

$$6.29 \quad f_1 = -81x, f_2 = 15\operatorname{sh}3t, m = 1z, x_0 = 10m, v_0 = 12 \text{ м/с}.$$

$$6.30 \quad f_1 = 72x, f_2 = 2\operatorname{sh}3t, m = 2z, x_0 = 5m, v_0 = 5 \text{ м/с}.$$

РАЗДЕЛ 2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
3. Определение двойного интеграла.
4. Определение тройного интеграла.
5. Свойства двойных интегралов.
6. Свойства тройных интегралов.
7. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.
8. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан.
9. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
10. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.
11. Замена переменных в тройном интеграле. Якобиан.
12. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.
13. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.

ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

7. Вычислить двойной интеграл по области G , ограниченной указанными линиями. Вычисления произвести с внешним интегрированием по переменной x и внешним интегрированием по переменной y . Начертить область интегрирования.

$$7.1 \quad \iint_G (x^2 y + y^2 x) dx dy, \quad G: y = x, x + y = 1, y = 0, 25.$$

$$7.2 \quad \iint_G (x^2 + yx + y^2) dx dy, \quad G: y = x^2, x + y = 2.$$

$$7.3 \quad \iint_G (x^2 - y + y^2 x) dx dy, \quad G: y = x^2, x = y^3.$$

$$7.4 \quad \iint_G (5x^2 y - 3y^2 x^3) dx dy, \quad G: y = x, x + y = 3, y = 1.$$

$$7.5 \quad \iint_G (x^2 - y^2) dx dy, \quad G: y - x^2 = 0, x - y^2 = 0.$$

$$7.6 \quad \iint_G (2x^3 y + 3y^2 x) dx dy, \quad G: y = x^3, y = x^2.$$

$$7.7 \quad \iint_G (4x^3 + 3y^2 x^2) dx dy, \quad G: y = x^3, y = x, x \geq 0.$$

$$7.8 \quad \iint_G (5x^4 + 2y^3 x^2) dx dy, \quad G: y = x^3, y = x, x \leq 0.$$

- 7.9 $\iint_G \frac{y^2}{x^2} dx dy, \quad G: y = x^2, y = 1, x = 0, 5.$
- 7.10 $\iint_G \frac{y^3}{x^3} dx dy, \quad G: y^2 = x, x = 1, y = 0, 5.$
- 7.11 $\iint_G (2x^2 y - y^2 x) dx dy, \quad G: y = 2x, x + y = 3, y = 1.$
- 7.12 $\iint_G (2x^2 - 3yx + 3y^3) dx dy, \quad G: y = x^2, 2x + y = 3.$
- 7.13 $\iint_G (2x^2 - 3y + 4yx) dx dy, \quad G: y = x^2, y = 8 - x^2.$
- 7.14 $\iint_G (4xy - 3y^2 x^2) dx dy, \quad G: y = x, x + y = 4, y = 1.$
- 7.15 $\iint_G (3x^2 + 9y^2) dx dy, \quad G: y = x^2 - 4, y = 4 - x^2.$
- 7.16 $\iint_G (6x^3 y + 6y^3 x) dx dy, \quad G: y = x^3, y^3 = x, y \leq 0.$
- 7.17 $\iint_G (5x^4 - 6y^2 x^3) dx dy, \quad G: y = x^5, y = x, x \geq 0.$
- 7.18 $\iint_G (6x^5 + 16y^4 x^4) dx dy, \quad G: y = x^5, y = x, x \leq 0.$
- 7.19 $\iint_G \frac{16y^4}{x^4} dx dy, \quad G: y = x^3, y = 1, x = 0.$
- 7.20 $\iint_G \frac{12y^2}{x^3} dx dy, \quad G: y^3 = x, x = 1, y = 0, 5.$
- 7.21 $\iint_G (9x^2 y^2 - 4yx) dx dy, \quad G: y = 3x, x + y = 4, y = 1.$
- 7.22 $\iint_G (3x^2 + 4yx + 8y^3) dx dy, \quad G: y = x^2, 3x + y = 4.$
- 7.23 $\iint_G (4x^3 - 3y^2 + 9y^2 x^2) dx dy, \quad G: y = x^2, y = 18 - x^2.$
- 7.24 $\iint_G (6x^2 y - 12y^3 x^2) dx dy, \quad G: y = x, x + y = 8, y = 2.$
- 7.25 $\iint_G (4x^3 + 12y^3) dx dy, \quad G: y = -1 + x^2, y = 1 - x^2.$
- 7.26 $\iint_G (10xy^4 + 10yx^4) dx dy, \quad G: y = x^4, y^4 = x.$
- 7.27 $\iint_G (6x^5 - 20y^3 x^4) dx dy, \quad G: y = x^6, y = x^2, x \geq 0.$

$$7.28 \quad \iint_G (84x^5 + 90y^4x^4) dx dy, \quad G: y = x^6, y = x^2, x \leq 0.$$

$$7.29 \quad \iint_G \frac{36y^5}{x^5} dx dy, \quad G: y = x^4, y = 16, x \geq 0.$$

$$7.30 \quad \iint_G \frac{20y^3}{x^4} dx dy, \quad G: y^4 = x, x = 16, y \leq 1.$$

8. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (mx - ny) dx dy$, где число m – номер

варианта типового расчета, n – число, равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки. Область G ограничена линиями l_1, l_2, l_3 и l_4 . Указать координаты нормальных и направляющих векторов этих линий. Найти:

а) координаты всех точек пересечения линий, используя при решении систем формулы Крамера;

б) внутренние углы фигуры, ограниченной указанной областью;

в) площадь фигуры, ограниченной областью G ;

г) проекцию одной из сторон фигуры на смежную сторону;

д) расстояние между противоположными сторонами фигуры, ограниченной областью G . Начертить область интегрирования.

$$8.1 \quad l_1: 3x + y = 4, l_2: 2x - y = 1, l_3: 3x + y = 8, l_4: 2x - y = 2.$$

$$8.2 \quad l_1: 2x + 3y = 5, l_2: 3x - 2y = 1, l_3: 2x + 3y = 10, l_4: 3x - 2y = 2.$$

$$8.3 \quad l_1: 4x + 3y = -7, l_2: 3x - y = -2, l_3: 4x + 3y = 10, l_4: 3x - y = 1.$$

$$8.4 \quad l_1: x + y = 1, l_2: 4x - y = 4, l_3: x + y = 3, l_4: 4x - y = 7.$$

$$8.5 \quad l_1: 5x + 2y = 3, l_2: 6x - y = 7, l_3: 5x + 2y = 13, l_4: 6x - y = 19.$$

$$8.6 \quad l_1: 2x + 3y = 5, l_2: 3x - 2y = 1, l_3: 2x + 3y = 15, l_4: 3x - 2y = 3.$$

$$8.7 \quad l_1: 5x + y = 1, l_2: 7x - y = -1, l_3: 5x + y = 13, l_4: 7x - y = 11.$$

$$8.8 \quad l_1: 2x + 5y = 7, l_2: 3x - 4y = -1, l_3: 2x + 5y = 14, l_4: 3x - 4y = -2.$$

$$8.9 \quad l_1: 2x + y = 5, l_2: 2x - y = -11, l_3: 2x + y = 10, l_4: 2x - y = 2.$$

$$8.10 \quad l_1: x + 3y = 4, l_2: x - 2y = -1, l_3: x + 3y = 8, l_4: x - 2y = -2.$$

$$8.11 \quad l_1: x + y = 0, l_2: x - y = 0, l_3: x + y = 5, l_4: x - y = 1.$$

$$8.12 \quad l_1: 4x + 5y = 9, l_2: 3x - y = 2, l_3: 4x + 5y = 6, l_4: 3x - y = -5.$$

$$8.13 \quad l_1: 3x + 2y = 5, l_2: 4x - 5y = 22, l_3: 3x + 2y = 22, l_4: 4x - 5y = 14.$$

$$8.14 \quad l_1: x + 6y = -7, l_2: x - 5y = 4, l_3: x + 6y = 7, l_4: x - 5y = -4.$$

$$8.15 \quad l_1: 4x + 3y = -1, l_2: 3x - 4y = -7, l_3: 4x + 3y = 1, l_4: 3x - 4y = 7.$$

$$8.16 \quad l_1: x + y = -4, l_2: 2x - 5y = 6, l_3: x + y = 4, l_4: 2x - y = 2.$$

$$8.17 \quad l_1: 5x + 2y = -6, l_2: 2x - 5y = -14, l_3: 5x + 2y = 6, l_4: 2x - 5y = 14.$$

$$8.18 \quad l_1: 2x + 5y = -12, l_2: 4x - 3y = 2, l_3: 2x + 5y = 12, l_4: 4x - 3y = -2.$$

$$8.19 \quad l_1: 4x + y = 6, l_2: 3x - y = 1, l_3: 4x + y = 17, l_4: 3x - y = 4.$$

- 8.20 $l_1: 5x + y = 7, l_2: 4x - y = 2, l_3: 5x + y = 25, l_4: 4x - y = 11.$
 8.21 $l_1: x + 3y = 5, l_2: x - 2y = 0, l_3: x + 3y = 19, l_4: x - 2y = -6.$
 8.22 $l_1: x + 4y = 6, l_2: x - 3y = -1, l_3: x + 4y = 17, l_4: x - 3y = -4.$
 8.23 $l_1: x + 5y = 6, l_2: x - 4y = -3, l_3: x + 5y = -3, l_4: x - 4y = 6.$
 8.24 $l_1: 3x + 5y = -2, l_2: 2x - 5y = 7, l_3: 3x + 5y = 16, l_4: 2x - 5y = -6.$
 8.25 $l_1: 2x + 7y = 3, l_2: 2x - 5y = -9, l_3: 2x + 7y = 9, l_4: 2x - 5y = -3.$
 8.26 $l_1: 3x + 4y = 7, l_2: 4x - 3y = 1, l_3: 3x + 4y = 18, l_4: 4x - 3y = -1.$
 8.27 $l_1: 7x + 2y = 3, l_2: 3x - 5y = 13, l_3: 7x + 2y = -5, l_4: 3x - 5y = -8.$
 8.28 $l_1: 5x + 3y = 2, l_2: 3x - 4y = 7, l_3: 5x + 3y = 1, l_4: 3x - 4y = 18.$
 8.29 $l_1: x + 8y = 7, l_2: 4x - 7y = -11, l_3: x + 8y = 8, l_4: 4x - 7y = -7.$
 8.30 $l_1: 4x + 7y = -11, l_2: 5x - 3y = -2, l_3: 4x + 7y = 18, l_4: 5x - 3y = -1.$

9. Вычислить данные двойные интегралы. Начертить область интегрирования.

- 9.1 $\iint_G \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}, y \leq x, y \geq 0, x \geq 0.$
 9.2 $\iint_G \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{9} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}, y \geq x, y \geq 0, x \geq 0.$
 9.3 $\iint_G \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, y \geq -x, y \geq 0, x \leq 0.$
 9.4 $\iint_G \arccos(x^2 + y^2) dx dy, \quad G: \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \leq -x, y \geq 0, x \leq 0.$
 9.5 $\iint_G \arcsin(x^2 + y^2) dx dy, \quad G: \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}, y \geq x, y \leq 0, x \leq 0.$
 9.6 $\iint_G e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \ln^2 4 \leq x^2 + y^2 \leq \ln^2 5, y \leq x, y \leq 0, x \leq 0.$
 9.7 $\iint_G \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \ln^2 5 \leq x^2 + y^2 \leq \ln^2 6, y \leq -x, y \leq 0, x \geq 0.$
 9.8 $\iint_G \frac{\arccos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, y \geq -x, y \leq 0, x \geq 0.$
 9.9 $\iint_G \frac{\arcsin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}, y \leq x, y \geq -x, x \geq 0.$
 9.10 $\iint_G \arccot \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq -x, y \geq x, y \geq 0.$

- 9.11 $\iint_G \arctg \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \leq -x, y \geq x, x \leq 0.$
- 9.12 $\iint_G \frac{\arcc \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \leq -x, y \leq x, y \leq 0.$
- 9.13 $\iint_G \frac{\arctg \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq -x, y \geq 0.$
- 9.14 $\iint_G \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\cos^3 \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{16}, y \leq -x, x \leq 0.$
- 9.15 $\iint_G \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sin^3 \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}, y \leq x, x \geq 0.$
- 9.16 $\iint_G \arctg \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq \sqrt{3} \cdot x, y \geq 0, x \geq 0.$
- 9.17 $\iint_G \arctg \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, x \geq 0.$
- 9.18 $\iint_G \arctg \frac{y}{x} \cdot \ln \arctg \frac{y}{x} dx dy, \quad G: 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \geq -\sqrt{3} \cdot x, y \geq 0, x \leq 0.$
- 9.19 $\iint_G \frac{\arccos \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}}{\sqrt[4]{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 16 \leq x^2 + y^2 \leq 81, y \leq -x, y \geq 0, x \leq 0.$
- 9.20 $\iint_G \frac{\arcsin \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}}{\sqrt[8]{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: 256 \leq x^2 + y^2 \leq 6561, y \geq x, y \leq 0, x \leq 0.$
- 9.21 $\iint_G \left((x^2 + y^2) \cdot \arctg \frac{y}{x} \cdot e^{\arctg \frac{y}{x}} \right) dx dy, \quad G: 16 \leq x^2 + y^2 \leq 25, y \leq x, y \leq 0, x \leq 0.$
- 9.22 $\iint_G \left(\arctg \frac{y}{x} \cdot \frac{\ln \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy, \quad G: \ln^2 2 \leq x^2 + y^2 \leq \ln^2 3, y \leq x, y \leq 0, x \geq 0.$
- 9.23 $\iint_G \left(\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{\arccos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy, \quad G: \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq 0, x \geq 0.$
- 9.24 $\iint_G \frac{2 \arcsin \sqrt{x^2 + y^2}}{\arctg \frac{y}{x} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \leq \sqrt{3} \cdot x, y \geq -\sqrt{3} \cdot x, x \geq 0.$

$$9.25 \quad \iint_G \frac{\arccos \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\arccos \operatorname{tg} \frac{x}{y}} dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq \sqrt{3} \cdot x, y \geq 0.$$

$$9.26 \quad \iint_G \left(\sqrt{\arccos \frac{y}{x}} \cdot \arccos \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \leq -x, y \geq \sqrt{3}x, x \leq 0.$$

$$9.27 \quad \iint_G \frac{\arccos \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\arccos \operatorname{tg}^2 \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad G: \frac{1}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \leq -\sqrt{3} \cdot x, y \leq x, y \leq 0.$$

$$9.28 \quad \iint_G \left(\arccos \operatorname{tg}^3 \frac{y}{x} \cdot \frac{\arccos \operatorname{tg} (2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy, \quad G: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0.$$

$$9.29 \quad \iint_G \left(\sqrt{\arccos \operatorname{tg}^3 \frac{y}{x}} \cdot \frac{\sin \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{\cos^3 \sqrt{4x^2 + 4y^2}} \right) dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}, y \leq -\sqrt{3}x, x \leq 0.$$

$$9.30 \quad \iint_G \left(\arccos \operatorname{tg}^2 \frac{y}{x} \cdot \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sin^3 \sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy, \quad G: \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{16}, y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0.$$

10. Вычислить тройной интеграл.

$$10.1 \quad \iiint_{\Omega} (3x^2 - 5xy + 4yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq x^2.$$

$$10.2 \quad \iiint_{\Omega} (4xz - 2xy + 4yz) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x, 0 \leq z \leq y.$$

$$10.3 \quad \iiint_{\Omega} (2y^2 - 5xz + z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq y^2.$$

$$10.4 \quad \iiint_{\Omega} (4x^2 - 6y + 24xyz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^3, 0 \leq z \leq 1 - x.$$

$$10.5 \quad \iiint_{\Omega} (24x^2y - 36xy^2 + 4yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

$$10.6 \quad \iiint_{\Omega} (6zx^2 - 4y^3 + 9y^2z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4 - x, 0 \leq z \leq y.$$

$$10.7 \quad \iiint_{\Omega} (4y^3 - 24x^2z + 3z^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - 2x - 3y.$$

$$10.8 \quad \iiint_{\Omega} (6z - 4x + 4z) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq 4 - x - y.$$

$$10.9 \quad \iiint_{\Omega} (9x^2 - 12y^2 + 9z^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1 + x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2.$$

$$10.10 \quad \iiint_{\Omega} (8x - 6xz + 6yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 0, -1 - x \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 3 - x - y.$$

- 10.11 $\iiint_{\Omega} (3zx^2 - 4xy^2 + 3yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 5-x-y.$
- 10.12 $\iiint_{\Omega} (18y^2 - 48x + 48yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq 4-x^2.$
- 10.13 $\iiint_{\Omega} (3x-5y+4z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x, 0 \leq z \leq 4-y^2.$
- 10.14 $\iiint_{\Omega} (18yx^2 - 2x + 4yz) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x^2, 0 \leq z \leq 5-x^2.$
- 10.15 $\iiint_{\Omega} (6xy^2 - 3x^2 + 36yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 1, x^2-1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 9-y^2.$
- 10.16 $\iiint_{\Omega} (18x^2 - 4xy^2 + 3yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3-x, 0 \leq z \leq 9x^2.$
- 10.17 $\iiint_{\Omega} (8z - 4xy + 6y^2z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4-x, 0 \leq z \leq 8-x^2-y^2.$
- 10.18 $\iiint_{\Omega} (6y^2 - 24xzy + z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4x^2, 0 \leq z \leq 2y^2.$
- 10.19 $\iiint_{\Omega} (6x^2 - 6xy + 48xyz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 8x^3, 0 \leq z \leq 8-x.$
- 10.20 $\iiint_{\Omega} (9x^2y^2 - 6xy^2 + 3z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq 6-x-y.$
- 10.21 $\iiint_{\Omega} (6z - 24y^3 + 18y^2z^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5-x, 0 \leq z \leq 6-y^2.$
- 10.22 $\iiint_{\Omega} (9y^2 - 9x^2 + 6xz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 0, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-3x-2y.$
- 10.23 $\iiint_{\Omega} (zx^2 - xyz) dx dy dz, \quad \Omega: -1 \leq x \leq 0, x^2-1 \leq y \leq 1-x^2, 0 \leq z \leq 8-2x-2y.$
- 10.24 $\iiint_{\Omega} (3x^2 - 9y^2 + 6z^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2+x, 0 \leq z \leq 2x^2+2y^2.$
- 10.25 $\iiint_{\Omega} (6y^2x - 6yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 0, -2-x \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 8-3x-3y.$
- 10.26 $\iiint_{\Omega} (4zx - 4xy + 4z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 2, x-2 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 10-2x-2y.$
- 10.27 $\iiint_{\Omega} (6y^2x - 8xyz + 6yz^2) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 1, 8x^3 \leq y \leq 8x^2, 0 \leq z \leq 8-x^2.$
- 10.28 $\iiint_{\Omega} (2x-3y+4z) dx dy dz, \quad \Omega: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4-x, 0 \leq z \leq 9-y^2.$
- 10.29 $\iiint_{\Omega} (8yx - 4xz + 24yz) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 4-x^2, 0 \leq z \leq 12-x^2.$
- 10.30 $\iiint_{\Omega} (6y^2 - 8xyz + 3z^2) dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq x \leq 2, x^2-4 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 16-y^2.$

11. Вычислить тройной интеграл $\iiint_{\Omega} (mx + ny + pz) dx dy dz$, где число m

– номер варианта типового расчета, n – число, равное сумме двух последних цифр номера зачетной книжки, а число p – удвоенная сумма всех корней уравнения $x^3 - (m + n + 1) \cdot x^2 + (mn + n + m) \cdot x - nm = 0$, с учетом кратности его корней, а область Ω ограничена плоскостями π_i ($i = \overline{1,6}$). Записать координаты нормальных векторов всех плоскостей и указать, какие из плоскостей параллельны. Найти угол между плоскостями π_1 и π_2 , а также записать уравнение прямой, являющейся пересечением этих плоскостей. Вычислить объём параллелепипеда, образованного пересечением этих шести плоскостей, и расстояние от плоскости π_4 до плоскости π_1 .

