = \frac{x^3 - 32}{x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{e^{9+x}}{9+x}.$$

$$25.28. \text{ a) } f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x+1}; \quad \text{б) } f(x) = e^{2x-x^2}.$$

$$25.29. \text{ a) } f(x) = \frac{x^5}{x^4 - 1}; \quad \text{б) } f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6).$$

$$25.30. \text{ a) } f(x) = \frac{1 - 2x^3}{x^2}; \quad \text{б) } f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$