Указание. Для вычисления объёма параллелепипеда необходимо найти координаты четырёх его вершин: $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_6$, $C = \pi_1 \cap \pi_5 \cap \pi_6$, $D = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$. При решении четырёх систем линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными можно использовать любую компьютерную программу, которая содержит математический пакет.

$$11.1 \quad \begin{aligned} \pi_1: 2x + 3y + 6z = 11, \quad \pi_2: 4x - 12y + 5z = -3, \quad \pi_3: -2x + 5y - 14z = -11, \\ \pi_4: 2x + 3y + 6z = 25, \quad \pi_5: 4x - 12y + 5z = -18, \quad \pi_6: -2x + 5y - 14z = -17. \end{aligned}$$

$$11.2 \quad \begin{aligned} \pi_1: 2x + 6y + 3z = 11, \quad \pi_2: 12x - 4y - 5z = 3, \quad \pi_3: 5x - 14y - 2z = -11, \\ \pi_4: 2x + 6y + 3z = 28, \quad \pi_5: 12x - 4y - 5z = 2, \quad \pi_6: 5x - 14y - 2z = -36. \end{aligned}$$

$$11.3 \quad \begin{aligned} \pi_1: 6x + 3y + 2z = 11, \quad \pi_2: 12x - 5y - 4z = 3, \quad \pi_3: -2x - 14y + 5z = -11, \\ \pi_4: 6x + 3y + 2z = 25, \quad \pi_5: 12x - 5y - 4z = 1, \quad \pi_6: -2x - 14y + 5z = -36. \end{aligned}$$

$$11.4 \quad \begin{aligned} \pi_1: 3x + 2y + 6z = 11, \quad \pi_2: -5x - 4y + 12z = 3, \quad \pi_3: 5x - 2y - 14z = -11, \\ \pi_4: 3x + 2y + 6z = 24, \quad \pi_5: -5x - 4y + 12z = 2, \quad \pi_6: 5x - 2y - 14z = -24. \end{aligned}$$

$$11.5 \quad \begin{aligned} \pi_1: 2x + 3y - 6z = -1, \quad \pi_2: -4x + 12y - 5z = 3, \quad \pi_3: -14x + 5y - 2z = -11, \\ \pi_4: 2x + 3y - 6z = 1, \quad \pi_5: -4x + 12y - 5z = 18, \quad \pi_6: -14x + 5y - 2z = -17. \end{aligned}$$

$$11.6 \quad \begin{aligned} \pi_1: 2x - 6y + 3z = -7, \quad \pi_2: -12x + 4y - 5z = -9, \quad \pi_3: -14x - 2y + 5z = -13, \\ \pi_4: 2x - 6y + 3z = -2, \quad \pi_5: -12x + 4y - 5z = 6, \quad \pi_6: -14x - 2y + 5z = 17. \end{aligned}$$

$$11.7 \quad \begin{aligned} \pi_1: -6x + 3y + 2z = 5, \quad \pi_2: -12x - 5y + 4z = -1, \quad \pi_3: 2x - 14y - 5z = -19, \\ \pi_4: -6x + 3y + 2z = 10, \quad \pi_5: -12x - 5y + 4z = 20, \quad \pi_6: 2x - 14y - 5z = -9. \end{aligned}$$

$$11.8 \quad \begin{aligned} \pi_1: 3x + 2y - 6z = -4, \quad \pi_2: -5x + 4y - 12z = -8, \quad \pi_3: -5x + 2y - 14z = -12, \\ \pi_4: 3x + 2y - 6z = -1, \quad \pi_5: -5x + 4y - 12z = -13, \quad \pi_6: -5x + 2y - 14z = -17. \end{aligned}$$

$$11.9 \quad \begin{aligned} \pi_1: 2x - 3y + 6z = 5, \quad \pi_2: 4x - 12y - 5z = -13, \quad \pi_3: -14x - 5y + 2z = -17, \\ \pi_4: 2x - 3y + 6z = -16, \quad \pi_5: 4x - 12y - 5z = -10, \quad \pi_6: -14x - 5y + 2z = -28. \end{aligned}$$

$$11.10 \quad \begin{aligned} \pi_1: 2x + 6y - 3z = 1, \quad \pi_2: -12x - 4y + 5z = 7, \quad \pi_3: -14x + 2y - 5z = 19, \\ \pi_4: 2x + 6y - 3z = 5, \quad \pi_5: -12x - 4y + 5z = -5, \quad \pi_6: -14x + 2y - 5z = -25. \end{aligned}$$

- 11.11 $\pi_1: 6x - 3y + 2z = -1, \pi_2: -12x + 5y - 4z = 1, \pi_3: -2x - 5y + 14z = 9,$
 $\pi_4: 6x - 3y + 2z = 3, \pi_5: -12x + 5y - 4z = -7, \pi_6: -2x - 5y + 14z = -7.$
- 11.12 $\pi_1: -3x + 2y + 6z = -3, \pi_2: 5x - 4y - 12z = 17, \pi_3: -5x + 14y - 2z = 7,$
 $\pi_4: -3x + 2y + 6z = 8, \pi_5: 5x - 4y - 12z = -16, \pi_6: -5x + 14y - 2z = 12.$
- 11.13 $\pi_1: -2x + 3y + 6z = 1, \pi_2: -4x - 12y + 5z = -16, \pi_3: 14x - 5y - 2z = 9,$
 $\pi_4: -2x + 3y + 6z = 4, \pi_5: -4x - 12y + 5z = 1, \pi_6: 14x - 5y - 2z = 12.$
- 11.14 $\pi_1: -2x + 6y + 3z = 5, \pi_2: 5x - 12y - 4z = 9, \pi_3: 14x - 2y - 5z = -19,$
 $\pi_4: -2x + 6y + 3z = 3, \pi_5: 5x - 12y - 4z = -8, \pi_6: 14x - 2y - 5z = 3.$
- 11.15 $\pi_1: 6x + 3y - 2z = -8, \pi_2: -4x + 5y - 12z = -8, \pi_3: 2x - 14y + 5z = 3,$
 $\pi_4: 6x + 3y - 2z = 9, \pi_5: -4x + 5y - 12z = 1, \pi_6: 2x - 14y + 5z = -12.$
- 11.16 $\pi_1: 3x - 2y + 6z = 4, \pi_2: 12x + 4y + 5z = 9, \pi_3: 5x + 2y - 14z = -12,$
 $\pi_4: 3x - 2y + 6z = 9, \pi_5: 12x + 4y + 5z = 17, \pi_6: 5x + 2y - 14z = -9.$
- 11.17 $\pi_1: 2x - 3y - 6z = 3, \pi_2: 12x + 5y + 4z = 1, \pi_3: -14x + 5y + 2z = 2,$
 $\pi_4: 2x - 3y - 6z = 5, \pi_5: 12x + 5y + 4z = 7, \pi_6: -14x + 5y + 2z = -19.$
- 11.18 $\pi_1: 2x - 6y - 3z = 3, \pi_2: 5x + 4y + 12z = 8, \pi_3: -14x + 2y + 5z = 3,$
 $\pi_4: 2x - 6y - 3z = -4, \pi_5: 5x + 4y + 12z = 9, \pi_6: -14x + 2y + 5z = -12.$
- 11.19 $\pi_1: -6x - 3y + 2z = -4, \pi_2: 4x + 12y + 5z = 9, \pi_3: -2x + 14y + 5z = 3,$
 $\pi_4: -6x - 3y + 2z = 1, \pi_5: 4x + 12y + 5z = -77, \pi_6: -2x + 14y + 5z = -19.$
- 11.20 $\pi_1: -3x + 2y - 6z = -1, \pi_2: 12x + 4y - 5z = 16, \pi_3: 5x - 2y + 14z = 3,$
 $\pi_4: -3x + 2y - 6z = 3, \pi_5: 12x + 4y - 5z = 17, \pi_6: 5x - 2y + 14z = -9.$
- 11.21 $\pi_1: -2x + 3y - 6z = -3, \pi_2: 12x - 5y + 4z = -1, \pi_3: 14x + 5y - 2z = 3,$
 $\pi_4: -2x + 3y - 6z = 1, \pi_5: 12x - 5y + 4z = 7, \pi_6: 14x + 5y - 2z = 19.$
- 11.22 $\pi_1: -2x - 6y + 3z = -8, \pi_2: -5x + 4y + 12z = -1, \pi_3: 14x - 2y + 5z = 12,$
 $\pi_4: -2x - 6y + 3z = 1, \pi_5: -5x + 4y + 12z = 7, \pi_6: 14x - 2y + 5z = 19.$
- 11.23 $\pi_1: -6x + 3y - 2z = 5, \pi_2: 4x + 12y - 5z = -11, \pi_3: -5x + 2y + 14z = -11,$
 $\pi_4: -6x + 3y - 2z = -5, \pi_5: 4x + 12y - 5z = 11, \pi_6: -5x + 2y + 14z = 11.$
- 11.24 $\pi_1: 3x - 2y - 6z = 6, \pi_2: 12x - 4y + 5z = -5, \pi_3: 2x + 14y - 5z = 5,$
 $\pi_4: 3x - 2y - 6z = 5, \pi_5: 12x - 4y + 5z = 16, \pi_6: 2x + 14y - 5z = -12.$
- 11.25 $\pi_1: -2x - 3y + 6z = 5, \pi_2: 12x + 5y - 4z = -17, \pi_3: 14x - 5y + 2z = -9,$
 $\pi_4: -2x - 3y + 6z = 3, \pi_5: 12x + 5y - 4z = 1, \pi_6: 14x - 5y + 2z = -3.$
- 11.26 $\pi_1: -2x + 6y - 3z = 4, \pi_2: 5x - 4y + 12z = 1, \pi_3: 14x + 2y - 5z = 16,$
 $\pi_4: -2x + 6y - 3z = -9, \pi_5: 5x - 4y + 12z = 16, \pi_6: 14x + 2y - 5z = -7.$
- 11.27 $\pi_1: 6x - 3y - 2z = -8, \pi_2: -4x + 12y + 5z = 9, \pi_3: 2x + 14y + 5z = 3,$
 $\pi_4: 6x - 3y - 2z = -1, \pi_5: -4x + 12y + 5z = 7, \pi_6: 2x + 14y + 5z = 9.$

- 11.28 $\pi_1: -3x - 2y + 6z = -1, \pi_2: -12x + 4y + 5z = -16, \pi_3: 5x + 2y + 14z = 3,$
 $\pi_4: -3x - 2y + 6z = 4, \pi_5: -12x + 4y + 5z = 9, \pi_6: 5x + 2y + 14z = 16.$
- 11.29 $\pi_1: 6x - 2y - 3z = 1, \pi_2: -12x + 5y + 4z = 1, \pi_3: 14x + 5y + 2z = 3,$
 $\pi_4: 6x - 2y - 3z = 4, \pi_5: -12x + 5y + 4z = -7, \pi_6: 14x + 5y + 2z = 19.$
- 11.30 $\pi_1: -3x + 6y - 2z = -5, \pi_2: 5x + 4y - 12z = -7, \pi_3: 14x + 2y + 5z = 19,$
 $\pi_4: -3x + 6y - 2z = 8, \pi_5: 5x + 4y - 12z = 16, \pi_6: 14x + 2y + 5z = -3.$

12. Вычислить тройной интеграл. Начертить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на плоскость Oxy .

- 12.1 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \Omega: z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = 3, y \leq \sqrt{3} \cdot x, y \geq 0, x \geq 0.$
- 12.2 $\iiint_{\Omega} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \Omega: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \leq -x, y \leq x, y \leq 0, z \geq 0.$
- 12.3 $\iiint_{\Omega} \sqrt{z} dx dy dz, \Omega: z = 1, z = 4, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq x, y \geq 0, x \geq 0.$
- 12.4 $\iiint_{\Omega} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq -x, y \geq 0, z \geq 0.$
- 12.5 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz, \Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, x \leq 0.$
- 12.6 $\iiint_{\Omega} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \Omega: 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \leq -x, x \leq 0, z \geq 0.$
- 12.7 $\iiint_{\Omega} \frac{yz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \Omega: z = 4x^2 + 4y^2, z = 16, y \leq -\sqrt{3} \cdot x, y \geq 0, x \leq 0.$
- 12.8 $\iiint_{\Omega} x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega: 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, y \leq x, x \geq 0, z \leq 0.$
- 12.9 $\iiint_{\Omega} \frac{xy dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \Omega: z = 9x^2 + 9y^2, z = 81, y \geq x, y \leq 0, x \leq 0.$
- 12.10 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega: 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, x \geq 0, z \leq 0.$
- 12.11 $\iiint_{\Omega} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \Omega: z + x = 6, x^2 + y^2 = 6x, z \geq 0, y \leq 0.$
- 12.12 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \Omega: 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, x \geq 0, z \leq 0.$

- 12.13 $\iiint_{\Omega} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad \Omega: z + y = 8, x^2 + y^2 = 8y, z \geq 0, x \leq 0.$
- 12.14 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 18, z^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 12.15 $\iiint_{\Omega} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \Omega: z + x = 10, x^2 + y^2 = 10x, z \geq 0, y \leq 0.$
- 12.16 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz, \quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 50, z^2 = x^2 + y^2, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 12.17 $\iiint_{\Omega} y dx dy dz, \quad \Omega: z = -\sqrt{x^2 + y^2}, z = -\sqrt{32 - x^2 - y^2}, y \leq \sqrt{3} \cdot x, y \leq 0, x \leq 0.$
- 12.18 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz, \quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 98, z = -\sqrt{x^2 + y^2}, x \leq 0, y \leq 0.$
- 12.19 $\iiint_{\Omega} 3xyz^2 dx dy dz, \quad \Omega: -2 \leq z \leq 2, 25 \leq x^2 + y^2 \leq 36, y \leq -x, y \leq 0, x \geq 0.$
- 12.20 $\iiint_{\Omega} \frac{x^2 dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \Omega: 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, y \leq -x, y \geq 0, x \leq 0, z \geq 0.$
- 12.21 $\iiint_{\Omega} \frac{x dx dy dz}{x^2 + y^2}, \quad \Omega: z = x^2 + y^2, z = 8 - x^2 - y^2, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq 0, x \geq 0.$
- 12.22 $\iiint_{\Omega} 4(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 32, z^2 = x^2 + y^2, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$
- 12.23 $\iiint_{\Omega} \frac{y dx dy dz}{x^2 + y^2}, \quad \Omega: z = x^2 + y^2 - 50, z = -x^2 - y^2, y \leq \sqrt{3} \cdot x, y \geq -\sqrt{3} \cdot x, x \geq 0.$
- 12.24 $\iiint_{\Omega} \frac{y^2 dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \Omega: 64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81, y \geq x, y \leq 0, x \leq 0, z \geq 0.$
- 12.25 $\iiint_{\Omega} \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \Omega: z = -x^2 - y^2, z = -1, y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0.$
- 12.26 $\iiint_{\Omega} \frac{z^2 dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \Omega: 81 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, y \leq x, y \leq 0, x \leq 0, z \leq 0.$
- 12.27 $\iiint_{\Omega} 5xyz^4 dx dy dz, \quad \Omega: -3 \leq z \leq -1, 36 \leq x^2 + y^2 \leq 49, y \leq -x, y \geq x, x \leq 0.$
- 12.28 $\iiint_{\Omega} y dx dy dz, \quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 72, z = \sqrt{x^2 + y^2}, x \leq 0, y \leq 0.$
- 12.29 $\iiint_{\Omega} 2xyz dx dy dz, \quad \Omega: z = -2\sqrt{x^2 + y^2}, z = -2\sqrt{8 - x^2 - y^2}, y \leq -x, y \leq x, y \leq 0.$
- 12.30 $\iiint_{\Omega} 2(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 8, z^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$

РАЗДЕЛ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Вычисление с помощью двойных интегралов площадей фигур в декартовой системе координат.
2. Вычисление с помощью двойных интегралов площадей фигур в полярной системе координат.
3. Вычисление с помощью двойных интегралов объёмов тел в декартовой системе координат.
4. Вычисление с помощью двойных интегралов объёмов тел в полярной системе координат.
5. Вычисление с помощью двойных интегралов площадей поверхности.
6. Вычисление с помощью тройных интегралов объёмов тел в декартовой системе координат.
7. Вычисление с помощью тройных интегралов объёмов тел в цилиндрической системе координат.
8. Вычисление с помощью тройных интегралов объёмов тел в сферической системе координат.
9. Вычисление массы материальной пластины.
10. Вычисление координат центра масс и статических моментов материальной пластины.
11. Вычисление моментов инерции материальной пластины.
12. Вычисление массы тела.
13. Вычисление координат центра масс тела.
14. Вычисление моментов инерции тела.

ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

13. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры G , ограниченной указанными линиями. Изобразить в системе координат область интегрирования G .

13.1 $G: y = x^2, y = 2 - x^2$.

13.2 $G: y = x^2 - 1, y = 1 - x^2$.

13.3 $G: y = x^2 + 8x, y = -x^2$.

13.4 $G: y = \frac{3}{4 - x^2}, y = x^2$.

13.5 $G: y = \frac{5}{x^2 - 9}, y = x^2 - 5$.

13.6 $G: y = \frac{3}{x^2 - 4}, y = x^2 - 2$.

13.7 $G: y = \sqrt{x^3}, y = 3x$.

13.8 $G: y = -\sqrt{x^3}, y = -x^3$.

13.9 $G: y = \sqrt{x^3}, y = x^3$.

13.10 $G: y = \frac{10}{x^2}, y = 8 - x^2$.

13.11 $G: y = \frac{8}{x^3}, y = 9 - x^3$.

13.12 $G: y = \frac{4}{x^2}, y = 5 - x^2$.

$$13.13 \quad G: y = x^2 - 6, y = -x.$$

$$13.15 \quad G: y = x^2 - x, y = 2x + 2.$$

$$13.17 \quad G: y = x^2 - 1, y = x - x^2.$$

$$13.19 \quad G: y = \frac{90}{x^2 + 1}, y = x^2.$$

$$13.21 \quad G: y = \frac{2}{x^2 + 1}, y = x^2.$$

$$13.23 \quad G: y = -\sqrt{x}, y = -x^2.$$

$$13.25 \quad G: y = -\frac{2}{x}, y = 3 + x.$$

$$13.27 \quad G: y = \frac{2}{x}, y = 3 - x.$$

$$13.29 \quad G: y = x^2 + 4x, y = x.$$

$$13.14 \quad G: y = x^2 - x, y = 4x.$$

$$13.16 \quad G: y = x^2, y = 8 - x^2.$$

$$13.18 \quad G: y = x^2 - 4x, y = -x^2.$$

$$13.20 \quad G: y = \frac{32}{x^2 + 4}, y = x^2.$$

$$13.22 \quad G: y = \sqrt{x}, y = x - 2.$$

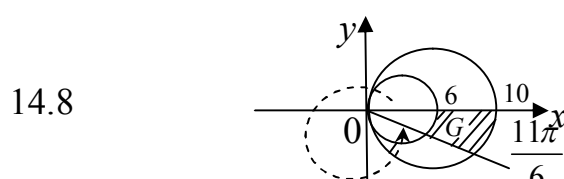
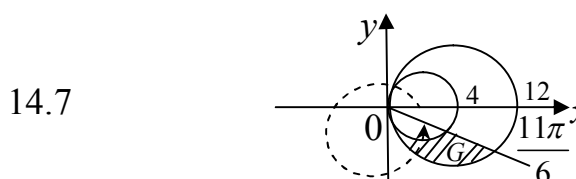
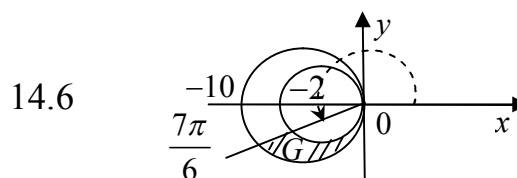
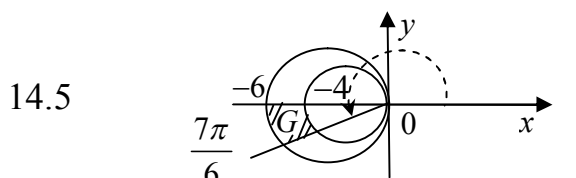
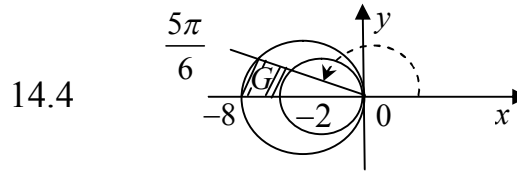
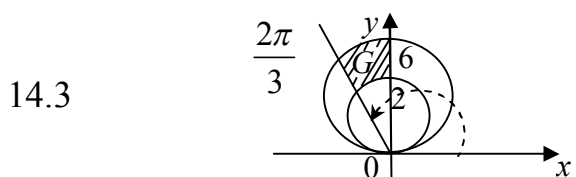
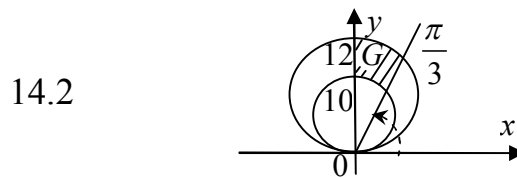
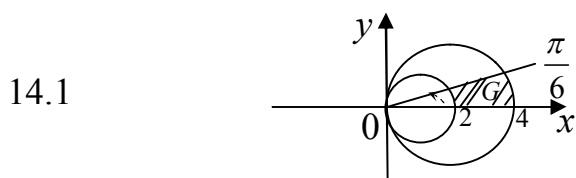
$$13.24 \quad G: y = \sqrt{x}, y = x.$$

$$13.26 \quad G: y = \frac{6}{x}, y + x = -5.$$

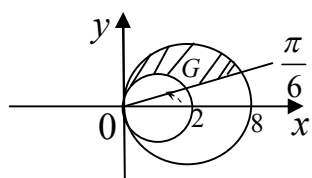
$$13.28 \quad G: y = x^2, y = 2 - x.$$

$$13.30 \quad G: y = x^2 + 4x, y = x.$$

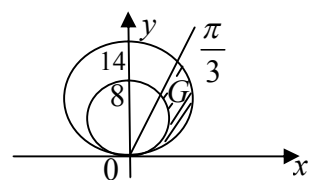
14. С помощью двойного интеграла вычислить площадь заштрихованной плоской фигуры G , ограниченной на чертеже двумя дугами окружностей со смещёнными центрами относительно начала координат и двумя отрезками прямых, проходящими через начало декартовой системы координат. Записать уравнения линий, которые ограничивают область G , в декартовой и полярной системе координат, если полюс лежит в начале координат, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс.



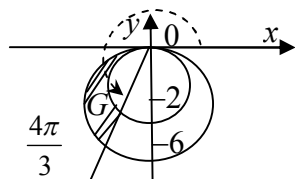
14.9



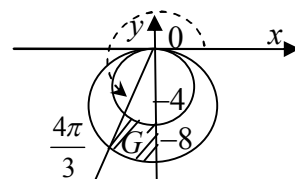
14.10



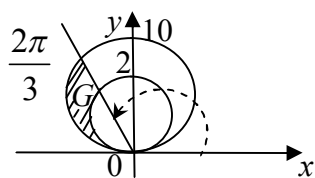
14.11



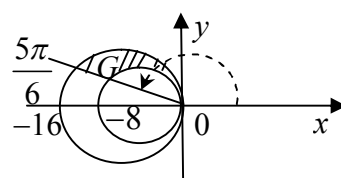
14.12



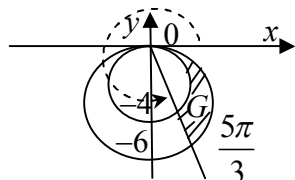
14.13



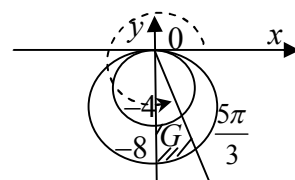
14.14



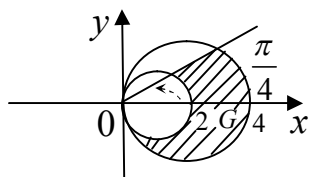
14.15



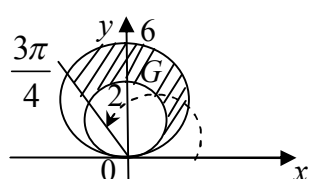
14.16



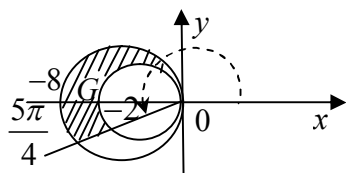
14.17



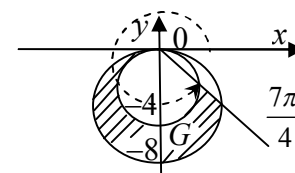
14.18



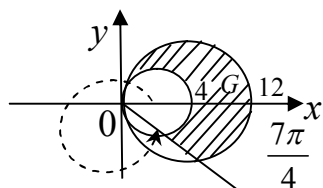
14.19



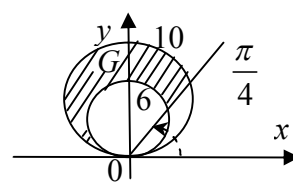
14.20



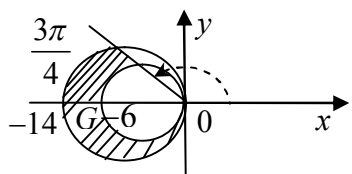
14.21



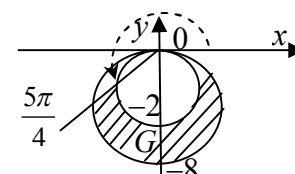
14.22



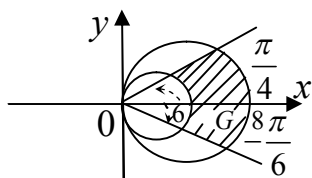
14.23



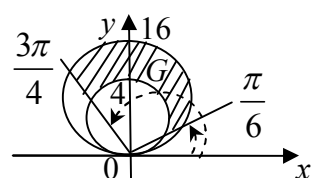
14.24



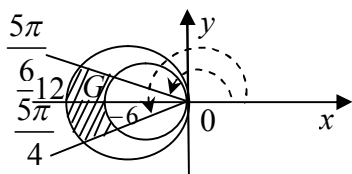
14.25



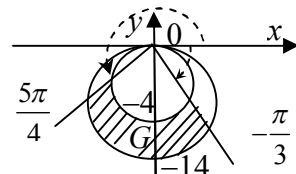
14.26



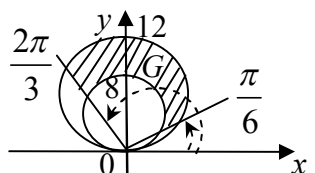
14.27



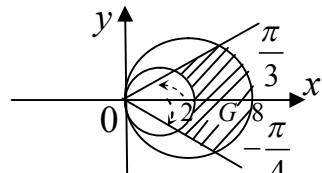
14.28



14.29



14.30



15. Вычислить площадь части поверхности параболоида или конуса (в зависимости от варианта), лежащей в соответствующем октанте, который определён системой неравенств. Изобразить соответствующую поверхность в декартовой системе координат.

15.1 $z = x^2 + y^2, z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

15.2 $y = 3 \cdot \sqrt{x^2 + z^2}, y = 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

15.3 $y = -x^2 - z^2, y = -16, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0.$

15.4 $x = -3 \cdot \sqrt{y^2 + z^2}, x = -1/2, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0.$

15.5 $x = y^2 + z^2, x = 1/4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

15.6 $z = 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0.$

15.7 $z = -x^2 - y^2, z = -4, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0.$

15.8 $y = -2 \cdot \sqrt{x^2 + z^2}, y = -4, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0.$

15.9 $y = x^2 + z^2, y = 9, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$

15.10 $x = 2 \cdot \sqrt{y^2 + z^2}, x = 1, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$

15.11 $x = -2 \cdot y^2 - 2 \cdot z^2, x = -2/9, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

15.12 $z = -3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, z = -9, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0.$

15.13 $z = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2, z = 18, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

15.14 $y = 5 \cdot \sqrt{x^2 + z^2}, y = 25, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0.$

15.15 $y = -2 \cdot x^2 - 2 \cdot z^2, y = -72, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0.$

15.16 $x = -5 \cdot \sqrt{y^2 + z^2}, x = -5/4, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$

15.17 $x = 3 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2, x = 3/16, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0.$

- 15.18 $z = 4 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, z = 32, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0.$
- 15.19 $z = -2 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2, z = -32, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$
- 15.20 $y = -4 \cdot \sqrt{x^2 + z^2}, y = -20, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 15.21 $y = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot z^2, y = 50, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 15.22 $x = 4 \cdot \sqrt{y^2 + z^2}, x = 8/3, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0.$
- 15.23 $x = -4 \cdot y^2 - 4 \cdot z^2, x = -4/25, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0.$
- 15.24 $z = -5 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, z = -20, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 15.25 $z = 6 \cdot x^2 + 6 \cdot y^2, z = 1/6, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0.$
- 15.26 $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 1/5, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 15.27 $y = -0,25 \cdot x^2 - 0,25 \cdot z^2, y = -1/16, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 15.28 $x = -6 \cdot \sqrt{y^2 + z^2}, x = -9/2, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 15.29 $x = 5 \cdot y^2 + 5 \cdot z^2, x = 125/4, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 15.30 $z = 0,5 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1/14, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0.$

16. С помощью двойного интеграла вычислить объём тела Ω . Построить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на плоскость Oxy .

- 16.1 $\Omega: z = x^2, x + y \leq 1, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.2 $\Omega: z = y^2, x + 2y \leq 4, y \geq x, x \geq 0, z \geq 0.$
- 16.3 $\Omega: z = x^2 + y^2, x + 4y \leq 8, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.4 $\Omega: z = \sqrt{y}, x + 6y \leq 12, x \geq 0, z \geq 0.$
- 16.5 $\Omega: z = \sqrt{x}, x + 7y \leq 14, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.6 $\Omega: z = 4 - x^2 - y^2, x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.7 $\Omega: z = 2 + x^2 + y^2, x \leq 2, y \leq x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.8 $\Omega: z = 5 + x^2 + y^2, x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.9 $\Omega: z = 8 - x^2 - y^2, x \geq y, x \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.10 $\Omega: x = y^2, x = 4, x + z = 4, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.11 $\Omega: y = x^2, y = 16, y + z = 16, x \geq 0, z \geq 0.$
- 16.12 $\Omega: x + y + z = 2, y = x^2, z \geq 0.$
- 16.13 $\Omega: x + 3y + z = 6, x = 3y^2, z \geq 0.$
- 16.14 $\Omega: z = x, y = x^3, y = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.15 $\Omega: x + y + z = 2, y \geq x^2, y \leq x^3, z \geq 0.$
- 16.16 $\Omega: z = x^2, x + y \leq 2, y \geq x, x \geq 0, z \geq 0.$

- 16.17 $\Omega: z = y^2, x + 3y \leq 6, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.18 $\Omega: z = x^2 + y^2, x + 5y \leq 10, y \geq x, x \geq 0, z \geq 0.$
- 16.19 $\Omega: z = \sqrt{y}, x + 2y \leq 4, x \geq 0, z \geq 0.$
- 16.20 $\Omega: z = \sqrt{x}, x + 4y \leq 8, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.21 $\Omega: z = 9 - x^2 - y^2, x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.22 $\Omega: z = 3 + x^2 + y^2, y \leq 3, y \geq x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.23 $\Omega: z = 6 + x^2 + y^2, x + 2y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.24 $\Omega: z = 18 - x^2 - y^2, y \geq x, y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.25 $\Omega: x = y^2, x = 9, x + z = 9, y \leq 0, z \geq 0.$
- 16.26 $\Omega: y = x^2, y = 25, y + z = 25, x \leq 0, z \geq 0.$
- 16.27 $\Omega: 4x + y + z = 6, y = 2x^2, z \geq 0.$
- 16.28 $\Omega: x + 8y + z = 12, x = 4y^2, z \geq 0.$
- 16.29 $\Omega: z = y, x = y^3, x = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 16.30 $\Omega: x + y + z = 3, 4y \geq x^2, 8y \leq x^3, z \geq 0.$

17. С помощью тройного интеграла вычислить объём тела Ω . Построить область интегрирования и изобразить проекцию этой области на соответствующую координатную плоскость.

- 17.1 $\Omega: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 \geq 3x^2 + 3y^2, y \leq x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 17.2 $\Omega: x = 12\sqrt{y^2 + z^2}, x = 26 - \sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 \leq -4y, z \geq 0.$
- 17.3 $\Omega: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y^2 \geq 3x^2 + 3z^2, x \leq z, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 17.4 $\Omega: y = -3x^2 - 3z^2, z = 3x^2 + 3z^2 - 54, x^2 + z^2 \leq 6x, z \leq 0.$
- 17.5 $\Omega: 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, x^2 \geq 3y^2 + 3z^2, z \geq y, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 17.6 $\Omega: z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq -4x, y \geq 0.$
- 17.7 $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z^2 \leq 3x^2 + 3y^2, y \geq x, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 17.8 $\Omega: z = -x^2 - y^2, z = x^2 + y^2 - 18, x^2 + y^2 \leq 6y, x \leq 0.$
- 17.9 $\Omega: 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z^2 \leq 3x^2 + 3y^2, y \geq -x, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$
- 17.10 $\Omega: x = -6\sqrt{y^2 + z^2}, x = 6\sqrt{y^2 + z^2} - 72, y^2 + z^2 \leq 12z, y \geq 0.$
- 17.11 $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y^2 \leq 3x^2 + 3z^2, x \geq z, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- 17.12 $\Omega: y = -5x^2 - 5z^2, z = 5x^2 + 5z^2 - 250, x^2 + z^2 \leq -10x, z \geq 0.$
- 17.13 $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, x^2 \leq 3y^2 + 3z^2, z \leq y, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 17.14 $\Omega: z = -3\sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2} - 12, x^2 + y^2 \leq -6y, x \geq 0.$
- 17.15 $\Omega: 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z^2 \geq 3x^2 + 3y^2, y \leq -x, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$

- 17.16 $\Omega: z = x^2 + y^2, z = 32 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq -8x, y \leq 0.$
- 17.17 $\Omega: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, y^2 \leq 3x^2 + 3z^2, x \geq -z, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 17.18 $\Omega: x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, x = 4 - 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 \leq 2y, z \leq 0.$
- 17.19 $\Omega: 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81, x^2 \leq 3y^2 + 3z^2, z \leq -y, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0.$
- 17.20 $\Omega: y = 4x^2 + 4z^2, z = 128 - 4x^2 - 4z^2, x^2 + z^2 \leq -8z, x \leq 0.$
- 17.21 $\Omega: 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, z^2 \geq 3x^2 + 3y^2, y \geq x, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0.$
- 17.22 $\Omega: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2x, y \leq 0.$
- 17.23 $\Omega: 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, z^2 \leq 3x^2 + 3y^2, y \leq x, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0.$
- 17.24 $\Omega: z = x^2 + y^2, z = 8 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0.$
- 17.25 $\Omega: 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, y^2 \geq 3x^2 + 3z^2, x \leq -z, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 17.26 $\Omega: y = 2x^2 + 2z^2, z = 16 - 2x^2 - 2z^2, x^2 + z^2 \leq 4z, x \geq 0.$
- 17.27 $\Omega: 49 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, z^2 \leq 3x^2 + 3y^2, y \leq -x, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 17.28 $\Omega: z = -4\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8\sqrt{x^2 + y^2} - 72, x^2 + y^2 \leq 12y, x \geq 0.$
- 17.29 $\Omega: 64 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81, z^2 \geq 3x^2 + 3y^2, y \geq -x, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$
- 17.30 $\Omega: z = -x^2 - y^2, z = x^2 + y^2 - 50, x^2 + y^2 \leq -10y, x \geq 0.$

18. Найти координаты центра масс неоднородной пластины G , ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой её точке равна $\rho = \rho(x, y)$. Записать численные значения статических моментов относительно осей координат, а также значение массы материальной пластины. Вычислить моменты инерции материальной пластины относительно осей координат и начала координат. Изобразить пластину G в декартовой прямоугольной системе координат.

- 18.1 $G: x + y = 1, x = 0, y = 0; \quad \rho(x, y) = y^2.$
- 18.2 $G: x - y = 1, x = 0, y = 0; \quad \rho(x, y) = y.$
- 18.3 $G: y - x = 1, x = 0, y = 0; \quad \rho(x, y) = x.$
- 18.4 $G: x + y = -1, x = 0, y = 0; \quad \rho(x, y) = x \cdot y.$
- 18.5 $G: x + y = 2, x = -1, y = -1; \quad \rho(x, y) = x^2.$
- 18.6 $G: x - y = 2, x = 3, y = -3; \quad \rho(x, y) = y^2.$
- 18.7 $G: y - x = 2, x = -2, y = -2; \quad \rho(x, y) = y.$
- 18.8 $G: x + y = -2, x = -2, y = -2; \quad \rho(x, y) = x \cdot y.$
- 18.9 $G: 4 \cdot x + 3 \cdot y = 19, x = 1, y = 1; \quad \rho(x, y) = x.$
- 18.10 $G: 2 \cdot y - 3 \cdot x = 11, x = -1, y = 1; \quad \rho(x, y) = y.$
- 18.11 $G: 2 \cdot x + 3 \cdot y = -1, x = 1, y = -3; \quad \rho(x, y) = x.$
- 18.12 $G: 2 \cdot y - 3 \cdot x = 4, x = -2, y = -4; \quad \rho(x, y) = x \cdot y.$
- 18.13 $G: 3 \cdot x + 2 \cdot y = 16, x = 4, y = 5; \quad \rho(x, y) = y^2.$

- 18.14 $G: 3 \cdot x + 4 \cdot y = 6, x = -2, y = 6; \quad \rho(x, y) = x.$
- 18.15 $G: x + 2 \cdot y = -9, x = -1, y = -2; \quad \rho(x, y) = x^2.$
- 18.16 $G: 4 \cdot x + 3 \cdot y = 5, x = 2, y = -5; \quad \rho(x, y) = x.$
- 18.17 $G: 3 \cdot y - x = 8, x = 4, y = 3; \quad \rho(x, y) = y.$
- 18.18 $G: 2 \cdot y - 5 \cdot x = 22, x = -2, y = 1; \quad \rho(x, y) = y^2.$
- 18.19 $G: x - y = 6, x = 1, y = -1; \quad \rho(x, y) = x^2.$
- 18.20 $G: 5 \cdot x - 2 \cdot y = -3, x = -3, y = -1; \quad \rho(x, y) = x \cdot y.$
- 18.21 $G: x + 2 \cdot y = 9, x = 1, y = 2; \quad \rho(x, y) = x.$
- 18.22 $G: 3 \cdot x + 2 \cdot y = 2, x = -2, y = 1; \quad \rho(x, y) = y.$
- 18.23 $G: 2 \cdot x + 5 \cdot y = -17, x = -6, y = -3; \quad \rho(x, y) = x \cdot y.$
- 18.24 $G: 5 \cdot x + y = 4, x = 1, y = -6; \quad \rho(x, y) = x^2.$
- 18.25 $G: x - 2 \cdot y = -3, x = 5, y = 2; \quad \rho(x, y) = y^2.$
- 18.26 $G: x + 7 \cdot y = -14, x = 0, y = -2; \quad \rho(x, y) = x \cdot y.$
- 18.27 $G: 3 \cdot x + 2 \cdot y = -1, x = 1, y = -8; \quad \rho(x, y) = y^2.$
- 18.28 $G: 4 \cdot y - 3 \cdot x = 12, x = 4, y = 3; \quad \rho(x, y) = x.$
- 18.29 $G: 5 \cdot y - 2 \cdot x = 15, x = -5, y = 3; \quad \rho(x, y) = x^2.$
- 18.30 $G: 2 \cdot y - x = 10, x = 0, y = 2; \quad \rho(x, y) = y.$

19. Найти координаты центра масс неоднородного материального тела Ω , заданного в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ системой неравенств. Объёмная плотность в каждой точке указанного тела равна $\rho = \rho(x, y, z)$. Записать численные значения статических моментов относительно осей координат, а также значение массы материального тела. Вычислить моменты инерции материального тела относительно координатных плоскостей, начала координат и координатных осей. Изобразить материальное тело Ω в декартовой прямоугольной системе координат.

- 19.1 $\Omega: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4, 1 \leq z \leq 3; \quad \rho(x, y, z) = x.$
- 19.2 $\Omega: -1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 3, -2 \leq z \leq 2; \quad \rho(x, y, z) = y.$
- 19.3 $\Omega: 1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 5, 2 \leq z \leq 4; \quad \rho(x, y, z) = z.$
- 19.4 $\Omega: -3 \leq x \leq 2, 4 \leq y \leq 6, -1 \leq z \leq 2; \quad \rho(x, y, z) = x^2.$
- 19.5 $\Omega: -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 5, 3 \leq z \leq 6; \quad \rho(x, y, z) = y^2.$
- 19.6 $\Omega: -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2, 4 \leq z \leq 1; \quad \rho(x, y, z) = z^2.$
- 19.7 $\Omega: 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 0; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot y.$
- 19.8 $\Omega: 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 1, 2 \leq z \leq 5; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot z.$
- 19.9 $\Omega: -3 \leq x \leq -1, 1 \leq y \leq 3, 3 \leq z \leq 5; \quad \rho(x, y, z) = y \cdot z.$
- 19.10 $\Omega: 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 6, 4 \leq z \leq 6; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot y \cdot z.$
- 19.11 $\Omega: -4 \leq x \leq -2, 0 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 4; \quad \rho(x, y, z) = x^2 \cdot y.$

- 19.12 $\Omega: 2 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3, -2 \leq z \leq 1; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot y^2.$
- 19.13 $\Omega: 1 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 4; \quad \rho(x, y, z) = x^2 \cdot z.$
- 19.14 $\Omega: 1 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 3; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot z^2.$
- 19.15 $\Omega: -3 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 4, 1 \leq z \leq 4; \quad \rho(x, y, z) = z \cdot y^2.$
- 19.16 $\Omega: -2 \leq x \leq 0, 2 \leq y \leq 4, -1 \leq z \leq 1; \quad \rho(x, y, z) = z^2 \cdot y.$
- 19.17 $\Omega: 1 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 4, -3 \leq z \leq -1; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot y \cdot z^2.$
- 19.18 $\Omega: 1 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2, 3 \leq z \leq 5; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z.$
- 19.19 $\Omega: -4 \leq x \leq -2, 1 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 4; \quad \rho(x, y, z) = x^2 \cdot y^2.$
- 19.20 $\Omega: -4 \leq x \leq -1, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 5; \quad \rho(x, y, z) = x^2 \cdot y \cdot z.$
- 19.21 $\Omega: 2 \leq x \leq 6, -3 \leq y \leq -2, -2 \leq z \leq 1; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot y^2 \cdot z^2.$
- 19.22 $\Omega: -1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 6, -3 \leq z \leq -3; \quad \rho(x, y, z) = x^2 \cdot y \cdot z^2.$
- 19.23 $\Omega: -4 \leq x \leq -2, -3 \leq y \leq -1, -5 \leq z \leq -3; \quad \rho(x, y, z) = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2.$
- 19.24 $\Omega: 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 2 \leq z \leq 3; \quad \rho(x, y, z) = x^2 \cdot z^2.$
- 19.25 $\Omega: 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 2; \quad \rho(x, y, z) = y^2 \cdot z^2.$
- 19.26 $\Omega: 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 4, -2 \leq z \leq 0; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot y.$
- 19.27 $\Omega: -1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 3; \quad \rho(x, y, z) = y \cdot z.$
- 19.28 $\Omega: 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 3; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot z.$
- 19.29 $\Omega: 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 4, 3 \leq z \leq 6; \quad \rho(x, y, z) = x \cdot y \cdot z.$
- 19.30 $\Omega: 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4, 1 \leq z \leq 5; \quad \rho(x, y, z) = x^2 \cdot y^2 \cdot z.$

РАЗДЕЛ 4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства.
2. Методы вычисления криволинейного интеграла первого рода.
3. Поверхностный интеграл первого рода и его свойства.
4. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.
5. Механические приложения криволинейных интегралов: масса однородной дуги, координаты центра масс и моменты инерции однородной дуги, работа силы, под действием которой определяется перемещение тела.
6. Скалярное поле и его характеристики.
7. Векторное поле и его геометрические характеристики.
8. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
9. Методы вычисления криволинейного интеграла второго рода. Формула Грина.
10. Поверхностный интеграл второго рода и его свойства.
11. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.

12. Интегральные характеристики векторных полей: поток и циркуляция.
13. Дифференциальные характеристики векторных полей: дивергенция, её физический смысл и метод вычисления.
14. Дифференциальные характеристики векторных полей: ротор, его смысл и метод вычисления в декартовой системе координат.
15. Теорема Остроградского-Гаусса.
16. Теорема Стокса.
17. Потенциальное векторное поле. Потенциал поля.
18. Соленоидальное векторное поле.
19. Гармоническое векторное поле.

ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

20. Вычислить криволинейный интеграл.

- 20.1 $\int_{\gamma} \sqrt{x^2} dl$, где γ – дуга линии $y = \ln x$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.
- 20.2 $\int_{\gamma} (y + x) dl$, где γ – дуга линии $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$, $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}$.
- 20.3 $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dl$, где γ – дуга линии $\rho = 1 - \cos \varphi$, $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$.
- 20.4 $\int_{\gamma} (x^2 + y^2 - z) dl$, где γ – дуга линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$.
- 20.5 $\int_{\gamma} y dl$, где γ – дуга линии $y = e^{2x}$, $0 \leq x \leq 1$.
- 20.6 $\int_{\gamma} x^2 dl$, где γ – дуга линии $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$, $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- 20.7 $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dl$, где γ – дуга линии $\rho = 7e^{\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \ln 7$.
- 20.8 $\int_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + z^2}}$, где γ – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0;0;0)$ и $A(1;2;3)$.
- 20.9 $\int_{\gamma} \cos x dl$, где γ – дуга линии $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 20.10 $\int_{\gamma} (y + 2x) dl$, где γ – дуга линии $x = \sqrt{2} \cos^2 t$, $y = \sqrt{2} \sin^2 t$, $\frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$.
- 20.11 $\int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$, где γ – дуга линии $\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}$, $0 \leq \varphi \leq 1$.

$$20.12 \int_{\gamma} (x + y + z) dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = \cos 2t, y = \sin 2t, z = 8t, \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$20.13 \int_{\gamma} \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = \ln \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{e} \leq x \leq e.$$

$$20.14 \int_{\gamma} x dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, \quad 2\pi \leq t \leq 3\pi.$$

$$20.15 \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } \rho = \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \sqrt{3}.$$

$$20.16 \oint_{\gamma} (y^2 + z^2) dl, \text{ где } \gamma - \text{ окружность } y^2 + z^2 = 9.$$

$$20.17 \int_{\gamma} y dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$20.18 \int_{\gamma} xy dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = \sin t, y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$20.19 \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } \rho = 1 + \sin \varphi, \quad 2\pi \leq \varphi \leq 3\pi.$$

$$20.20 \oint_{\gamma} (x^2 + y^2) dl, \text{ где } \gamma - \text{ окружность } x^2 + y^2 = 16.$$

$$20.21 \int_{\gamma} \frac{y}{1 + \operatorname{ch}^2 x} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = \operatorname{sh} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$20.22 \int_{\gamma} \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = \cos t, y = \sin t, \quad \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}.$$

$$20.23 \int_{\gamma} \sqrt{x^2 y^2} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } \rho = \sin \varphi, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}.$$

$$20.24 \int_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ где } \gamma - \text{ отрезок прямой, соединяющей точки } O(2;1;3) \text{ и } A(5;-1;9).$$

$$20.25 \int_{\gamma} y^2 dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = e^x, \quad 0 \leq x \leq \ln 2.$$

$$20.26 \int_{\gamma} (x + y) dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = 4 \cos^3 2t, y = 4 \sin^3 2t, \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{8}.$$

$$20.27 \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } \rho = 1 - \sin \varphi, \quad 3\pi \leq \varphi \leq 4\pi.$$

$$20.28 \oint_{\gamma} (x^2 + z^2) dl, \text{ где } \gamma - \text{ окружность } x^2 + z^2 = 16.$$

$$20.29 \int_{\gamma} \sqrt{x^2} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } \rho = \cos \varphi, \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi.$$

$$20.30 \int_{\gamma} \frac{\sqrt{y^2}}{1 + \sin^2 x} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = \cos x, \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi.$$

21. Вычислить работу A силы $\vec{F}$ вдоль дуги линии l от точки S до точки T (линия l задана либо уравнением $y = f(x)$, если уравнение в условии задачи данного варианта указано, либо является прямой, проходящей через две точки S и T).

$$21.1 \quad \vec{F} = (2x^2 - 3y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} + z\vec{k}, S(2;3;5), T(5;1;4).$$

$$21.2 \quad \vec{F} = (3x - y)\vec{i} + (2x + 5y^2)\vec{j}, f(x) = x^2, S(1;1), T(2;4).$$

$$21.3 \quad \vec{F} = (4x^2 + 3y^2)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}, S(1;4), T(2;5).$$

$$21.4 \quad \vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (2x^2 - 6y^3)\vec{j}, f(x) = x^2 + 4x - 1, S(1;4), T(2;11).$$

$$21.5 \quad \vec{F} = (4x - y)\vec{i} + (3x^3 - 5z)\vec{j} + (2x + 6z)\vec{k}, S(4;3;2), T(2;5;1).$$

$$21.6 \quad \vec{F} = (5x + 3y)\vec{i} + (4x + 4y^3)\vec{j}, f(x) = x^3, S(2;8), T(3;27).$$

$$21.7 \quad \vec{F} = (x^3 + 5y)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j}, S(5;4), T(6;7).$$

$$21.8 \quad \vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}, f(x) = 2x^2 + 5x + 2, S(0;2), T(1;9).$$

$$21.9 \quad \vec{F} = (x^2 - z)\vec{i} + (3z - y)\vec{j} + (2x + z)\vec{k}, S(3;3;4), T(6;7;8).$$

$$21.10 \quad \vec{F} = (2x + 5y)\vec{i} + (2x - 4y^2)\vec{j}, f(x) = x^2 - x, S(2;2), T(4;12).$$

$$21.11 \quad \vec{F} = (3x^2 + 5y^2)\vec{i} - (x^2 - 4y)\vec{j}, S(2;1), T(4;3).$$

$$21.12 \quad \vec{F} = (2x - 5y)\vec{i} + (3x + 2y^2)\vec{j}, f(x) = 3x^2 - 10x + 3, S(1;-4), T(3;0).$$

$$21.13 \quad \vec{F} = (y^2 - z)\vec{i} + (3z - x)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}, S(2;1;6), T(4;5;4).$$

$$21.14 \quad \vec{F} = (x^2 - 3y)\vec{i} - (4x - 5y^2)\vec{j}, f(x) = 4 - x^2, S(2;0), T(1;3).$$

$$21.15 \quad \vec{F} = (2x^2 + y^3)\vec{i} - (x^3 - y^3)\vec{j}, S(3;7), T(-2;-1).$$

$$21.16 \quad \vec{F} = x\vec{i} + (4x - y^2)\vec{j}, f(x) = x^2 - 10x + 9, S(1;0), T(2;-7).$$

$$21.17 \quad \vec{F} = (y^2 - x)\vec{i} + (x + y - z)\vec{j} + x\vec{k}, S(3;2;1), T(8;5;2).$$

$$21.18 \quad \vec{F} = (x^3 - 2y^2)\vec{i} - (5x + 4y^2)\vec{j}, f(x) = x - x^2, S(1;0), T(5;-20).$$

$$21.19 \quad \vec{F} = (4x + 2y^2)\vec{i} + 2(3x^2 - y^2)\vec{j}, S(2;5), T(3;7).$$

$$21.20 \quad \vec{F} = y\vec{i} + (2x + 3y^2)\vec{j}, f(x) = 2x^2 - 9x + 1, S(2;-9), T(0;1).$$

$$21.21 \quad \vec{F} = (y^2 - z^3)\vec{i} + (x^2 + y - z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}, S(4;1;2), T(2;4;7).$$

$$21.22 \quad \vec{F} = (x^3 + 4y^2)\vec{i} + 3(2x - 3y^2)\vec{j}, \quad f(x) = x^2 + 3x, \quad S(0;0), \quad T(3;18).$$

$$21.23 \quad \vec{F} = (2x + 4y^2)\vec{i} - 5(4x^2 + y^3)\vec{j}, \quad S(3;9), \quad T(6;9).$$

$$21.24 \quad \vec{F} = (x - y)\vec{i} + (x^2 - 5y^2)\vec{j}, \quad f(x) = 3x^2 - 2x - 1, \quad S(1;0), \quad T(2;7).$$

$$21.25 \quad \vec{F} = (y^3 - z^2)\vec{i} + (x^2 + 2y - 3z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}, \quad S(5;1;0), \quad T(4;2;1).$$

$$21.26 \quad \vec{F} = (x + 4y)\vec{i} + 3x\vec{j}, \quad f(x) = \sin x, \quad S(0;0), \quad T\left(\frac{\pi}{2};1\right).$$

$$21.27 \quad \vec{F} = \cos x \vec{i} - x \sin y \vec{j}, \quad S(2;2), \quad T(7;7).$$

$$21.28 \quad \vec{F} = (x - y)\vec{i} + 2xy\vec{j}, \quad f(x) = \sin 3x, \quad S\left(\frac{\pi}{3};0\right), \quad T\left(\frac{\pi}{2};-1\right).$$

$$21.29 \quad \vec{F} = \sin x \vec{i} + \cos y \vec{j} + \operatorname{tg} z \vec{k}, \quad S(2;4;1), \quad T(5;1;2).$$

$$21.30 \quad \vec{F} = \cos x \vec{i} + \sin x \vec{j}, \quad f(x) = x^2, \quad S(-1;1), \quad T(-2;4).$$

22. Вычислить массу части поверхности сферы Ω , если поверхностная плотность в каждой её точке равна $\rho = \rho(x; y; z)$. В условии задачи число n равно сумме двух последних цифр номера зачётной книжки (если сумма равна нулю, то $n = 1$).

$$22.1 \quad \Omega: z = \sqrt{n^2 - x^2 - y^2}, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad \rho = xy.$$

$$22.2 \quad \Omega: x = -\sqrt{n^2 - y^2 - z^2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}z, \quad z \geq 0, \quad \rho = y^2z.$$

$$22.3 \quad \Omega: y = -\sqrt{n^2 - x^2 - z^2}, \quad z \leq x \leq \sqrt{3}z, \quad z \geq 0, \quad \rho = x^2 + z^2.$$

$$22.4 \quad \Omega: z = -\sqrt{n^2 - x^2 - y^2}, \quad x \geq 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x, \quad \rho = xy^2.$$

$$22.5 \quad \Omega: x = \sqrt{n^2 - y^2 - z^2}, \quad -\sqrt{3}z \leq y \leq z, \quad z \geq 0, \quad \rho = y^2z.$$

$$22.6 \quad \Omega: y = \sqrt{n^2 - x^2 - z^2}, \quad -z \leq x \leq 0, \quad z \geq 0, \quad \rho = x^2z^2.$$

$$22.7 \quad \Omega: z = \sqrt{n^2 - x^2 - y^2}, \quad x \geq 0, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq 0, \quad \rho = x - y.$$

$$22.8 \quad \Omega: x = -\sqrt{n^2 - y^2 - z^2}, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}z \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}z, \quad z \leq 0, \quad \rho = y^2 + z^2.$$

$$22.9 \quad \Omega: y = \sqrt{n^2 - x^2 - z^2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}z, \quad z \geq 0, \quad \rho = x + z.$$

$$22.10 \quad \Omega: z = -\sqrt{n^2 - x^2 - y^2}, \quad x \leq 0, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq 0, \quad \rho = x^2 + y^2.$$

- 22.11 $\Omega: x = -\sqrt{n^2 - y^2 - z^2}, -z\sqrt{\frac{1}{3}} \leq y \leq 0, z \geq 0, \rho = -yz.$
- 22.12 $\Omega: y = -\sqrt{n^2 - x^2 - z^2}, x \leq 0, -\sqrt{3}z \leq x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}z, z \geq 0, \rho = x^2z.$
- 22.13 $\Omega: z = \sqrt{n^2 - x^2 - y^2}, x \geq 0, \frac{\sqrt{3}}{3}x \leq y \leq x, \rho = x^2y^2.$
- 22.14 $\Omega: x = \frac{1}{2}\sqrt{n^2 - 4y^2 - 4z^2}, -z \leq y \leq 0, z \geq 0, \rho = -yz^2.$
- 22.15 $\Omega: y = \frac{1}{3}\sqrt{n^2 - 9x^2 - 9z^2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}z \leq x \leq 0, z \leq 0, \rho = x^2 + z^2.$
- 22.16 $\Omega: z = -\sqrt{n^2 - x^2 - y^2}, x \geq 0, -\sqrt{3}x \leq y \leq -x, \rho = -x^3y.$
- 22.17 $\Omega: x = -\frac{1}{3}\sqrt{n^2 - 9y^2 - 9z^2}, -\sqrt{3}z \leq y \leq 0, z \leq 0, \rho = -y^2z.$
- 22.18 $\Omega: y = \frac{1}{5}\sqrt{n^2 - 25x^2 - 25z^2}, -z\sqrt{3} \leq x \leq z\sqrt{3}, z \leq 0, \rho = x^2z^2.$
- 22.19 $\Omega: z = \sqrt{n^2 - x^2 - y^2}, x \leq 0, 0 \leq y \leq x, \rho = -2x + 3y.$
- 22.20 $\Omega: x = \sqrt{n^2 - y^2 - z^2}, -z \leq y \leq z\sqrt{3}, z \geq 0, \rho = 2y^2 + 2z^2.$
- 22.21 $\Omega: y = -\sqrt{n^2 - x^2 - z^2}, -\sqrt{3}z \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}z, z \leq 0, \rho = -3x - 6z.$
- 22.22 $\Omega: z = \frac{1}{4}\sqrt{n^2 - 16x^2 - 16y^2}, x \leq 0, -x \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}}, \rho = xy.$
- 22.23 $\Omega: x = \frac{1}{6}\sqrt{n^2 - 36y^2 - 36z^2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}z \leq y \leq 0, z \geq 0, \rho = y^2z^2.$
- 22.24 $\Omega: y = \frac{1}{7}\sqrt{n^2 - 49x^2 - 49z^2}, 0 \leq x \leq z\sqrt{3}, z \geq 0, \rho = x^2z.$
- 22.25 $\Omega: z = \sqrt{n^2 - x^2 - y^2}, x \geq 0, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}, \rho = x^3y.$
- 22.26 $\Omega: x = -\sqrt{n^2 - y^2 - z^2}, 0 \leq y \leq z, z \geq 0, \rho = y^3z.$
- 22.27 $\Omega: y = \sqrt{n^2 - x^2 - z^2}, z \leq x \leq \sqrt{3}z, z \geq 0, \rho = 2x^2 + 2z^2.$
- 22.28 $\Omega: z = -\frac{1}{8}\sqrt{n^2 - 64x^2 - 64y^2}, x \geq 0, x \leq y \leq x\sqrt{3}, \rho = xy^2.$
- 22.29 $\Omega: x = \frac{1}{9}\sqrt{n^2 - 81y^2 - 81z^2}, -\sqrt{3}z \leq y \leq 0, z \geq 0, \rho = 3(y^2 + z^2).$
- 22.30 $\Omega: y = \frac{1}{10}\sqrt{n^2 - 100x^2 - 100z^2}, 0 \leq x \leq z, z \geq 0, \rho = 4x + 5z.$

23. Вычислить поверхностный интеграл $\oiint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma$, где Σ – замкнутая

поверхность, $\vec{n}^0$ – внешняя нормаль к поверхности Σ , $\vec{a}$ – векторное поле.

23.1 $\vec{a} = (x - z^2)\vec{i} + (y + z^2)\vec{j} - x\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0, z \leq 0$.

23.2 $\vec{a} = (x + 2z^2)\vec{i} + (y - z^2)\vec{j} - y\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 0, z \geq 0$.

23.3 $\vec{a} = (x - yz^2)\vec{i} + (xy + z^2)\vec{j} - xy\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0, z \leq 0$.

23.4 $\vec{a} = y\vec{i} + z^2\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0, z \geq 0$.

23.5 $\vec{a} = (x - yz^2)\vec{i} + (y + xz^2)\vec{j} - y\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z \leq 0, z = -1$.

23.6 $\vec{a} = (y - yz^2)\vec{i} + x\vec{j} + (x + z^2)\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0, z = 1$.

23.7 $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} - z\vec{k}$, $\Sigma: z = -x^2 - y^2, z = -1$.

23.8 $\vec{a} = (x - z)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + \vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2, z = 1$.

23.9 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\Sigma: z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

23.10 $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: z = -\sqrt{8 - x^2 - y^2}, z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

23.11 $\vec{a} = 2x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$, $\Sigma: z = 2 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$.

23.12 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 5z\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: z = 98 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \leq 0$.

23.13 $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2 + 1, x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

23.14 $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$, $\Sigma: z = 54 - 3(x^2 + y^2), z = 3(x^2 + y^2)$.

23.15 $\vec{a} = zy\vec{i} + 3xz\vec{j} + 4xy\vec{k}$, $\Sigma: z = x, x^2 + y^2 = 4, z = 0, z \geq 0$.

23.16 $\vec{a} = (x^2 - z)\vec{i} + (y^2 + z)\vec{j} - y\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 49, z = 0, z \leq 0$.

23.17 $\vec{a} = (y + z^2)\vec{i} + (x - z^2)\vec{j} - x\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 0, z \geq 0$.

23.18 $\vec{a} = (x + z^2)\vec{i} + (xy - z^2)\vec{j} - xyz\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 36, z = 0, z \leq 0$.

23.19 $\vec{a} = (xy)\vec{i} + yz^2\vec{j} + xy\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 64, z = 0, z \geq 0$.

23.20 $\vec{a} = (x^2 - z^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} - xy\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z \leq 0, z = -2$.

23.21 $\vec{a} = (y - z^2)\vec{i} + y\vec{j} + (x - z^2)\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0, z = 3$.

23.22 $\vec{a} = (3x + 2z)\vec{i} + (3y - z)\vec{j} - 2z\vec{k}$, $\Sigma: z = -x^2 - y^2, z = -4$.

23.23 $\vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (4y - 2z)\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2, z = 9$.

23.24 $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, $\Sigma: z = \sqrt{50 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

23.25 $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + (x + 3z)\vec{k}$, $\Sigma: z = -\sqrt{32 - x^2 - y^2}, z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

23.26 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 2z\vec{j} + xy\vec{k}$, $\Sigma: z = 8 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$.

23.27 $\vec{a} = y^2\vec{i} + z\vec{j} + x^2\vec{k}$, $\Sigma: z = 18 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \leq 0$.

23.28 $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2 + 2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$.

$$23.29 \quad \vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}, \quad \Sigma: z = 40 - 5(x^2 + y^2), \quad z = 5(x^2 + y^2).$$

$$23.30 \quad \vec{a} = zyx\vec{i} + 3x\vec{j} + y\vec{k}, \quad \Sigma: z = x, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad z = 0, \quad z \geq 0.$$

24. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ по определению и с помощью формулы Остроградского – Гаусса через внешнюю поверхность пирамиды, ограниченную координатными плоскостями и заданной плоскостью π .

Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ по определению и с помощью формулы Стокса по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости π с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора указанной плоскости.

$$24.1 \quad \vec{a} = (x - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k}, \quad \pi: x + 2y + 3z = 6.$$

$$24.2 \quad \vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (2y - 4z)\vec{j} + (x - 5y + z)\vec{k}, \quad \pi: 2x - 3y + 4z = 12.$$

$$24.3 \quad \vec{a} = (x + 2y - z)\vec{i} + (4x + 2z)\vec{j} + (3x - 2y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 3y - 5z = 30.$$

$$24.4 \quad \vec{a} = (5x + 4y)\vec{i} + (x - 2y - 3z)\vec{j} + (3x + 4z)\vec{k}, \quad \pi: -3x + 4y + 6z = 12.$$

$$24.5 \quad \vec{a} = (2y + 5z)\vec{i} + (3y - 3z)\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \pi: 2x - 4y - 5z = 20.$$

$$24.6 \quad \vec{a} = (3x - 4y)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: -3x + 2y - 7z = 42.$$

$$24.7 \quad \vec{a} = x\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (-x - y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -x - 3y + 5z = 15.$$

$$24.8 \quad \vec{a} = (2x + 4z)\vec{i} + (x - 4y + z)\vec{j} + (2x - 3y + z)\vec{k}, \quad \pi: x + 2y + 3z = -12.$$

$$24.9 \quad \vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (4y + 5z)\vec{j} + (6x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 3y + 6z = 1.$$

$$24.10 \quad \vec{a} = (2x - 3z)\vec{i} + (4y - 2z)\vec{j} + (2x - 3y + 7z)\vec{k}, \quad \pi: 5x - 4y + 2z = 20.$$

$$24.11 \quad \vec{a} = (x + 3y - 2z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (2x - 3y + 4z)\vec{k}, \quad \pi: 6x + y - 2z = 6.$$

$$24.12 \quad \vec{a} = (4x + 5y)\vec{i} + (3x - y - 2z)\vec{j} + (4x + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + 2y + 5z = 20.$$

$$24.13 \quad \vec{a} = (5y + 6z)\vec{i} + (7y - 4z)\vec{j} + (x - 2y)\vec{k}, \quad \pi: 3x - 5y - 6z = 30.$$

$$24.14 \quad \vec{a} = (4x - y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} + (2x - 2y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + 7y - 7z = 28.$$

$$24.15 \quad \vec{a} = 2y\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (3x - y + 2z)\vec{k}, \quad \pi: -3x - 4y + 6z = 12.$$

$$24.16 \quad \vec{a} = (3x - 4z)\vec{i} + (2x - 4y + 3z)\vec{j} + (x - 4y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 4y + 5z = -40.$$

$$24.17 \quad \vec{a} = (4x - 5z)\vec{i} + (3y + 2z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: 3x + y + 5z = 15.$$

$$24.18 \quad \vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (2y + 3z)\vec{j} + (3x + 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: x - 2y + 3z = 6.$$

$$24.19 \quad \vec{a} = (3x + 2y + z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}, \quad \pi: 4x + 5y - 8z = 40.$$

$$24.20 \quad \vec{a} = (6x + 3y)\vec{i} + (2x - 5y - z)\vec{j} + (4x + 5z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + y + 2z = 4.$$

$$24.21 \quad \vec{a} = (2y + 3z)\vec{i} + (3y - 7z)\vec{j} + (3x - 2y)\vec{k}, \quad \pi: 3x - 4y - 5z = 60.$$

$$24.22 \quad \vec{a} = (x - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (x - y - z)\vec{k}, \quad \pi: -2x + 4y - 3z = 24.$$

$$24.23 \quad \vec{a} = 3z\vec{i} + (2y - z)\vec{j} + (-3x - 3y + z)\vec{k}, \quad \pi: -2x - 5y + 10z = 10.$$

$$24.24 \quad \vec{a} = (3x + 5z)\vec{i} + (6x - 3y + 2z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 2y + 3z = -18.$$

- 24.25 $\vec{a} = (4x - z)\vec{i} + (4y + z)\vec{j} + (3x - y + z)\vec{k}$, $\pi : 3x + 2y + 3z = 24$.
- 24.26 $\vec{a} = (2x - 5z)\vec{i} + (5y - 2z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k}$, $\pi : 3x - 4y + 2z = 24$.
- 24.27 $\vec{a} = (4x + 2y - 3z)\vec{i} + (5x + 6z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k}$, $\pi : 3x + 4y - z = 12$.
- 24.28 $\vec{a} = (x + 3y)\vec{i} + (2x - 3y - 4z)\vec{j} + (5x + z)\vec{k}$, $\pi : -4x + 5y + z = 20$.
- 24.29 $\vec{a} = (2y - 3z)\vec{i} + (y - 4z)\vec{j} + (3x - 2y)\vec{k}$, $\pi : 12x - 4y - 5z = 60$.
- 24.30 $\vec{a} = (4x - 3y)\vec{i} + (3x - 2z)\vec{j} + (x - y + 3z)\vec{k}$, $\pi : -6x + 4y - 3z = 24$.

25. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности векторного поля найти его потенциал.

- 25.1 $\vec{a} = (2xy - 2yz)\vec{i} + (x^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 2xy)\vec{k}$.
- 25.2 $\vec{a} = (z + x)\vec{i} + 2yz\vec{j} + (x + y^2)\vec{k}$.
- 25.3 $\vec{a} = (2xy + 2xz)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$.
- 25.4 $\vec{a} = (x + z^2)\vec{i} + 2yz\vec{j} + (y^2 + 2xz)\vec{k}$.
- 25.5 $\vec{a} = (3yz + 2x)\vec{i} + (3xz + 2yz^2)\vec{j} + (3xy + 2y^2z)\vec{k}$.
- 25.6 $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
- 25.7 $\vec{a} = (y^2z - yz^2)\vec{i} + (2xyz - xz^2)\vec{j} + (xy^2 - 2xyz)\vec{k}$.
- 25.8 $\vec{a} = -2yz\vec{i} + (2yz - 2xz)\vec{j} + (y^2 - 2xy)\vec{k}$.
- 25.9 $\vec{a} = 4yz\vec{i} + (z^2 + 4xz)\vec{j} + (2yz + 4xy)\vec{k}$.
- 25.10 $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.
- 25.11 $\vec{a} = -yz\vec{i} + (yz^2 - xz)\vec{j} + (y^2z - xy)\vec{k}$.
- 25.12 $\vec{a} = 4yz\vec{i} + (4xz - yz^2)\vec{j} + (4xy - zy^2)\vec{k}$.
- 25.13 $\vec{a} = (3x + yz)\vec{i} + (3y^2z - z^3 + xz)\vec{j} + (y^3 - 3z^2y + xy)\vec{k}$.
- 25.14 $\vec{a} = (6xyz - 0,5 \cdot y^2z^2)\vec{i} + (3x^2z + 3y^2z - xyz^2)\vec{j} + (3x^2y + y^3 - xy^2z)\vec{k}$.
- 25.15 $\vec{a} = (yz + 2)\vec{i} + (xz - 1)\vec{j} + (yz - 3)\vec{k}$.
- 25.16 $\vec{a} = 2yz\vec{i} + (2yz - z^2 + 2xz)\vec{j} + (2xy + y^2 - 2yz)\vec{k}$.
- 25.17 $\vec{a} = (4yz + 4z)\vec{i} + (yz^2 + 4xz)\vec{j} + (4xy + y^2z)\vec{k}$.
- 25.18 $\vec{a} = 2yz\vec{i} + (2xz + 2yz)\vec{j} + (y^2 + 2xy)\vec{k}$.
- 25.19 $\vec{a} = -x^2\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$.
- 25.20 $\vec{a} = (3 - y - z)\vec{i} + (4 - x - z)\vec{j} + (5 - x - y)\vec{k}$.
- 25.21 $\vec{a} = (y^2z + 2xz^2)\vec{i} + (2xyz + 2xz^2)\vec{j} + (xy^2 + 4xyz)\vec{k}$.
- 25.22 $\vec{a} = -y^2z\vec{i} + (z^2 - 2xyz)\vec{j} + (2yz - xy^2)\vec{k}$.
- 25.23 $\vec{a} = (y^2z^2 - y^3z)\vec{i} + (2xyz^2 - 3xy^2z)\vec{j} + (2xy^2z - xy^3)\vec{k}$.

$$\begin{aligned}
25.24 \quad \vec{a} &= yz\vec{i} + (xz + 2yz + 2z^2)\vec{j} + (xy + y^2 + 4yz)\vec{k} . \\
25.25 \quad \vec{a} &= (1 - yz)\vec{i} + (2 - xz)\vec{j} + (3 - xy)\vec{k} . \\
25.26 \quad \vec{a} &= 2yz\vec{i} + (3yz^2 + 2xz)\vec{j} + (3y^2z + 2xy)\vec{k} . \\
25.27 \quad \vec{a} &= 2xyz\vec{i} + (x^2z + 3y^2z + z^3)\vec{j} + (x^2y + y^3 + 3yz^2)\vec{k} . \\
25.28 \quad \vec{a} &= (7 + yz)\vec{i} + (2 + xz)\vec{j} + (5 + xy)\vec{k} . \\
25.29 \quad \vec{a} &= yz\vec{i} + (xz - 2yz + z^2)\vec{j} + (xy - y^2 + 2yz)\vec{k} . \\
25.30 \quad \vec{a} &= (5 + 2y + 2z)\vec{i} + (7 + 2x + 2z)\vec{j} + (4 + 2x + 2y)\vec{k} .
\end{aligned}$$

РАЗДЕЛ 5. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

ВОПРОСЫ ПО ТЕОРИИ

1. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (геометрический ряд, гармонический ряд).
2. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости числового ряда.
3. Свойства сходящихся рядов.
4. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный и интегральные признаки Коши).
5. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость знакопеременного ряда.
6. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница и следствие из него.
7. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.
8. Равномерно сходящиеся ряды и их свойства.
9. Степенной ряд. Теорема Абеля и следствие из неё.
10. Степенной ряд. Радиус и область сходимости степенного ряда.
11. Теорема существования и единственности разложения функции в степенной ряд. Необходимое и достаточное условие разложения функции в степенной ряд.
12. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Разложение в степенной ряд функций: $f(x) = e^x$, $f(x) = \operatorname{ch} x$, $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f(x) = \ln(1 + x)$, $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
13. Вычисление приближённых значений функции с помощью степенных рядов.
14. Вычисление определенного интеграла с помощью степенных рядов.
15. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
16. Понятие о степенных рядах в комплексной области.

17. Периодические функции и их свойства. Интеграл от периодической функции.
18. Понятие числового тригонометрического ряда.
19. Ортогональные системы тригонометрических функций.
20. Коэффициенты Фурье. Тригонометрический ряд Фурье.
21. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.
22. Теорема Дирихле о сходимости тригонометрического ряда Фурье.
23. Формула Фурье. Интеграл Фурье.
24. Косинус и синус преобразование Фурье.
25. Применение формулы Фурье к вычислению несобственных интегралов, зависящих от параметра.

ЗАДАНИЯ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

26. Доказать сходимость числового ряда и найти его сумму.

- 26.1 $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$
- 26.2 $\frac{2+3+4}{12} + \frac{4+9+16}{12^2} + \frac{8+27+64}{12^3} + \frac{16+81+256}{12^4} + \frac{32+243+1024}{12^5} + \dots$
- 26.3 $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1}{9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots$
- 26.4 $\frac{3-4+5}{60} + \frac{9-16+25}{60^2} + \frac{27-64+125}{60^3} + \frac{81-256+625}{60^4} + \dots$
- 26.5 $\frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10 \cdot 13} + \frac{1}{10 \cdot 13 \cdot 16} + \frac{1}{13 \cdot 16 \cdot 19} + \dots$
- 26.6 $\frac{4+5-7}{140} + \frac{16+25-49}{140^2} + \frac{64+125-343}{140^3} + \frac{256+625-2401}{140^4} + \dots$
- 26.7 $\frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9 \cdot 13} + \frac{1}{9 \cdot 13 \cdot 17} + \frac{1}{13 \cdot 17 \cdot 21} + \frac{1}{17 \cdot 21 \cdot 25} + \dots$
- 26.8 $\frac{5-3-1}{15} + \frac{25-9-1}{15^2} + \frac{125-27-1}{15^3} + \frac{625-81-1}{15^4} + \frac{3125-243-1}{15^5} + \dots$
- 26.9 $\frac{1}{1 \cdot 6 \cdot 11} + \frac{1}{6 \cdot 11 \cdot 16} + \frac{1}{11 \cdot 16 \cdot 21} + \frac{1}{16 \cdot 21 \cdot 26} + \frac{1}{21 \cdot 26 \cdot 31} + \dots$
- 26.10 $\frac{2+4+5}{20} + \frac{4+16+25}{20^2} + \frac{8+64+125}{20^3} + \frac{16+256+625}{20^4} + \frac{32+1024+3125}{20^5} + \dots$
- 26.11 $\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1}{6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{1}{8 \cdot 10 \cdot 12} + \frac{1}{10 \cdot 12 \cdot 14} + \dots$
- 26.12 $\frac{7-1+2}{14} + \frac{49-1+4}{14^2} + \frac{343-1+8}{14^3} + \frac{2401-1+16}{14^4} + \frac{16807-1+32}{14^5} + \dots$
- 26.13 $\frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{1}{8 \cdot 11 \cdot 14} + \frac{1}{11 \cdot 14 \cdot 17} + \frac{1}{14 \cdot 17 \cdot 20} + \dots$

$$\begin{aligned}
26.14 & \frac{3+5-1}{15} + \frac{9+25-1}{15^2} + \frac{27+125-1}{15^3} + \frac{81+625-1}{15^4} + \frac{243+3125-1}{15^5} + \dots \\
26.15 & \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \frac{1}{6 \cdot 10 \cdot 14} + \frac{1}{10 \cdot 14 \cdot 18} + \frac{1}{14 \cdot 18 \cdot 22} + \frac{1}{18 \cdot 22 \cdot 24} + \dots \\
26.16 & \frac{2+3-7}{42} + \frac{4+9-49}{42^2} + \frac{8+27-343}{42^3} + \frac{16+81-2401}{42^4} + \frac{32+243-16807}{42^5} + \dots \\
26.17 & \frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 12} + \frac{1}{7 \cdot 12 \cdot 17} + \frac{1}{12 \cdot 17 \cdot 22} + \frac{1}{17 \cdot 22 \cdot 27} + \frac{1}{22 \cdot 27 \cdot 32} + \dots \\
26.18 & \frac{5-6-2}{30} + \frac{25-36-4}{30^2} + \frac{125-216-8}{30^3} + \frac{625-1296-16}{30^4} + \dots \\
26.19 & \frac{1}{2 \cdot 8 \cdot 14} + \frac{1}{8 \cdot 14 \cdot 20} + \frac{1}{14 \cdot 20 \cdot 26} + \frac{1}{20 \cdot 26 \cdot 32} + \frac{1}{26 \cdot 32 \cdot 38} + \dots \\
26.20 & \frac{1+7+5}{70} + \frac{1+49+25}{70^2} + \frac{1+343+125}{70^3} + \frac{1+2401+625}{70^4} + \frac{1+16807+3125}{70^5} + \dots \\
26.21 & \frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1}{6 \cdot 9 \cdot 12} + \frac{1}{9 \cdot 12 \cdot 15} + \frac{1}{12 \cdot 15 \cdot 18} + \frac{1}{15 \cdot 18 \cdot 21} + \dots \\
26.22 & \frac{6-7+3}{84} + \frac{36-49+9}{84^2} + \frac{216-343+27}{84^3} + \frac{1296-2401+81}{84^4} + \dots \\
26.23 & \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 15} + \frac{1}{11 \cdot 15 \cdot 19} + \frac{1}{15 \cdot 19 \cdot 23} + \frac{1}{19 \cdot 23 \cdot 27} + \dots \\
26.24 & \frac{2+3-1}{120} + \frac{4+9-1}{120^2} + \frac{8+27-1}{120^3} + \frac{16+81-1}{120^4} + \frac{32+243-1}{120^5} + \dots \\
26.25 & \frac{1}{3 \cdot 8 \cdot 13} + \frac{1}{8 \cdot 13 \cdot 18} + \frac{1}{13 \cdot 18 \cdot 23} + \frac{1}{18 \cdot 23 \cdot 28} + \frac{1}{23 \cdot 28 \cdot 33} + \dots \\
26.26 & \frac{2-6-7}{84} + \frac{4-36-49}{84^2} + \frac{8-216-343}{84^3} + \frac{16-1296-2401}{84^4} + \dots \\
26.27 & \frac{1}{3 \cdot 9 \cdot 15} + \frac{1}{9 \cdot 15 \cdot 21} + \frac{1}{15 \cdot 21 \cdot 27} + \frac{1}{21 \cdot 27 \cdot 33} + \frac{1}{27 \cdot 33 \cdot 39} + \dots \\
26.28 & \frac{2+7+3}{126} + \frac{4+49+9}{126^2} + \frac{8+343+27}{126^3} + \frac{16+2401+81}{126^4} + \frac{64+16807+243}{126^5} + \dots \\
26.29 & \frac{1}{4 \cdot 9 \cdot 14} + \frac{1}{9 \cdot 14 \cdot 19} + \frac{1}{14 \cdot 19 \cdot 24} + \frac{1}{19 \cdot 24 \cdot 29} + \frac{1}{24 \cdot 29 \cdot 34} + \dots \\
26.30 & \frac{5-4+3}{120} + \frac{25-16+9}{120^2} + \frac{125-64+27}{120^3} + \frac{625-256+81}{120^4} + \frac{3125-1024+243}{120^5} + \dots
\end{aligned}$$

27. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. При исследовании

рядов с положительными членами применить достаточные признаки сходимости

сти числового ряда, а при исследовании рядов с произвольными членами установить их условную или абсолютную сходимость.

$$27.1 \quad \text{а) } a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt[3]{8n^4+3n-1}}; \text{ б) } a_n = \frac{n^n}{7^n n!}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{4^n} \left(\frac{5n+3}{5n+2} \right)^{n^2-3n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{3}{(5n+1) \cdot \ln(7n+2) \cdot \ln \ln(7n+2)}; \text{ д) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{4+n^2}; \text{ е) } a_n = \frac{n \cdot \sin n\alpha}{n^3+3}.$$

$$27.2 \quad \text{а) } a_n = \frac{\sqrt[5]{32n-1}}{\sqrt[4]{81n^9+3n^7-2}}; \text{ б) } a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{2n+5}{2n+7} \right)^{2n^2+4n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{4}{(3n+1) \cdot \ln(2n+1) \cdot \ln^2 \ln(2n+1)}; \text{ д) } a_n = \frac{n \cdot \cos n\alpha}{n^5+2}; \text{ е) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{3n^2}{5+3n^3}.$$

$$27.3 \quad \text{а) } a_n = \frac{\sqrt[7]{128n^3-n-1}}{\sqrt[21]{n^2-4n}}; \text{ б) } a_n = \frac{4^n}{5^n(3n+2)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{85^n} \left(\frac{3n-15}{3n-17} \right)^{5n^2-6n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{1}{(5n-4) \cdot \ln(6n+2) \cdot \sqrt[4]{\ln^3 \ln(6n+2)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sqrt[4]{n^5+3}}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{7\sqrt[3]{n}}{2-\sqrt[3]{n^4}}.$$

$$27.4 \quad \text{а) } a_n = \frac{\sqrt[5]{32n^3}}{\sqrt[4]{16n^9-3n^3+1}}; \text{ б) } a_n = \frac{7^n(2n-1)}{3^n(3n+2)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{4^n} \left(\frac{2n-3}{2n-6} \right)^{2n^2-6n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{8}{(2n+3) \cdot \ln(n+1) \cdot \sqrt[4]{\ln^5 \ln(n+1)}}; \text{ д) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[4]{n^5}}{3+5\sqrt[4]{n^9}}; \text{ е) } a_n = \frac{\cos \frac{n\alpha}{2}}{\sqrt[7]{n^8+4}}.$$

$$27.5 \quad \text{а) } a_n = \frac{\sqrt[3]{2401n^7-2n+1}}{\sqrt{49n+64}}; \text{ б) } a_n = \frac{4^n}{5^n(3n+2)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{3^n} \left(\frac{4n}{4n+7} \right)^{2n^2+7n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{4}{(3n-2) \cdot \ln(3n-1) \cdot \sqrt[5]{\ln^2 \ln(3n-1)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\sin \frac{n\alpha}{3}}{\sqrt[5]{n^6+2}}; \text{ е) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n^3}}.$$

$$27.6 \quad \text{а) } a_n = \frac{\sqrt[3]{8n^7+13n-27}}{\sqrt[4]{81n^{17}-17n^2-16}}; \text{ б) } a_n = \frac{3n-1}{6^{2n+1}}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{81^n} \left(\frac{n-30}{n-34} \right)^{6n^2-8n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{6}{(2n+4) \cdot \ln(2n+1) \cdot \ln^7 \ln(2n+1)}; \text{ д) } a_n = \frac{\cos \frac{n\alpha}{3}}{\sqrt[4]{n^7+6}}; \text{ е) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^4+6}.$$

$$27.7 \quad \text{а) } a_n = \frac{\sqrt[5]{32n^6-n-243}}{\sqrt[4]{81n^3-3n+16}}; \text{ б) } a_n = \frac{7^{n+4}(4n-3)}{3^{n+2}(2n-1)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^{n^2-n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{2}{(4n+3) \cdot \ln(5n+1) \cdot \sqrt[7]{\ln^6 \ln(5n+1)}}; \text{ д) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{n^4}{n^7+7}; \text{ е) } a_n = \frac{\sin \frac{n\alpha}{4}}{\sqrt[7]{n^8+7}}.$$

$$27.8 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[8]{256n^{17}+4n-1}}{\sqrt[3]{8n^4-n+81}}; \text{ б) } a_n = \frac{4n-2}{5^{5n+2}}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{3^n} \left(\frac{4n+3}{4n-2} \right)^{2n^2};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{5}{(9n-2) \cdot \ln(4n+1) \cdot \sqrt[5]{\ln^6 \ln(4n+1)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\cos \frac{n\alpha}{4}}{\sqrt[8]{n^9+8}}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[5]{n^3}}{2-\sqrt[5]{n^8}}.$$

$$27.9 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[8]{n^4+7n-256}}{\sqrt[6]{64n^2-7n-64}}; \text{ б) } a_n = \frac{(n+1)^n}{3^n(n+1)!}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{35^n} \left(\frac{6n-5}{6n-7} \right)^{-n^2-n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{2}{(7n+1) \cdot \ln(9n+2) \cdot \sqrt[5]{\ln^3 \ln(9n+2)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\sin \frac{n\alpha}{5}}{\sqrt[9]{n^{10}+9}}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{2n}{9+n^2}.$$

$$27.10 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[5]{32n^5-243}}{\sqrt[6]{64n^7-729}}; \text{ б) } a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{9^n} \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^{-n^2+2n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{7}{(3n+2) \cdot \ln(2n+1) \cdot \sqrt[4]{\ln^5 \ln(2n+1)}}; \text{ д) } a_n = (-1)^n \frac{7\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4+1}}; \text{ е) } a_n = \frac{\cos \frac{n\alpha}{5}}{\sqrt[3]{n^5+10}}.$$

$$27.11 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[3]{8n^4-n^2+6n-81}}{\sqrt[3]{81n^3-4n^2+4n+8}}; \text{ б) } a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n(n+1)!}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{6^n} \left(\frac{1-3n}{2-3n} \right)^{n^2-7n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{5}{(8n+1) \cdot \ln(9n+2) \cdot \sqrt{\ln \ln(9n+2)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\sin \frac{n\alpha}{6}}{\sqrt[7]{n^9+2}}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[5]{n}}{\sqrt[5]{n^6+3}}.$$

$$27.12 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[4]{16n^4-16}}{\sqrt[7]{128n^8+1}}; \text{ б) } a_n = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{5^n} \left(\frac{4n+3}{4n-1} \right)^{n^2-9n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{8}{(4n+1) \cdot \ln(3n+1) \cdot \ln^2 \ln(3n+1)}; \text{ д) } a_n = \frac{n \cdot \cos \frac{n\alpha}{6}}{n^4+7}; \text{ е) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{n^5}{n^6-9}.$$

$$27.13 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[5]{n^9-3n^6+3n^3+1}}{2n}; \text{ б) } a_n = \frac{7^n(3n^2+4)}{9^n(2n^2+5)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{8^n} \left(\frac{6n-1}{6n-4} \right)^{2n^2+5n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{1}{(6n-5) \cdot \ln(7n+3) \cdot \sqrt[5]{\ln^4 \ln(7n+3)}}; \text{ д) } a_n = (-1)^n \frac{5n}{n^2+1}; \text{ е) } a_n = \frac{n \cdot \sin \frac{2n\alpha}{3}}{\sqrt[5]{n^{11}+3}}.$$

$$27.14 \text{ a) } a_n = \frac{\sqrt[4]{16n^3 - 9n^2 - 4}}{\sqrt[6]{729n^3 - 3n}}; \text{ б) } a_n = \frac{6^n(2n^3 - 4)}{2^n(6n + 12)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{81^n} \left(\frac{3n - 11}{3n - 14} \right)^{-n^2 - n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{9}{(3n + 4) \cdot \ln(n + 2) \cdot \sqrt[5]{\ln^6 \ln(n + 2)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\cos \frac{2n\alpha}{3}}{\sqrt[6]{n^7} + 2}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{7\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[4]{n^7} - 2}.$$

$$27.15 \text{ a) } a_n = \frac{\sqrt{1024n}}{\sqrt[3]{729n + 3}}; \text{ б) } a_n = \frac{(n + 1)!}{7^n(6n + 5)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{3^n} \left(\frac{2n - 7}{2n - 1} \right)^{3n^2 + 4n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{5}{(4n - 3) \cdot \ln(4n - 1) \cdot \sqrt[6]{\ln^5 \ln(4n - 1)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\sin \frac{3n\alpha}{7}}{\sqrt[5]{n^7} + 1}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{n + 1}{n^2 + 1}.$$

$$27.16 \text{ a) } a_n = \frac{\sqrt[3]{8n^3 - 3n - 27}}{\sqrt[4]{81n^8 - 16}}; \text{ б) } a_n = \frac{8n + 1}{7^{16n^2 - 12}}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{27^n} \left(\frac{2n + 3}{2n + 5} \right)^{-3n^2 + 5n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{7}{(3n + 5) \cdot \ln(3n + 2) \cdot \ln^8 \ln(3n + 2)}; \text{ д) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{5\sqrt[4]{n^5}}{1 - \sqrt[4]{n^9}}; \text{ е) } a_n = \frac{\cos \frac{3n\alpha}{7}}{\sqrt[7]{n^9} + 1}.$$

$$27.17 \text{ a) } a_n = \frac{\sqrt[6]{n^9 + 64}}{\sqrt[4]{625n^4 + 16}}; \text{ б) } a_n = \frac{5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot \dots \cdot (6n - 1)}{4 \cdot 11 \cdot 18 \cdot \dots \cdot (7n - 3)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{5^n} \left(\frac{n - 15}{n - 17} \right)^{5n^2 - 6n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{3}{(n + 4) \cdot \ln(6n + 5) \cdot \sqrt[8]{\ln^7 \ln(6n + 5)}}; \text{ д) } a_n = \frac{n \cdot \sin \frac{n\alpha}{8}}{n^5 + 1}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{5\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^5} - 2}.$$

$$27.18 \text{ a) } a_n = \frac{\sqrt[5]{-32n^{15} - n - 1}}{\sqrt[4]{81n^8 - 4n^4 + 16}}; \text{ б) } a_n = \frac{6n - 2}{9^{2n^2 + 2}}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{4^n} \left(\frac{4n - 1}{4n - 7} \right)^{4n^2 - 2n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{6}{(10n - 3) \cdot \ln(5n + 2) \cdot \sqrt[6]{\ln^7 \ln(5n + 2)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\cos \frac{n\alpha}{8}}{\sqrt[6]{n^{11}} + 4}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{2n^3}{n^4 - 3}.$$

$$27.19 \text{ a) } a_n = \frac{\sqrt[6]{1296n^7 - 5n - 64}}{\sqrt[4]{16n^2 - 81}}; \text{ б) } a_n = \frac{(n + 2)^{n+2}}{4^n(n + 2)!}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{5^n} \left(\frac{7n + 3}{7n - 5} \right)^{6n^2 - 5n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{3}{(8n + 2) \cdot \ln(10n + 3) \cdot \sqrt[6]{\ln^4 \ln(10n + 3)}}; \text{ д) } a_n = (-1)^n \frac{2n}{n^2 + 5}; \text{ е) } a_n = \frac{\sin \frac{n\alpha}{9}}{\sqrt[8]{n^9} + 9}.$$

$$27.20 \text{ a) } a_n = \frac{\sqrt[7]{128n^6 - 1}}{\sqrt[3]{27n^3 + 8}}; \text{ б) } a_n = \frac{6 \cdot 11 \cdot 16 \cdot \dots \cdot (5n + 1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n - 1)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{4^n} \left(\frac{7n - 3}{7n - 4} \right)^{2n^2 + 6n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{8}{(4n+3) \cdot \ln(3n+2) \cdot \sqrt[3]{\ln^7 \ln(3n+2)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\cos \frac{n\alpha}{9}}{\sqrt[3]{n^8+4}}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3-\sqrt{n^3}}.$$

$$27.21 \text{ а) } a_n = \frac{4 \cdot \sqrt[7]{n^9-n-128}}{5 \cdot \sqrt[4]{625n^3-4n^2-16}}; \text{ б) } a_n = \frac{(n+2)^{n+2}}{2^{n+2}(n+2)!}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{35^n} \left(\frac{n-13}{n-19} \right)^{-7n^2+6n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{6}{(8n+2) \cdot \ln(9n+3) \cdot \sqrt{\ln \ln(9n+3)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\sin \frac{n\alpha}{10}}{\sqrt[5]{n^7+2}}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{5\sqrt[6]{n}}{\sqrt[6]{n^7+1}}.$$

$$27.22 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[11]{-n^3+2048}}{\sqrt[11]{-2048n^4-1}}; \text{ б) } a_n = \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (5n-3)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{4^n} \left(\frac{3n-3}{3n-2} \right)^{2n^2-6n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{9}{(5n+2) \cdot \ln(4n+2) \cdot \ln^3 \ln(4n+2)}; \text{ д) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n^5}}{2+\sqrt[3]{n^8}}; \text{ е) } a_n = \frac{\cos \frac{n\alpha}{10}}{\sqrt[10]{n^{11}+4}}.$$

$$27.23 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[7]{128n^8-n-1}}{\sqrt[5]{-243n^4+5n+32}}; \text{ б) } a_n = \frac{6^n(5n^3+n)}{7^n(2n^3+5)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{9^n} \left(\frac{4n-7}{4n-8} \right)^{9n^2-n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{2}{(7n-6) \cdot \ln(8n+4) \cdot \sqrt[6]{\ln^5 \ln(8n+4)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\sin \frac{3n\alpha}{11}}{\sqrt{n^5+3}}; \text{ е) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{n^5}{n^6+2}.$$

$$27.24 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[4]{625n^{12}-n^3-1296}}{\sqrt[3]{1296n^3-4n^2+27}}; \text{ б) } a_n = \frac{9^n(2n^4-n)}{4^n(9n+18)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{34^n} \left(\frac{2n+5}{2n+2} \right)^{3n^2+9n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{10}{(4n+5) \cdot \ln(3n+3) \cdot \sqrt[6]{\ln^7 \ln(3n+3)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\cos \frac{3n\alpha}{11}}{\sqrt[8]{n^9+7}}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n^3}}{2-\sqrt[4]{n^7}}.$$

$$27.25 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[3]{27n^3-n-1}}{\sqrt[5]{-32n^2-5n}}; \text{ б) } a_n = \frac{(n+2)!}{7^{n+1}(3n-2)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{5^n} \left(\frac{4n-8}{4n-3} \right)^{8n^2-3n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{6}{(5n-4) \cdot \ln(5n-2) \cdot \sqrt[7]{\ln^6 \ln(5n-2)}}; \text{ д) } a_n = (-1)^n \frac{8\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4+2}}; \text{ е) } a_n = \frac{\sin \frac{5n\alpha}{12}}{n^{12}+1}.$$

$$27.26 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[4]{16n^3-n^2-1}}{\sqrt[4]{81n^2+3n}}; \text{ б) } a_n = \frac{7n-3}{8^{16n^4-n}}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{6^n} \left(\frac{7n-1}{7n-3} \right)^{3n^2-5n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{8}{(4n+6) \cdot \ln(4n+3) \cdot \ln^9 \ln(4n+3)}; \text{ д) } a_n = \frac{\cos \frac{5n\alpha}{12}}{\sqrt[5]{n^{12}+3}}; \text{ е) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{n^4}{n^5+2}.$$

$$27.27 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[6]{64n^3 - 1}}{\sqrt[3]{8n - 3}}; \text{ б) } a_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n + 1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n - 1)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{6^n} \left(\frac{2n + 7}{2n - 6} \right)^{6n^2 - 9n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{4}{(6n + 5) \cdot \ln(7n + 5) \cdot \sqrt[9]{\ln^8 \ln(7n + 5)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\sin \frac{6n\alpha}{13}}{\sqrt[6]{n^{13}} + 2}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{7\sqrt[4]{n}}{1 + \sqrt[4]{n^5}}.$$

$$27.28 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[5]{32n^3 - 2n - 32}}{\sqrt[3]{8n - 4}}; \text{ б) } a_n = 5 \cdot \frac{5n - 1}{5^{5n^5 + 5}}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{16^n} \left(\frac{2n + 3}{2n - 1} \right)^{4n^2 - 7n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{7}{(11n - 4) \cdot \ln(6n + 1) \cdot \sqrt[7]{\ln^8 \ln(6n + 1)}}; \text{ д) } a_n = (-1)^{n-1} \frac{6n^2}{n^3 + 4}; \text{ е) } a_n = \frac{\cos \frac{6n\alpha}{13}}{\sqrt[3]{n^5} + 9}.$$

$$27.29 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt[4]{625n^5 - n^4 - 625}}{\sqrt[7]{128n^2 - 4n + 128}}; \text{ б) } a_n = \frac{(n + 3)^{n+3}}{8^n (n + 3)!}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{25^n} \left(\frac{2 - 3n}{7 - 3n} \right)^{7n^2 - 8n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{4}{(9n + 3) \cdot \ln(11n + 4) \cdot \sqrt[7]{\ln^5 \ln(11n + 4)}}; \text{ д) } a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 9}; \text{ е) } a_n = \frac{\sin \frac{3n\alpha}{14}}{\sqrt[4]{n^9} + 5}.$$

$$27.30 \text{ а) } a_n = \frac{\sqrt{16n^3 - 4}}{\sqrt[3]{125n^2 - 8}}; \text{ б) } a_n = \frac{4 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \dots \cdot (6n - 2)}{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (5n - 1)}; \text{ в) } a_n = \frac{1}{5^n} \left(\frac{5n - 15}{5n - 25} \right)^{3n^2 - 5n};$$

$$\text{г) } a_n = \frac{9}{(5n + 4) \cdot \ln(4n + 3) \cdot \sqrt[5]{\ln^6 \ln(4n + 3)}}; \text{ д) } a_n = \frac{\cos \frac{3n\alpha}{14}}{\sqrt[7]{n^9} + 3}; \text{ е) } a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{8n^5}}{\sqrt{n^7} + 3}.$$

28. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.

$$28.1 \quad c_n = (-1)^n \frac{2^n \sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^4 + 1}}, x_0 = 1.$$

$$28.2 \quad c_n = (-1)^n \frac{5^{n-1}}{7^n (\sqrt{n+2} + 4)}, x_0 = 9.$$

$$28.3 \quad c_n = (-1)^n \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}, x_0 = 2.$$

$$28.4 \quad c_n = (-1)^n \frac{5^{n+2} (\sqrt{n} + 1)}{n + 4}, x_0 = -8.$$

$$28.5 \quad c_n = (-1)^n \frac{3^n \sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^7 + 2}}, x_0 = 3.$$

$$28.6 \quad c_n = (-1)^n \frac{4^n \cdot \sqrt[3]{n+5}}{7^{n+1} \cdot \sqrt[3]{n^4 + 7}}, x_0 = -7.$$

$$28.7 \quad c_n = (-1)^n \frac{n^2 + 3n + 2}{5^n \cdot (n^3 + 1)}, x_0 = 4.$$

$$28.8 \quad c_n = (-1)^n \frac{1}{(n+4) \sqrt[3]{\ln(n+4)}}, x_0 = 6.$$

$$28.9 \quad c_n = (-1)^n \frac{1}{3^n (\sqrt{n+1} + 2)}, x_0 = 5.$$

$$28.10 \quad c_n = (-1)^n \frac{3^n \sqrt{n+2}}{(n+2) 2^{n+1}}, x_0 = -5.$$

28.11 $c_n = (-1)^n \frac{6^{n+4}(n+1)}{n^2 + 2n + 2}, x_0 = 6.$	28.12 $c_n = (-1)^n \frac{10^n}{\sqrt[5]{n^4 + 8}}, x_0 = -4.$
28.13 $c_n = (-1)^n \frac{1}{3^n(n+2)\ln(n+2)}, x_0 = 7.$	28.14 $c_n = (-1)^n \frac{7^n}{6^n \sqrt[4]{n^3 + 1}}, x_0 = -3.$
28.15 $c_n = (-1)^n \frac{4^n}{5^n \sqrt[3]{n^2 + 1}}, x_0 = 8.$	28.16 $c_n = (-1)^n \frac{4^{n+3}(n+2)}{n^2 + 4n + 5}, x_0 = -2.$
28.17 $c_n = (-1)^n \frac{5^n}{\sqrt[4]{n^3 + 7}}, x_0 = 9.$	28.18 $c_n = (-1)^n \frac{1}{(n+5)\ln(n+5)}, x_0 = 8.$
28.19 $c_n = (-1)^n \frac{2^n \sqrt{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}, x_0 = -1.$	28.20 $c_n = (-1)^n \frac{1}{4^n(\sqrt{n+2} + 3)}, x_0 = 6.$
28.21 $c_n = (-1)^n \frac{1}{(n+3)\lg(n+3)}, x_0 = -2.$	28.22 $c_n = (-1)^n \frac{n^3 + 3n^2 + 2}{2^n \cdot (n^4 + 8)}, x_0 = 5.$
28.23 $c_n = (-1)^n \frac{2^n \cdot \sqrt[3]{n+7}}{5^{n+1} \cdot \sqrt[3]{n^4 + 6}}, x_0 = -3.$	28.24 $c_n = (-1)^n \frac{5^n \sqrt{n^5}}{\sqrt[3]{n^9 + 2}}, x_0 = 4.$
28.25 $c_n = (-1)^n \frac{6^{n+5} \sqrt{n}}{n+3}, x_0 = -4.$	28.26 $c_n = (-1)^n \frac{1}{4^n(n+3)\ln(n+3)}, x_0 = 3.$
28.27 $c_n = (-1)^n \frac{1}{(n+3)\sqrt{\ln(n+3)}}, x_0 = -5.$	28.28 $c_n = (-1)^n \frac{3^n \sqrt{n+1}}{\sqrt[5]{n^6 + 1}}, x_0 = 2.$
28.29 $c_n = (-1)^n \frac{4^{n-1}}{5^n(\sqrt{n+1} + 3)}, x_0 = -6.$	28.30 $c_n = (-1)^n \frac{1}{(3n+8)\lg(3n+8)}, x_0 = 1.$

29. Используя разложение в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции, вычислить указанную величину с заданной степенью точности ε .

29.1 $\sqrt[5]{34}, \quad \varepsilon = 0,001.$	29.2 $\operatorname{sh} 1, \quad \varepsilon = 0,001.$
29.3 $\ln 1,3, \quad \varepsilon = 0,0001.$	29.4 $\sqrt[3]{e}, \quad \varepsilon = 0,0001.$
29.5 $\operatorname{arctg} 0,2, \quad \varepsilon = 0,0001.$	29.6 $\sqrt[5]{245}, \quad \varepsilon = 0,001.$
29.7 $\sin 58^\circ, \quad \varepsilon = 0,001.$	29.8 $\lg 3, \quad \varepsilon = 0,001.$
29.9 $\sqrt{84}, \quad \varepsilon = 0,001.$	29.10 $\cos 18^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001.$
29.11 $\ln 3, \quad \varepsilon = 0,0001.$	29.12 $\operatorname{arctg} 0,5, \quad \varepsilon = 0,0001.$
29.13 $\cos 28^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001.$	29.14 $\sin 18^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001.$
29.15 $\sqrt[3]{29}, \quad \varepsilon = 0,001.$	29.16 $\sin 91^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001.$
29.17 $\sin 88^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001.$	29.18 $\sqrt{98}, \quad \varepsilon = 0,001.$
29.19 $\cos 2^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001.$	29.20 $\lg 9, \quad \varepsilon = 0,001.$

$$29.21 \quad \pi, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$29.23 \quad \sqrt{e}, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$29.25 \quad \lg 2, \quad \varepsilon = 0,001.$$

$$29.27 \quad \operatorname{arctg} \frac{2}{3}, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$29.29 \quad \operatorname{ch} 1, \quad \varepsilon = 0,001.$$

$$29.22 \quad \cos 57^0, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$29.24 \quad \ln 6, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$29.26 \quad \sqrt[7]{15}, \quad \varepsilon = 0,001.$$

$$29.28 \quad \sqrt[6]{67}, \quad \varepsilon = 0,001.$$

$$29.30 \quad \ln 1,1, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

30. Вычислить определённый интеграл с точностью 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

$$30.1 \quad \int_0^{0,1} e^{-5x^2} dx.$$

$$30.2 \quad \int_0^{0,2} \sin 4x^2 dx.$$

$$30.3 \quad \int_0^{0,3} \cos 9x^2 dx.$$

$$30.4 \quad \int_0^{0,4} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$30.5 \quad \int_0^{0,5} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)}{x} dx.$$

$$30.6 \quad \int_0^{0,6} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx.$$

$$30.7 \quad \int_0^{0,7} \frac{e^{-3x} - 1}{x} dx.$$

$$30.8 \quad \int_0^{0,8} \frac{x - \sin x}{x} dx.$$

$$30.9 \quad \int_0^{0,9} \frac{1 - \cos x}{x} dx.$$

$$30.10 \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$30.11 \quad \int_0^{0,1} \ln(1+x^2) dx.$$

$$30.12 \quad \int_0^{0,2} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} dx.$$

$$30.13 \quad \int_0^{0,3} e^{-3x^2} dx.$$

$$30.14 \quad \int_0^{0,4} \sin 16x^2 dx.$$

$$30.15 \quad \int_0^{0,5} \cos 25x^2 dx.$$

$$30.16 \quad \int_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$$

$$30.17 \quad \int_0^{0,6} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x} dx.$$

$$30.18 \quad \int_0^{0,7} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

$$30.19 \quad \int_0^{0,8} \frac{2 - 2e^{-5x}}{x} dx.$$

$$30.20 \quad \int_0^{0,9} \frac{\sin 2x}{x} dx.$$

$$30.21 \quad \int_0^1 \frac{3 - 3\cos x}{x} dx.$$

$$30.22 \quad \int_0^{0,9} e^{-2x^2} dx.$$

$$30.23 \quad \int_0^{0,8} \sin 36x^2 dx.$$

$$30.24 \quad \int_0^{0,7} \cos 49x^2 dx.$$

$$30.25 \quad \int_0^{0,6} \sqrt[3]{8+x^3} dx.$$

$$30.26 \quad \int_0^{0,16} \ln(1+\sqrt{x}) dx.$$

$$30.27 \quad \int_0^{0,3} \sqrt[3]{27-x^3} dx.$$

$$30.28 \quad \int_0^{0,7} \frac{3e^{-5x} - 3}{x} dx.$$

$$30.29 \quad \int_0^{0,9} \frac{\sin 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$30.30 \quad \int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} dx.$$

31. Записать четыре первых члена, отличных от нуля, разложения в степенной ряд, решения дифференциального уравнения первого порядка.

$$31.1 \quad y' - \cos y - y \cos x = 0, \quad y(0) = 0. \quad 31.2 \quad y' - e^x - yx = 0, \quad y(0) = -1.$$

- 31.3 $y' - y^2 - x^2 = 0, y(0) = 1.$ 31.4 $y' - x^2 y^2 - y \cos x = 0, y(0) = 2.$
 31.5 $y' - 2 \sin x - yx - y = 0, y(0) = 1.$ 31.6 $y' - e^{2x} - 2y^2 x = 0, y(0) = 1.$
 31.7 $y' - x e^x - 2y^2 = 0, y(0) = 2.$ 31.8 $y' - e^y - yx = 0, y(0) = 0.$
 31.9 $y' - e^{\sin x} - y = 0, y(0) = 0.$ 31.10 $y' - x^2 - y^2 - yx = 0, y(0) = 1.$
 31.11 $y' - x^2 y^2 - 1 = 0, y(0) = 3.$ 31.12 $y' - e^y - y^2 = 0, y(0) = 0.$
 31.13 $y' - e^x - 2yx = 0, y(0) = 4.$ 31.14 $y' - 2y^2 - y e^x = 0, y(0) = 3.$
 31.15 $y' - 2y^2 - 2x^2 = 0, y(0) = 2.$ 31.16 $y' - 2y^2 - 2x^2 = 0, y(0) = 2.$
 31.17 $y' - y^2 - x^2 - x = 0, y(0) = 5.$ 31.18 $y' - e^x - 2x - 4y^2 = 0, y(0) = -2.$
 31.19 $y' - y^2 - 2xy = 0, y(0) = 3.$ 31.20 $y' - x^2 - y = 0, y(0) = -4.$
 31.21 $y' - y^2 - x \sin x = 0, y(0) = -1.$ 31.22 $y' - y^2 - x^2 - xy = 0, y(0) = -4.$
 31.23 $y' - y^2 - 4x^2 = 0, y(0) = 2.$ 31.24 $y' - 4y^2 - 6x^2 = 0, y(0) = 2.$
 31.25 $y' - \cos y - x \cos x = 0, y(0) = 0.$ 31.26 $y' - e^y - x^2 = 0, y(0) = 0.$
 31.27 $y' - 2 \cos x - yx - y = 0, y(0) = -1.$ 31.28 $y' - x^2 - 2y = 0, y(0) = 3.$
 31.29 $y' - e^{\sin x} - 2y = 0, y(0) = 1.$ 31.30 $y' - e^y - e^x = 0, y(0) = 0.$

32. Найти разложение в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$.

- 32.1 $f(x) = \begin{cases} \pi - 2x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 2\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ 32.2 $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
 32.3 $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ 32.4 $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{7} - \frac{2x}{7} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2\pi}{7} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
 32.5 $f(x) = \begin{cases} 2\pi - 4x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 4\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ 32.6 $f(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{5} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
 32.7 $f(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{7} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2x}{7} + \frac{\pi}{7} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ 32.8 $f(x) = \begin{cases} 8\pi - 16x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 16\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
32.9 \quad f(x) &= \begin{cases} 5\pi - 10x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 10\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.10 \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
32.11 \quad f(x) &= \begin{cases} \pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.12 \quad f(x) &= \begin{cases} 3\pi - 6x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 6\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
32.13 \quad f(x) &= \begin{cases} 7\pi - 14x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 14\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.14 \quad f(x) &= \begin{cases} 4\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 4x + 2\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
32.15 \quad f(x) &= \begin{cases} 16\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 16x + 8\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.16 \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
32.17 \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\pi}{5} - \frac{2x}{5} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2\pi}{5} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.18 \quad f(x) &= \begin{cases} 12\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 12x + 6\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
32.19 \quad f(x) &= \begin{cases} 8\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 8x + 4\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.20 \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
32.21 \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\pi}{6} - \frac{x}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{3} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.22 \quad f(x) &= \begin{cases} 10\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 10x + 5\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
32.23 \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{2\pi}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2x}{3} + \frac{\pi}{3} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.24 \quad f(x) &= \begin{cases} 4\pi - 8x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 8\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
32.25 \quad f(x) &= \begin{cases} 6\pi - 12x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 12\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.26 \quad f(x) &= \begin{cases} 14\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 14x + 7\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \\
32.27 \quad f(x) &= \begin{cases} 6\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 6x + 3\pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} & 32.28 \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{2x}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{2\pi}{3} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$32.29 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} - \frac{x}{3} & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{3} & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad 32.30 \quad f(x) = \begin{cases} 2\pi & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 2x + \pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

33. Найти разложение в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$ на указанном интервале.

$$33.1 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} & \text{при } -6 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{3} & \text{при } 0 \leq x \leq 6, \end{cases} \quad -6 \leq x \leq 6, \quad l = 6.$$

$$33.2 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{3} & \text{при } -12 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{4} & \text{при } 0 \leq x \leq 12, \end{cases} \quad -12 \leq x \leq 12, \quad l = 12.$$

$$33.3 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4} & \text{при } -20 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{5} & \text{при } 0 \leq x \leq 20, \end{cases} \quad -20 \leq x \leq 20, \quad l = 20.$$

$$33.4 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{5} & \text{при } -30 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{6} & \text{при } 0 \leq x \leq 30, \end{cases} \quad -30 \leq x \leq 30, \quad l = 30.$$

$$33.5 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{6} & \text{при } -42 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{7} & \text{при } 0 \leq x \leq 42, \end{cases} \quad -42 \leq x \leq 42, \quad l = 42.$$

$$33.6 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{7} & \text{при } -56 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{8} & \text{при } 0 \leq x \leq 56, \end{cases} \quad -56 \leq x \leq 56, \quad l = 56.$$

$$33.7 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{8} & \text{при } -72 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{9} & \text{при } 0 \leq x \leq 72, \end{cases} \quad -72 \leq x \leq 72, \quad l = 72.$$

$$33.8 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{9} & \text{при } -90 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{10} & \text{при } 0 \leq x \leq 90, \end{cases} \quad -90 \leq x \leq 90, \quad l = 90.$$

$$33.9 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} & \text{при } -10 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{5} & \text{при } 0 \leq x \leq 10, \end{cases} \quad -10 \leq x \leq 10, \quad l = 10.$$

$$33.10 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{3} & \text{при } -21 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{7} & \text{при } 0 \leq x \leq 21, \end{cases} \quad -21 \leq x \leq 21, \quad l = 21.$$

$$33.11 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4} & \text{при } -36 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{9} & \text{при } 0 \leq x \leq 36, \end{cases} \quad -36 \leq x \leq 36, \quad l = 36.$$

$$33.12 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{5} & \text{при } -35 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{7} & \text{при } 0 \leq x \leq 35, \end{cases} \quad -35 \leq x \leq 35, \quad l = 35.$$

$$33.13 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} & \text{при } -14 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{7} & \text{при } 0 \leq x \leq 14, \end{cases} \quad -14 \leq x \leq 14, \quad l = 14.$$

$$33.14 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{3} & \text{при } -15 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{5} & \text{при } 0 \leq x \leq 15, \end{cases} \quad -15 \leq x \leq 15, \quad l = 15.$$

$$33.15 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{5} & \text{при } -45 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{9} & \text{при } 0 \leq x \leq 45, \end{cases} \quad -45 \leq x \leq 45, \quad l = 45.$$

$$33.16 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{6} & \text{при } -24 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{8} & \text{при } 0 \leq x \leq 24, \end{cases} \quad -24 \leq x \leq 24, \quad l = 24.$$

$$\begin{aligned}
33.17 \quad f(x) &= \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{9} & \text{при } -18 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 18, \end{cases} \quad -18 \leq x \leq 18, \quad l = 18. \\
33.18 \quad f(x) &= \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{3} & \text{при } -30 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{10} & \text{при } 0 \leq x \leq 30, \end{cases} \quad -30 \leq x \leq 30, \quad l = 30. \\
33.19 \quad f(x) &= \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{3} & \text{при } -24 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{8} & \text{при } 0 \leq x \leq 24, \end{cases} \quad -24 \leq x \leq 24, \quad l = 24. \\
33.20 \quad f(x) &= \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{при } -8 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{4} & \text{при } 0 \leq x \leq 8, \end{cases} \quad -8 \leq x \leq 8, \quad l = 8. \\
33.21 \quad f(x) &= \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} & \text{при } -12 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{6} & \text{при } 0 \leq x \leq 12, \end{cases} \quad -12 \leq x \leq 12, \quad l = 12. \\
33.22 \quad f(x) &= \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{3} & \text{при } -27 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{9} & \text{при } 0 \leq x \leq 27, \end{cases} \quad -27 \leq x \leq 27, \quad l = 27. \\
33.23 \quad f(x) &= \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{6} & \text{при } -18 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{9} & \text{при } 0 \leq x \leq 18, \end{cases} \quad -18 \leq x \leq 18, \quad l = 18. \\
33.24 \quad f(x) &= \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{при } -16 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{8} & \text{при } 0 \leq x \leq 16, \end{cases} \quad -16 \leq x \leq 16, \quad l = 16. \\
33.25 \quad f(x) &= \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4} & \text{при } -28 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{7} & \text{при } 0 \leq x \leq 28, \end{cases} \quad -28 \leq x \leq 28, \quad l = 28.
\end{aligned}$$

$$33.26 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{5} & \text{при } -40 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{8} & \text{при } 0 \leq x \leq 40, \end{cases} \quad -40 \leq x \leq 40, \quad l = 40.$$

$$33.27 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4} & \text{при } -24 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{12} & \text{при } 0 \leq x \leq 24, \end{cases} \quad -24 \leq x \leq 24, \quad l = 24.$$

$$33.28 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{6} & \text{при } -72 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{2} & \text{при } 0 \leq x \leq 72, \end{cases} \quad -72 \leq x \leq 72, \quad l = 72.$$

$$33.29 \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4} & \text{при } -48 \leq x < 0, \\ \cos \frac{\pi x}{24} & \text{при } 0 \leq x \leq 48, \end{cases} \quad -48 \leq x \leq 48, \quad l = 48.$$

$$33.30 \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{при } -40 \leq x < 0, \\ \sin \frac{\pi x}{10} & \text{при } 0 \leq x \leq 40, \end{cases} \quad -40 \leq x \leq 40, \quad l = 40.$$

34. Используя разложение в ряд Фурье по синусам и косинусам кратных дуг функции $f(x)$, заданную на интервале $[0; \pi]$, доопределив её предварительно нечётным и чётным образом с периодом $T = 2\pi$, найти сумму указанного ряда.

$$34.1 \quad f(x) = 10^{-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\pi} \cdot (-1)^{n-1} + 1}{(2n-1)^2 + \ln^2 10} \cdot \frac{2n-1}{10^{\pi}}.$$

$$34.2 \quad f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

$$34.3 \quad f(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch \frac{x}{5} \cdot (-1)^{n-1} + 1}{25n^2 + 1}.$$

$$34.4 \quad f(x) = 4^{\frac{x}{3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{\frac{\pi}{3}} - (-1)^n}{9n^2 + \ln^2 4}.$$

$$34.5 \quad f(x) = x^2 - 10x + 25, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(25(2n-1)^2 - 2) \cdot (-1)^{n-1} - 2 + (2n-1)^2 \cdot (5-\pi)^2}{(2n-1)^3}.$$

$$34.6 \quad f(x) = e^x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi} + (-1)^{n+1}}{1+n^2}.$$

$$34.7 \quad f(x) = 5^{-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-\pi} + (-1)^{n+1}}{n^2 + \ln^2 5}.$$

$$34.8 \quad f(x) = x^2 + 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}.$$

$$34.9 \quad f(x) = 4x^2 - 4x + 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n-1)^2 - 8) \cdot (-1)^{n-1} - 8 + (3-4n)^2}{(2n-1)^3}.$$

$$34.10 \quad f(x) = \operatorname{ch} x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \pi + (-1)^{n-1}}{(2n-1)^2 + 1} \cdot (2n-1).$$

$$34.11 \quad f(x) = x^2 - 2\pi x + \pi^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 (2n-1)^2 + 2) + (-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

$$34.12 \quad f(x) = 6^{\frac{x}{4}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 6^{\frac{\pi}{4}} - 1}{16n^2 + \ln^2 6}.$$

$$34.13 \quad f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

$$34.14 \quad f(x) = \operatorname{ch} 4x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 4\pi + (-1)^{n-1}}{(2n-1)^2 + 16} \cdot (2n-1).$$

$$34.15 \quad f(x) = x^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

$$34.16 \quad f(x) = 2^x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{\pi} - 1}{n^2 + \ln^2 2}.$$

$$34.17 \quad f(x) = e^{-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi} - (-1)^n}{4n^2 - 4n + 2} \cdot (2n-1).$$

$$34.18 \quad f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

$$34.19 \quad f(x) = 3^{\frac{x}{2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{\frac{\pi}{2}} - 1}{4n^2 + \ln^2 3}.$$

$$34.20 \quad f(x) = \operatorname{sh} 2x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 2\pi \cdot (-1)^{n-1} + 1}{n^2 + 4}.$$

$$34.21 \quad f(x) = e^{2x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - (-1)^n}{4n^2 - 4n + 5} \cdot (2n-1).$$

$$34.22 \quad f(x) = \operatorname{sh} 3x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 3\pi \cdot (-1)^{n+1} + 1}{n^2 + 9}.$$

$$34.23 \quad f(x) = e^{4x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{4\pi} - (-1)^n}{4n^2 - 4n + 32} \cdot (2n - 1).$$

$$34.24 \quad f(x) = e^{\frac{x}{4}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{4}} (-1)^n - 1}{16n^2 + 1}.$$

$$34.25 \quad f(x) = e^{-3x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-3\pi} - (-1)^n}{4n^2 - 4n + 10} \cdot (2n - 1).$$

$$34.26 \quad f(x) = 7^{\frac{x}{7}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 7^{\frac{\pi}{7}} - 1}{49n^2 + \ln^2 7}.$$

$$34.27 \quad f(x) = e^{\frac{2x}{3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi}{3}} \cdot (-1)^{n+1} + 1}{9n^2 + 4}.$$

$$34.28 \quad f(x) = \operatorname{ch} \frac{x}{\pi}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1 + n^2 \pi^2}.$$

$$34.29 \quad f(x) = e^{\frac{4x}{3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{4\pi}{3}} \cdot (-1)^{n+1} + 1}{9n^2 + 16}.$$

$$34.30 \quad f(x) = x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 4n + 1}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Замечательные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \ln x = 1 \quad (\alpha > 0).$$

Приложение 2. Производные основных элементарных функций и правила дифференцирования функций одной переменной

$$\begin{aligned}
 C' &= 0. & (x^n)' &= n \cdot x^{n-1}, n \neq 0. \\
 (a^x)' &= a^x, a > 0, a \neq 1; (e^x)' = e^x. & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}, a > 0, a \neq 1; (\ln x)' = \frac{1}{x}. \\
 (\sin x)' &= \cos x. & (\cos x)' &= -\sin x. \\
 (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. & (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\
 (\arcsin x)' &= -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; |x| < 1. & (\operatorname{arctg} x)' &= -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \\
 (\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x. & (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x. \\
 (\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. & (\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, x \neq 0.
 \end{aligned}$$

Правила дифференцирования функций одной переменной

$$\begin{aligned}
 (u \pm v)' &= u' \pm v'. \\
 (u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v'. \\
 \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0.
 \end{aligned}$$

Приложение 3. Интегралы элементарных функций и основные правила интегрирования функций одной переменной

$$\begin{aligned}
 \int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1. & \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C, x \neq 0. \\
 \int a^x dx &= a^x + C, a > 0, a \neq 1; \int e^x dx = e^x + C. \\
 \int \sin x dx &= -\cos x + C. & \int \cos x dx &= \sin x + C. \\
 \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= \operatorname{ctg} x + C, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\
 \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\
 \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\
 \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0. & \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C, a \neq 0.
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, |x| > |a|.$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, x \neq 0.$$

Правила интегрирования функций одной переменной

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

$$\int F'(x) dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C, k \neq 0.$$

$$\int (\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot \varphi(x)) dx = \alpha \int f(x) dx \pm \beta \int \varphi(x) dx, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Формула Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приложение 4. Свойства преобразования Лапласа и некоторые предельные соотношения

Преобразование Лапласа

Прямое преобразование
Лапласа (изображение)

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Обратное преобразование
Лапласа (оригинал)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dt$$

Свойства преобразования Лапласа

$$(f(t) \dot{=} F(p), \varphi(t) \dot{=} \Phi(p))$$

Свойство однородности

$$\alpha \cdot f(t) \dot{=} \alpha \cdot F(p)$$

Свойство аддитивности

$$f(t) + \varphi(t) \dot{=} F(p) + \Phi(p)$$

Свойство подобия

$$f(\alpha t) \dot{=} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

Теорема запаздывания
оригинала

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0$$

Теорема упреждения
оригинала

$$f(t + \tau) \doteq e^{p\tau} \left[F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right], \quad \tau > 0$$

Теорема смещения
изображения

$$e^{\lambda t} \cdot f(t) \doteq F(p - \lambda)$$

Дифференцирование
оригинала

$$\begin{aligned} \text{а) } f'(t) &\doteq p \cdot F(p) - f(+0), \\ \text{б) } f^{(n)}(t) &\doteq p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(+0) - \\ &- p^{n-2} \cdot f'(+0) - \dots - p \cdot f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0) \end{aligned}$$

Дифференцирование
изображения

$$\begin{aligned} \text{а) } -t \cdot f(t) &\doteq F'(p), \\ \text{б) } (-t)^n \cdot f(t) &\doteq F^{(n)}(p) \end{aligned}$$

Интегрирование
оригинала

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$$

Интегрирование
изображения

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} F(z) dz$$

Изображение свертки
оригиналов (умножение
изображений)

$$f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t - \tau) d\tau \doteq F(p) \cdot \Phi(p)$$

Интеграл Дюамеля

$$\frac{d}{dt}(f(t) * \varphi(t)) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \right) \doteq pF(p)\Phi(p)$$

Формула Дюамеля

$$f(t) \cdot \varphi(+0) + \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi'(t - \tau) d\tau \doteq p \cdot F(p) \cdot \Phi(p)$$

Предельные соотношения

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(+0), \quad \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(\infty)$$

Оригиналы и их изображения

Оригинал	Изображение
$\eta(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

Приложение 5. Интегралы от функций нескольких переменных

Приложения двойного интеграла

Площадь плоской фигуры: $S = \iint_G dx dy$.

Объём цилиндроида: $V = \iint_G f(x; y) dx dy$.

Площадь поверхности: $S = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x; y)}{\partial y}\right)^2} dx dy$.

Масса плоской пластины: $m = \iint_G \rho(x; y) dx dy$, где $\rho(x; y)$ – плотность.

Статические моменты относительно координатных осей:

$$M_x = \iint_G y \rho(x; y) dx dy, \quad M_y = \iint_G x \rho(x; y) dx dy.$$

Координаты центра масс пластины: $x_c = \frac{M_y}{m}$, $y_c = \frac{M_x}{m}$.

Моменты инерции относительно координатных осей и начала координат:

$$I_x = \iint_G y^2 \rho(x; y) dx dy, \quad I_y = \iint_G x^2 \rho(x; y) dx dy, \quad I_0 = \iint_G (x^2 + y^2) \rho(x; y) dx dy.$$

Приложения тройного интеграла

Объём тела: $V = \iiint_{\Omega} f(x; y; z) dx dy dz$.

Масса тела: $m = \iiint_{\Omega} \rho(x; y; z) dx dy dz$, где $\rho(x; y; z)$ – плотность.

Координаты центра масс тела: $x_c = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} x \rho(x; y; z) dx dy dz$,

$$y_c = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} y \rho(x; y; z) dx dy dz, \quad z_c = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} z \rho(x; y; z) dx dy dz.$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей,

координатных осей и начала координат: $I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2 \rho(x; y; z) dx dy dz$,

$$I_{yz} = \iiint_{\Omega} x^2 \rho(x; y; z) dx dy dz, \quad I_{xz} = \iiint_{\Omega} y^2 \rho(x; y; z) dx dy dz,$$

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x; y; z) dx dy dz, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x; y; z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x; y; z) dx dy dz, \quad I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x; y; z) dx dy dz.$$

Приложения криволинейных и поверхностных интегралов

Длина кривой: $l = \int_r dl$.

Масса кривой: $m = \int_r \rho(x; y; z) dl$.

Координаты центра масс дуги с плотностью $\rho(x; y; z)$:

$$x_c = \frac{1}{m} \int_r x \rho(x; y; z) dl, \quad y_c = \frac{1}{m} \int_r y \rho(x; y; z) dl, \quad z_c = \frac{1}{m} \int_r z \rho(x; y; z) dl.$$

Работа силы $\vec{F} = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$ вдоль дуги r :

$$A = \int_r P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz.$$

Циркуляция векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ вдоль замкнутого контура r :

$$\Pi = \oint_r \vec{a} \cdot \vec{dl}.$$

Поток векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ через поверхность Σ в направлении нормали

$$\vec{n}^0(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma): \Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma.$$

Теорема Стокса: $\oint_r \vec{a} \cdot \vec{dl} = \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma.$

Теорема Остроградского – Гаусса: $\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz.$

Приложение 6. Функциональные ряды Разложения основных функций в степенной ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in R.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad x \in R.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in R.$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad x \in R.$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in R.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1; 1].$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) \quad x \in (-1; 1).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad x \in (-1; 1).$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad x \in (-1; 1).$$

Функциональный ряд Фурье

Для периодической функции $y = f(x)$ с периодом $T = 2l$ на интервале $(-l; l)$

ряд имеет вид: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$, где коэффициенты ряда опреде-

ляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Мн. : Выш. шк. 1984. – Ч. 3 – 5.
2. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 432 с.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : в 2-х т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 456 с.
4. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Наука, 1980. – 336 с.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Мн. : Выш. шк., 1990. – Ч. 2 – 3.
6. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Мн. : Выш. шк., 1989. – Ч. 1 – 2.
7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. школа, 1983. – 168 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Методические указания к выполнению типового расчёта	3
Раздел 1. Операционное исчисление	4
Раздел 2. Кратные интегралы	14
Раздел 3. Геометрические и механические приложения кратных интегралов	25
Раздел 4. Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы векторного поля	33
Раздел 5. Числовые и функциональные ряды	42
Приложения	59
Литература	66